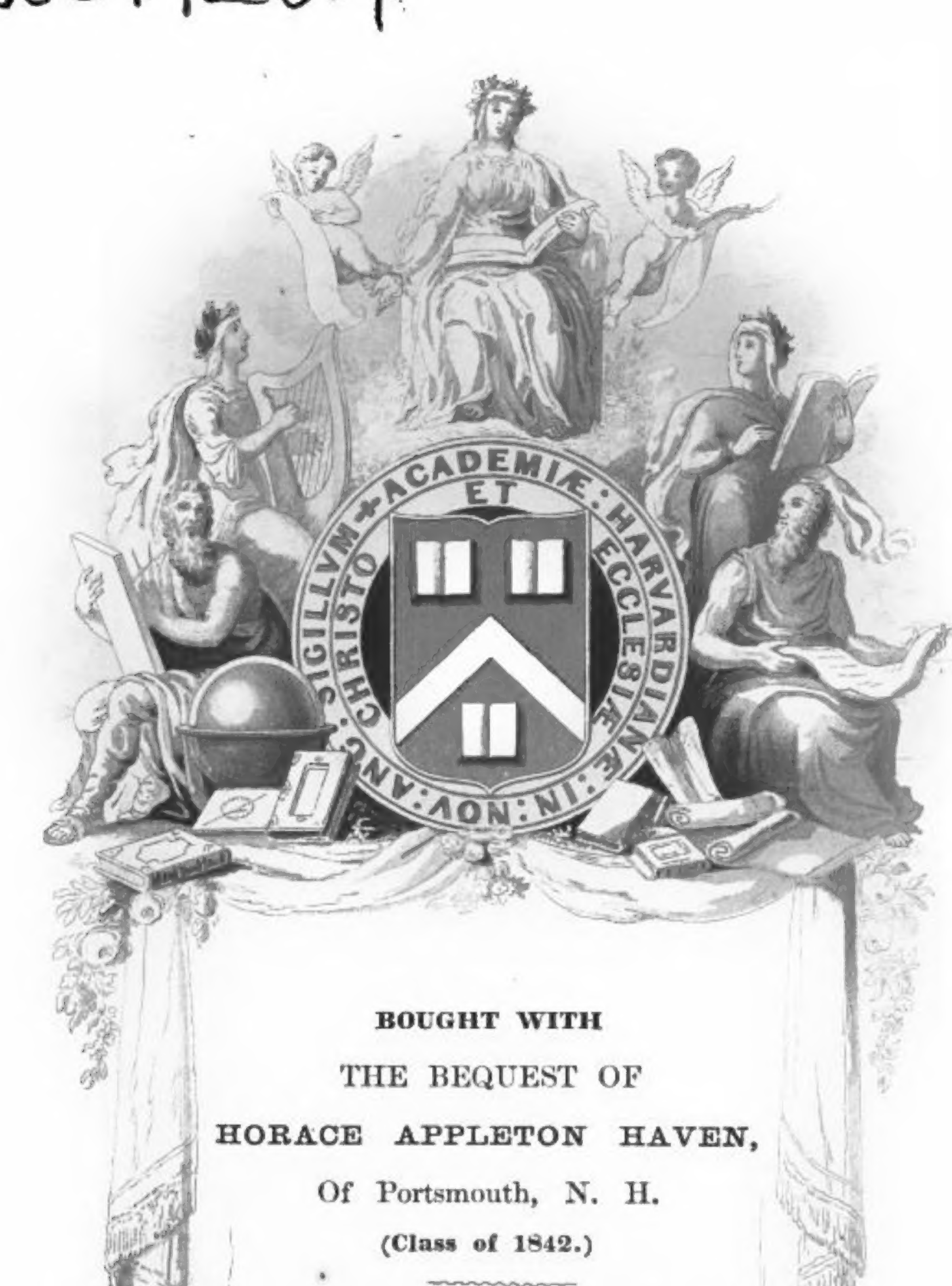
# BERICHTE ÜBER DIE VERHANDLUNGEN DER KÖNIGLICH SÄCHSISCHEN GESELLSCHAFT...




SIGILLVM ACADEMIÆ HARVARDIANÆ IN NOV ANG
CHRISTO ET ECCLESIÆ

# BERICHTE

ÜBER DIE

# VERHANDLUNGEN

DER KÖNIGLICH SÄCHSISCHEN

# GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN

ZU LEIPZIG.

MATHEMATISCH-PHYSISCHE CLASSE.

DREISSIGSTER BAND.

1878.

MIT 3 LITHOGRAPHIRTEN TAFELN.

C.

LEIPZIG

BEI S. HIRZEL.

# INHALT.

In den Sitzungen der math.-phys. Classe der Königl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften wurden im Laufe des Jahres 1878 nachstehende Vorträge gehalten:

*am 4. Febr.:* W. Hankel legt eine Abhandlung vor über die thermoelektrischen Eigenschaften des Apatits, Brucits, Coelestins, Prehnits, Natroliths, Skolezits, Datoliths und Axinits.

*am 11. März:* C. Bruhns, einige Mittheilungen über Ausmessung der beim Venusdurchgange aufgenommenen Photographien.

Derselbe, über die Resultate einer von Professor Kuntze über die Temperatur der Quellen in der Umgegend von Tharandt ausgeführten Untersuchung.

W. Scheibner legt eine Abhandlung W. Weber's über die Energie der Wechselwirkungen vor.

C. Neumann, über die Zusammensetzung der nach dem Weber'schen Gesetz sich ergebenden Beschleunigungen.

*am 23. April:* C. Bruhns, einige Mittheilungen über den Stand der Berechnung der Beobachtungen beim Venusdurchgange.

W. Hankel, über das thermoelektrische Verhalten des chlorsauren Natrons.

*am 3. Juni:* A. Mayer, über ein Problem der Variationsrechnung.

C. Bruhns, über die Beobachtung des Mercursdurchganges am 6. Mai auf hiesiger Sternwarte.

*am 29. Juli:* W. Scheibner legt eine Abhandlung über Reduction, Transformation und Addition der elliptischen Integrale vor.

*am 14. Nov.:* W. Knop, über Maispflanzen, welche in Lösungen von unterschwefelsauren Salzen anstatt der schwefelsauren gewachsen waren.

W. Hankel, über den eigenthümlichen Vorgang, dass unter bestimmten Verhältnissen aus dem sogenannten negativen Pole einer Inductionsspirale positive Elektricität austritt.

C. Bruhns, die Berechnung einer Mondfinsterniss am 3. April des Jahres 33 n. Chr.

---

Protector der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften

SEINE MAJESTÄT DER KÖNIG.

---

## Ehrenmitglieder.

Seine Excellenz der Minister des Königlichen Hauses, Freiherr *Johann Paul von Falkenstein*.

Seine Excellenz der Staatsminister des Cultus und öffentlichen Unterrichts, Herr *Carl Friedrich von Gerber*.

---

## Ordentliche einheimische Mitglieder der philologisch-historischen Classe.

Herr Geheimer Hofrath *Heinrich Leberecht Fleischer* in Leipzig, Secretär der philol.-histor. Classe.

- Professor *Friedrich Zarncke* in Leipzig, stellvertretender Secretär der philol.-histor. Classe.
- Geheimer Hofrath *Georg Curtius* in Leipzig.
- Professor *Georg Ebers* in Leipzig.
- —— *Adolf Ebert* in Leipzig.
- —— *Alfred Fleckeisen* in Dresden.
- —— *Gustav Hartenstein* in Jena.
- Hofrath *Max Heinze* in Leipzig.

Herr Professor und Universitäts-Oberbibliothekar *Christoph Ludolf Ehrenfried Krehl* in Leipzig.
- Professor *Ludwig Lange* in Leipzig.
- —— *August Leskien* in Leipzig.
- Oberschulrath *Carl Joachim Marquardt* in Gotha.
- Professor *Johannes Adolph Overbeck* in Leipzig.
- Geheimer Hofrath *Otto Ribbeck* in Leipzig.
- Geheimer Rath *Wilhelm Roscher* in Leipzig.
- Professor *Anton Springer* in Leipzig.
- —— *Georg Voigt* in Leipzig.
- —— *Moritz Voigt* in Leipzig.

Se. Exc. Herr Wirkl. Geheimer Rath *Karl Georg von Waechter* in Leipzig.

---

## Ordentliche auswärtige Mitglieder der philologisch-historischen Classe.

Herr Professor *Conrad Bursian* in München.
- —— *Johann Gustav Droysen* in Berlin.
- —— *Hermann Alfred von Gutschmid* in Tübingen.
- Geheimer Justiz- und Oberappellationsgerichtsrath *Andreas Ludwig Jacob Michelsen* in Schleswig.
- Professor *Theodor Mommsen* in Berlin.
- Geheimer Regierungsrath *Hermann Sauppe* in Göttingen.
- Kirchenrath *Eberhard Schrader* in Berlin.
- Professor *Gustav Seyffarth* in New-York.
- —— *Karl Bernhard Stark* in Heidelberg.

---

## Ordentliche einheimische Mitglieder der mathematisch-physischen Classe.

Herr Geheimer Hofrath *Wilhelm Gottlieb Hankel* in Leipzig, Secretär der mathem.-phys. Classe.
- Professor *Wilhelm Scheibner* in Leipzig, stellvertretender Secretär der mathem.-phys. Classe.

Herr Geheimer Hofrath *Carl Bruhns* in Leipzig.
- Geheimer Rath *Moritz Wilhelm Drobisch* in Leipzig.
- Professor *Gustav Theodor Fechner* in Leipzig.
- —— *Wilhelm His* in Leipzig.
- —— *Johann August Ludwig Wilhelm Knop* in Leipzig.
- Geheimer Hofrath *Hermann Kolbe* in Leipzig.
- Professor *Adalbert Krüger* in Gotha.
- Geheimer Hofrath *Rudolph Leuckart* in Leipzig.
- —— —— *Carl Friedrich Wilhelm Ludwig* in Leipzig.
- Professor *Adolph Mayer* in Leipzig.
- —— *Carl Neumann* in Leipzig.
- Oberbergrath *Ferdinand Reich* in Freiberg.
- Hofrath *August Schenk* in Leipzig.
- Geheimer Hofrath *Oskar Schlömilch* in Dresden.
- Hofrath *Gustav Wiedemann* in Leipzig.
- Professor *Ferdinand Zirkel* in Leipzig.
- —— *Johann Carl Friedrich Zöllner* in Leipzig.

---

## Ordentliche auswärtige Mitglieder der mathematisch-physischen Classe.

Herr Professor *Heinrich Richard Baltzer* in Giessen.
- Hofrath *Otto Funke* in Freiburg.
- Geheimer Hofrath *Carl Gegenbauer* in Heidelberg.
- Staatsrath *Mathias Jacob Schleiden* in Wiesbaden.
- Professor *Samuel Friedrich Nathanael Stein* in Prag.
- Geheimer Hofrath *Wilhelm Weber* in Göttingen.

---

# Verzeichniss

## der bei der Königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften im Jahre 1878 eingegangenen Schriften.

### Von gelehrten Gesellschaften, Universitäten und öffentlichen Behörden herausgegebene und periodische Schriften.

Abhandlungen der Kgl. Akademie d. Wissensch. zu Berlin. Aus d. J. 1877. Berlin 1878.

Monatsberichte der Königl. Preuss. Akad. d. Wissensch. zu Berlin. 1877, Sept. — Dec. 1878, Jan. — Aug.

Denkschriften der Kaiserl. Akad. d. Wissensch. Mathematisch-naturwissensch. Cl. Bd. 37. Wien 1877.

Denkschriften der Kaiserl. Akad. d. Wissensch. Philos.-histor. Cl. Bd. 24. 25. Wien 1876. Bd. 26. Wien 1877.

Sitzungsberichte der Kaiserl. Akad. d. Wissensch. Philos.-histor. Cl. Bd. 80, Heft 4. Wien 1875. Bd. 81, Heft 1—3. Bd. 82, Heft 1. 2. Bd. 84, Heft 1—3. Wien 1876. Bd. 85, Heft 1—3. Bd. 86, Heft 1—3. Bd. 87. Wien 1877.

Sitzungsberichte der Kaiserl. Akad. d. Wiss. Mathem.-naturwiss. Cl. Bd. 74, Abth. I, Heft 3—5. Abth. II, Heft 3—5. Abth. III, Heft 1—5. Wien 1876. Bd. 75, Abth. I, Heft 1—5. Abth. II, Heft 1—5. Abth. III, Heft 1—5. Wien 1876/77. Bd. 76, Abth. II, Heft 1. Wien 1877.

Anzeiger der Kaiserl. Akad. d. Wissensch. in Wien. Mathem.-naturwiss. Cl. Jahrg. 1877, Nr. 25—28. Jahrg. 1878, Nr. 1. 3. 4. 6—22. 24. 25. 27. 28.

Almanach d. Kaiserl. Akad. d. Wiss. 1877. Jahrg. XXVII. Wien 1877.

Archiv für österreich. Geschichte. Herausg. v. der zur Pflege vaterländ. Geschichte aufgestellten Commission der Kaiserl. Akad. d. Wissensch. Bd. 54, 1. Hälfte. Bd. 55, 1. u. 2. Hälfte. Bd. 56, 1. Hälfte. Wien 1876. 77.

Fontes rerum Austriacarum. Oesterreich. Geschichtsquellen, herausg. von der histor. Commission der Kaiserl. Akad. d. Wissensch. Abth. II. Diplomata et acta. Bd. 38. 40. Wien 1876. 77.

Verhandlungen der k. k. geologischen Reichsanstalt. Jahrgang 1875, No. 11—13. Jahrg. 1877, No. 11—18. Jahrg. 1878, No. 1—13.

Jahrbuch d. k. k. geologischen Reichsanstalt. Jahrg. 1875. Bd. XXV, No. 3. Jahrg. 1877. Bd. XXVII, No. 3 und 4. Wien 1877. Jahrg. 1878. Bd. XXVIII, No. 1—3. Wien 1878. Hierzu: G. Tschermak, Mineralogische Mittheilungen, Bd. V, Heft 3. Bd. VII, Heft 3. 4.

Abhandlungen der k. k. geologischen Reichsanstalt. Bd. VIII, Heft 2. Wien 1877.

Mittheilungen der k. k. geographischen Gesellschaft in Wien. 1876. Bd. 19 (N. F., Bd. 9). 1877. Bd. 20 (N. F., Bd. 10). Wien 1876. 77.

Jahresbericht des wissenschaftlichen Club 1876/77. Wien 1877.

Literarische Berichte aus Ungarn über die Thätigkeit der Ungar. Akademie der Wissenschaften und ihrer Commissionen, des Ungar. National-Museums u. s. w. Bd. 1, Heft 1—4. Bd. 2, Heft 1. Budapest 1877. 1878.

Sitzungsberichte der königl. böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften in Prag. Jahrg. 1877. Prag 1878.

Astronomische, magnetische und meteorologische Beobachtungen an der k. k. Sternwarte zu Prag im J. 1877, von L. Hornstein. Jahrg. 38. Prag 1878.

Jahresbericht des naturhistorischen Vereins Lotos für 1877. Jahrg. 27 der Zeitschrift »Lotos«. Prag 1878.

Mittheilungen des Vereins für Geschichte der Deutschen in Böhmen. Jahrg. XV, Nr. 3 u. 4. Jahrg. XVI, Nr. 1 u. 2. Prag 1877.

1. Bericht des naturwissenschaftl. Vereins zu Aussig. Für d. J. 1876 u. 1877. Aussig 1878.

Mittheilungen des histor. Vereines für Steiermark. Heft 26. Graz 1878.

Beiträge zur Kunde steiermärkischer Geschichtsquellen. Herausgeg. vom histor. Vereine für Steiermark. Jahrg. 15. Graz 1878.

Berichte des naturwiss.-medizin. Vereines in Innsbruck. 6. Jahrg. (1875), Heft 1. 2. Innsbruck 1876.

Zeitschrift des Ferdinandeums für Tirol u. Vorarlberg. 3. Folge. Heft 21. Innsbruck 1877.

Abhandlungen der philosoph.-philolog. Cl. der k. bayer. Akad. d. Wissensch. Bd. 14 (in d. Reihe d. Denkschriften d. XLIX. Bd.), Abth. 2. München 1877.

Abhandlungen der histor. Cl. der k. bayer. Akad. d. Wissensch. Bd. 13 (in d. Reihe d. Denkschriften d. XLVII. Bd.), Abth. 3. München 1877. Bd. 14 (in d. Reihe d. Denkschr. d. XLVIII. Bd.), Abth. 1. München 1878.

Abhandlungen d. mathemat.-physikal. Cl. der k. bayer. Akad. d. Wissensch. Bd. 13 (in d. Reihe d. Denkschriften d. XLV. Bd.), Abth. 1. München 1878.

Almanach der k. bayer. Akad. d. Wissensch. Jahrg. 1878. München 1878.

Spengel, A., Ueber die lateinische Komödie. Festrede gehalten in der öffentl. Sitzung der k. bayer. Akad. der Wissensch. am 28. März 1878. München 1878.

Döllinger, J. von, Aventin und seine Zeit. Rede gehalten in der öffentl. Sitzung der k. bayer. Akad. d. Wissensch. am 25. August 1877. München 1877.

Sitzungsberichte der philos.-philol. u. histor. Cl. der k. bayer. Akad. d. Wissensch. zu München. 1877, Heft 3. 4. 1878, Heft 1—4. München 1877. 78.

Sitzungsberichte der mathem.-physikal. Cl. der k. bayer. Akad. d. Wiss. zu München. 1877, Heft 2. 3. 1878, Heft 1—3. München 1877. 78.

Neunzehnte Plenar-Versammlung der histor. Commission bei der k. bayer. Akad. d. Wiss. Bericht des Secretariats. München im Oct. 1878.

Meteorologische und magnetische Beobachtungen der k. Sternwarte bei München. Jahrg. 1877. München 1877.

Orff, C. von, Bestimmung der geograph. Breite der Sternwarte bei München nach der Talcott'schen Methode. Beilage zu Bd. 21 der Annalen der königl. Sternwarte. München 1877.

Abhandlungen der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Bd. 22, v. J. 1877. Göttingen 1877.

Nachrichten von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften und der Georg-Augusts-Universität aus d. J. 1877. Göttingen 1877.

Neues Lausitzisches Magazin. Herausgeg. von Prof. Dr. Schönwälder. Bd. 53, Heft 2. Görlitz 1877.

Leopoldina, amtliches Organ der kais.-leopoldinisch-carolinisch-deutschen Akademie der Naturforscher. Heft XIII, Nr. 21. 22. Heft XIV, Nr. 1—8. Dresden 1877. 78.

Sitzungsberichte der naturforschenden Gesellschaft zu Leipzig. Jahrg. 1877, Nr. 2—10. Leipzig 1877.

Zeitschrift des k. sächsischen statistischen Bureaus. Jahrg. XXIII. 1877, Heft 3 u. 4. Dresden 1878.

Vierteljahrsschrift der astronom. Gesellschaft. Jahrg. XII, Heft 4. Leipzig 1877. Jahrg. XIII, Heft 1. 2. Leipzig 1878.

Kgl. Sächs. Polytechnicum zu Dresden. Programm für das Studienjahr, beziehungsweise Wintersemester 1878/79.

Zeitschrift f. d. gesammten Naturwissenschaften, redig. von C. G. Giebel. Dritte Folge. Bd. 1. 1877. Berlin 1878.

Die Fortschritte der Physik im J. 1873, dargestellt von der physikal. Gesellsch. in Berlin. Jahrg. XXIX, Abth. 1. 2. Berlin 1877. 78.

Berichte der deutschen chemischen Gesellschaft zu Berlin. XI. Jahrg. (1878), Nr. 1—15. Berlin 1878.

Conze, Alex., Theseus und Minotaurus. XXXVIII. Programm z. Winckelmannsfeste der archäologischen Gesellschaft zu Berlin. Berlin 1878.

Bericht über die im J. 1876. 1877 den Herzogl. Sammlungen des Schlosses Friedenstein zugegangenen Geschenke. Gotha 1877. 78.

Fünfundfünfzigster Jahresbericht der Schlesischen Gesellschaft für vaterländische Cultur. Enthält den Generalbericht über die Arbeiten und Veränderungen der Gesellschaft im J. 1877. Breslau 1878.

Fortsetzung des Verzeichnisses der in den Schriften der Schles. Gesellsch. f. vaterländ. Cultur von 1864—76 incl. enthaltenen Aufsätze. Breslau, ohne Jahrz.

Abhandlungen der naturforschenden Gesellschaft zu Halle. Bd. 13, Heft 4. Halle 1877.

Bericht über die Sitzungen der naturforschenden Gesellschaft zu Halle. Jahrg. 1876. Halle 1877.

Mittheilungen des Vereins für Erdkunde zu Halle. 1877. Halle 1877.

Schriften der Universität zu Kiel aus d. J. 1877. Bd. XXIV. Kiel 1878.

Jahresbericht der Commission zur wissenschaftlichen Untersuchung der deutschen Meere in Kiel, für die Jahre 1874. 75. 76 (Jahrg. 4. 5. 6). Berlin 1878.

Ergebnisse der Beobachtungsstationen an den deutschen Küsten über die physikalischen Eigenschaften der Ostsee u. Nordsee u. die Fischerei. Jahrg. 1873, Heft 1—12. 1874, Heft 1—12 u. Schlussheft. 1875, Heft 1—12. 1876, Heft 1—12. 1877, Einleitungsheft. Heft 1—12 u. Schlussheft. Jahrg. 1878, Heft 1. Berlin 1874—78.

Schriften der physikalisch-öconomischen Gesellschaft in Königsberg. Jahrg. 17 (1876), Abth. 1. 2. Jahrg. 18 (1877), Abth. 1. Königsberg 1876. 77.

Jahresbericht des physikal. Vereins zu Frankfurt a. M. für das Rechnungsjahr 1876—1877. Frankfurt, im Mai 1878.

Jahrbücher des Nassauischen Vereins für Naturkunde. Jahrg. 29. 30. Wiesbaden 1876—77.

Abhandlungen der naturhistorischen Gesellschaft zu Nürnberg. Bd. 6. Nürnberg 1877.

Anzeiger für Kunde der deutschen Vorzeit. Organ des Germanischen Museums. N. F. Jahrg. 24 (1877), No. 8. August.

Verhandlungen der physikal.-medicin. Gesellsch. in Würzburg. Neue Folge. Bd. XI, Heft 3 u. 4. Würzburg 1877. Bd. XII, Heft 1—4. Würzburg 1878.

Verhandlungen des naturhistor.-medicin. Vereins zu Heidelberg. Neue Folge. Bd. II, Heft 2. Heidelberg 1878.

17. Bericht der Oberhessischen Gesellschaft für Natur- und Heilkunde. Giessen 1878.

15. u. 16. Bericht über die Thätigkeit des Offenbacher Vereins für Naturkunde. Vereinsjahr 1873—75. Offenbach 1876.

Korrespondenzblatt des Vereins für Kunst und Alterthum in Ulm und Oberschwaben. Zweiter Jahrg. (1877), Nr. 3—12.

Mittheilungen der historischen und antiquarischen Gesellschaft zu Basel. N. F. 1. (Bernoulli, A., Die Deckengemälde in der Krypta des Münsters zu Basel.) Basel 1878.

Verhandlungen der Schweizerischen naturforschenden Gesellschaft. Theil 6, Heft 3. 4. Basel 1878.

Vierteljahrsschrift der naturforschenden Gesellschaft in Zürich. Jahrg. 21, Heft 1—4. Jahrg. 22, Heft 1—4. Zürich 1876. 77.

Jahresbericht der naturforschenden Gesellschaft Graubündens. Neue F. Jahrg. 20 (Vereinsjahr 1875—76). Chur 1877.

Mémoires de la Société de Physique et d'Histoire naturelle de Genève. Tome XXV, P. 2 Genève 1878. T. XXVI, P. 1. Genève 1877—78.

Verhandelingen d. Kon. Akad. v. Wetenschappen. Afdeel. Letterkunde. Deel 9—11. Amsterdam 1876. 77. Afd. Natuurkunde. Deel 17. Amsterdam 1877.

Verslagen en Mededeelingen der Kon. Akad. v. Wetensch. Afdeel. Letterkunde. 2e Reeks. Deel 5. 6. Amsterdam 1876. 77. Afd. Natuurkunde. 2e Reeks. Deel 11. Amsterdam 1877.

Jaarboek van de Kon. Akad. v. Wetensch. gevestigd te Amsterdam, voor 1876. Amsterdam 1876.

Processen-Verbaal van de gewone Vergaderingen d. Kon. Akad. v. Wetensch. te Amsterdam. Afd. Natuurkunde. Mei 1876—April 1877.

Catalogus van de Boekerij der Kon. Akad. v. Wetensch. gevestigd te Amsterdam. Deel 3, Stuk 1. Amsterdam 1876.

Programma certaminis poetici ab Academia Regia disciplinarum Neerlandica ex legato Hoeufftiano indicti in annum 1878.

Nederlandsch Kruidkundig Archief. Verslagen en Mededeel. d. Nederl. Botanische Vereeniging. Tweede Serie. Deel 2, Stuk 4. Deel 3, Stuk 1. Nijmegen 1877.

Onderzoekingen gedaan in het physiologisch Laboratorium der Utrechtsche Hoogeschool. Uitgeg. door F. C. Donders en Th. W. Engelmann. Derde Reeks. V, Afl. 1. Utrecht 1878.

Questions mises au concours par la Société des arts et des sciences établie à Utrecht. 1877.

Verhandelingen rakende den natuurlijken en geopenbaarden Godsdienst, uitgeg. door Teylers Godgeleerd Genootschap. Nieuwe Serie. Deel 6. Haarlem 1878.

Natuurkundige Verhandelingen van de Hollandsche Maatschappij der wetenschappen, te Haarlem. 3. Verzameling. Deel II, No. 6 (Bleeker, Mémoire sur les chromides marins etc.). Haarlem 1877.

Archives Néerlandaises des sciences exactes et naturelles, publiées par la Société Hollandaise des sciences à Harlem. T. XII, Livr. 2—5. T. XIII. Livr. 1—3. Harlem 1877. 1878.

Programme de la Société Hollandaise des sciences, à Harlem. Année 1878.

Annuaire de l'Observatoire Royal de Bruxelles. Année 44 (1877). Bruxelles 1877.

Annales de l'Observatoire Royal de Bruxelles. Tome 23. 24. 25. Bruxelles 1874—77.

Annales de l'Académie d'archéologie de Belgique. Tome 21—30 (2. Sér., T. 1—9). Anvers 1865—74.

Annales de la Société géologique de Belgique. Tome 2 (1874—75). 3 (1875—76). Liège 1875. 1876.

Société entomologique de Belgique. Comptes-rendus. Série II. No. 45—49. 51. 52. 54—57. 1877. 1878.

Bullettino dell' Instituto di corrispondenza archeologica per l'anno 1877, No. 12 (und Elenco de' participanti alla fine dell' anno 1877). 1878, No. 1—11. Roma 1878.

Atti della R. Accademia dei Lincei. Anno CCLXXIV (1876—77). Serie III. Memorie della classe di scienze fisiche, matem. e naturali, Vol. I, Disp. 1. 2. Roma 1877. — Memorie della classe di scienze morali, storiche e filologiche, Vol. I. Roma 1877. — Transunti Vol. II, Fasc. 1—7. Roma 1878.

Atti del R. Istituto Veneto &c. Serie V. Tomo III, Disp. 8—10. Venezia 1876—77. Tomo IV, Disp. 1—9. Venezia 1877—78.

Temi di premio proposti dal R. Istituto Veneto di scienze, lettere ed arti nella solenne adunanza del 15. agosto 1878.

Memorie del R. Istituto Lombardo di scienze e lettere. Cl. di scienze matematiche e naturali. Vol. XIV. (Serie III, Vol. V), Fasc. 1. Milano 1878.

R. Istituto Lombardo di scienze e lettere. Rendiconti. Serie II. Vol. X. Milano 1877.

Annuario dell' Accademia R. delle scienze di Torino per l'anno 1877—78. Anno I. Torino 1877.

Atti della R. Accademia delle scienze di Torino. Vol. XIII (1877—78), Disp. 1—8. Torino 1877 f.

Memorie della R. Accademia delle scienze di Torino. Serie II. Tomo 29. Torino 1878.

Bollettino meteorologico ed astronomico del Reg. Osservatorio della Reg. Università di Torino. Anno XII (1877). Torino 1878.

Bullettino della Società di scienze naturali ed economiche di Palermo. No. 4. 7. 8. 1878.

Giornale di scienze naturali ed economiche, pubbl. p. cura della Società di scienze naturali ed econom. di Palermo. Anno 1876—77. Vol. 12. Palermo 1877.

Atti della Società Toscana di scienze naturali residente in Pisa. Vol. III, Fasc. 2. Pisa 1878.

Processi verbali della Società Toscana di scienze naturali. Adunanza del 18. nov. 1877, 13. genn., 7. luglio, 10. nov. 1878.

Pubblicazioni del R. Istituto di studi superiori pratici e di perfezionamento in Firenze. Sezione di filosofia e filologia. Vol. I. II, Disp. 1—5. Firenze 1875—77. — Sezione di filos. e filol. Accademia orientale. Fasc. 1. Firenze 1877. — Sezione di filos. e filol. Repertorio sinico-giapponese. Fasc. 1. 2. Firenze 1875. 77. — Sezione di medicina e chirurgia e scuola di farmacia. Vol. I. Firenze 1876. — Sezione di scienze fisiche e naturali. Vol. I. Firenze 1877. Opere pubblicate dai Professori della Sez. di scienze fis. e nat. o. O. u. J. Cavanna, G., Studi e ricerche sui pignogonidi. P. 1. Anatomia e biologia. Firenze 1877.

Philosophical Transactions of the R. Society of London. Vol. 166, P. II. (1876.) London 1877. Vol. 167, P. I. (1877.) London 1877.

Proceedings of the R. Society of London. Vol. XXV. No. 175—178. Vol. XXVI. No. 179—183. London 1876. 1877.

Catalogue of scientific papers. 1864—1873. Vol. 7. London 1877.

Proceedings of the R. Institution of Great Britain. Vol. VIII, P. III. No. 66. P. IV. No. 67. London 1877. 78. — List of the members, 1877, with the report of the visitors, in 1876. o. O. u. J.

Astronomical Observations made at the R. Observatory of Edinburgh. Vol. 14, for the years 1870—77. Edinburgh 1877.

Proceedings of the literary and philosophical Society of Liverpool during the 66th session, 1876—77. No. 31. London and Liverpool 1877.

Journal of the R. geological Society of Ireland. New Series. Vol. 4, Part 3. 4. London, Dublin, Edinburgh 1877.

Mémoires de l'Académie des sciences, belles-lettres et arts de Lyon. Classe des lettres. Tome 17. Paris et Lyon 1876—77.

Société de géographie commerciale de Bordeaux. Bulletin. 2. Sér. No. 2. Bordeaux 1878.

Mémoires de la Société des sciences physiques et naturelles de Bordeaux. 2. Sér. T. II, Cahier 2. 3. Paris et Bordeaux 1878.

Mémoires de la Société Nationale des sciences naturelles de Cherbourg. T. 20 (2. Sér. T. 10). Paris, Cherbourg 1876—77.

Annales de la Société Linnéenne de Lyon. Année 1876. (Nouv. Sér.) Tome 23. Lyon, Paris 1877.

Académie des sciences et lettres de Montpellier. Mémoires de la section des sciences. Tome VIII, Fasc. 4 (Année 1875). Tome IX, Fasc. 1 (Année 1876). Montpellier 1876. 77. — Mémoires de la section de médecine. Tome V, Fasc. 1 (Années 1872—76). Montpellier 1877. — Mémoires de la section des lettres. Tome VI, Fasc. 2 (Année 1876). Montpellier 1877.

Comité international des poids et mesures. Procès-verbaux des séances de 1877. Paris 1878.

Anales del Instituto y Observatorio de marina de San Fernando. Seccion II. Observaciones meteorológicas. Año 1875. 1876. San Fernando 1877.

Oversigt over det Kong. Danske Videnskabernes Selskabs Forhandlinger og dets Medlemmers Arbejder i Aaret 1876, No. 3. 1877, No. 2. 3. Kjøbenhavn.

Det kong. Danske Vidensk. Selskabs Skrifter. 5. Række. Histor. og philos. Afd. Bd. 5, No. 1. 2. Kjøbenhavn 1876.

Astronomiska Jakttagelser och Undersökningar anstälda på Stockholms Observatorium. Bd. 1, Häftet 3. Stockholm 1877.

Wærn, C. Fr., Minnesteckning öfver Aug. Ehrensvärd. Föredragen på Kongl. Vetenskaps-Akademiens Högtidsdag d. 31. Mars 1876. Stockholm 1876.

Acta Universitatis Lundensis. Lunds Universitets Års-Skrift. Tom. IX. 1874. Theologi, Philosophi, Språkvetenskap och Historia. Lund 1874—75.

Mémoires de l'Académie Impériale des sciences de St.-Pétersbourg. VII[e] Série. T. XXIV, No. 4—11. T. XXV, No. 1—4. St.-Pétersbourg 1877.

Bulletin de l'Acad. Impér. des sciences de St.-Pétersbourg. T. XXIV, No. 4. T. XXV, No. 1. 2. St.-Pétersbourg 1878.

Compte-rendu de la Commission Impériale Archéologique pour l'année 1875 (mit dem dazu gehörigen Atlas). St. Pétersbourg 1878.

Acta horti Petropolitani. Tom. V, Fasc. 1. St. Petersburg 1877.

Annalen d. physikalischen Centralobservatoriums, herausgeg. von H. Wild. Jahrg. 1876. St. Petersburg 1877.

Bulletin de la Société Impér. des Naturalistes de Moscou. Année 1877. No. 3. Moscou 1877.

Observations de Pulkova publiées par O. Struve. Vol. IX. St.-Pétersbourg 1878.

Izvěstija i učenyja zapiski Imper. Kazanskago Universiteta. God 43 (1876), No. 1—6. 44 (1877), No 1—6. Kazan 1876. 77.

Meteorologische Beobachtungen angestellt in Dorpat im J. 1876, redigirt und bearbeitet von Karl Weihrauch. Jahrgang XI. Bd. 3, Heft 1. Dorpat 1878.

Correspondenzblatt des Naturforscher-Vereins zu Riga. Jahrg. 22. Riga 1877.

Proceedings of the American Philosophical Society, held at Philadelphia, for promoting useful knowledge. Vol. XVII, June—Dec. 1877 (No. 100). Vol. XVII. Jan.—June 1878 (No. 101).

Proceedings of the 9[th] annual session of the American Philological Association, held in Baltimore, MD., July 1877. Hartford 1877.

Proceedings of the American Oriental Society, Nov. 1876, May and Oct. 1877, May 1878. Boston.

Departement of the interior. United States geologic. and geograph. survey of the territories. Miscellaneous Publications No. 7. 9. 10. Washington 1877. 1878.

Preliminary report of the field work of the U. S. geological and geographical survey of the territories for the season of 1877. Washington 1877.

Einunddreissigster Jahresbericht der Staats-Ackerbaubehörde von Ohio. Columbus, Ohio, 1877.

Memoirs of the Boston Society of Natural History. Vol. II, P. IV, No. 6. Boston 1878.

Proceedings of the Boston Society of Natural History. Vol. XIX, Part 1. 2. Boston 1877.

Proceedings of the American Academy of Arts and Sciences. New Series. Vol. V (Whole Series Vol. XIII), Part 1—3. Boston 1878.

Bulletin of the Museum of comparative Zoölogy, at Harvard College, Cambridge, Mass. Vol. IV. V, Nr. 1—7. Cambridge 1878.

Memoirs of the Museum of comparative Zoölogy, at Harvard College, Cambridge, Mass. Vol. V, Nr. 2. VI, No. 2. Cambridge 1877. 78.

Annual Report of the Curator of the Museum of comparative Zoölogy at Harvard College in Cambridge for 1877—78. Cambr. 1878.

Transactions of the Wisconsin Academy of sciences, arts, and letters. Vol. 3 (1875—76). Madison Wisc. 1876.

The Transactions of the Academy of science of St. Louis. Vol. 3, No. 4. St. Louis 1878.

Transactions of the Connecticut Academy of arts and sciences. Vol. 3, Part 2. Vol. 4, Part 1. New Haven 1877. 78.

Journal of the American geographical and statistical Society. Vol. 2, Part 1. 2. New York 1860. 1870.

Journal of the American geographical Society of New York. Vol. 3 (1872). 4 (1873). 5 (1874). 6 (1875). New York 1873—76.

Proceedings of the Academy of natural sciences. Part 1—3. Philadelphia 1877.

Catalogue of the American philosophical Society Library. Part III. Class VI. Sociology etc. Philadelphia 1878.

Report of the United States geological and geographical survey of the Territories. Vol. VII. Washington 1878.

Bulletin of the United States geological and geographical survey of the Territories. Vol. IV, Nr. 1—3. Washington 1878.

First annual Report of the United States entomological Commission for the year 1877. Washington 1878.

Bulletin of the American Geographical Society. Session of 1876—77, No. 4. 5. 1878, No. 1. 2. New York 1877. 1878.

Smithsonian Miscellaneous Collections. 301. List of the publications of the Smithsonian Institution, July 1877. Washington 1877.

Bulletin of the U. S. National Museum. No. 8 (Dall, W. H., Index to the names which have been applied to the subdivisions of the class Brachiopoda etc.). Washington 1877.

Report of the commissioner of agriculture, for the year 1876. Washington 1877.

Anales de la Sociedad cientifica Argentina. Tomo 6, Entrega 1. 4. 5. Buenos Aires 1878.

Verhandelingen van het Bataviaasch Genootschap van kunsten en wetenschappen. Deel 39, Stuk 1. Batavia 1877.

Notulen van de algemeene en bestuurs-vergaderingen van het Bataviaasch Genootschap van kunsten en wetensch. Deel 11 (1873), No. 2. Batavia 1873. Deel 15 (1877), No. 1—4. Batavia 1878.

Tijdschrift voor Indische taal-, land- en volkenkunde, uitgeg. door het Batav. Genootsch. van kunsten en wetensch. Deel 23, Afl. 5. 6. Deel 24, Afl. 1—6. Batavia 1876—78.

Catalogus der ethnologische Afdeeling van het Museum van het Batav. Genootsch. van kunsten en wetensch. 2de Druk. Batavia 1877.

Van den Berg, L. W. C., Verslag van eene Verzameling maleische, arabische, javaansche en andere Handschriften, door de Regeering van Nederlandsch Indie aan het Batav. Genootsch. v. kunsten en wetensch. afgestaan. Batavia 1877.

Codicum arabicorum in Bibliotheca societatis artium et scientiarum quae Bataviae floret asservatorum Catalogum inchoatum a R. Friederich absolvit L. W. C. van den Berg. Bataviae 1873.

2de Vervolg-Catalogus d. Bibliotheek van het Batav. Genootsch. v. kunsten en wetensch. Batavia 1877.

---

## Einzelne Schriften.

Berlanga, M. R. de, Los nuevos Bronzes de Osuna. Malaga 1876.

Boldù, Rob., Ragione e fede nel moto sociale. Firenze 1878.

Clercq, F. S. A. de, Het Maleisch der Molukken. Batavia 1876.

Pavesi, Fr., Hollandia. Carmen praemio Hoeufftiano ornatum. Amstelodami 1876.

Esseiva, Petr., Pastor bonus. Elegia praemio Hoeufftiano ornata. Sequuntur III carmina laudata. Amstelodami 1877.

Bibliothek der mittelhochdeutschen Litteratur in Böhmen, herausg. v. E. Martin. Bd. 2. Der Ackersmann aus Böhmen. Herausg. v. J. Knieschek. Prag 1877.

Willems, P., Le sénat de la république romaine. T. 1. La composition du sénat. Louvain 1878.

Falkenstein, J. P. von, Johann König von Sachsen. Ein Charakterbild. Dresden 1878.

Legrand, La nouvelle Société indo-chinoise fondée par M. le Marquis de Croizier et son ouvrage L'Art Khmer. Paris 1878.

Schmidt, J. F. Jul., Charte der Gebirge des Mondes. Nach eigenen Beobachtungen in den Jahren 1840—1874 entworfen. Herausg. auf Veranlassung und Kosten des K. Preuss. Ministeriums d. geistl., Unterrichts- u. Medicinal-Angelegenheiten. Berlin 1878. Nebst Erläuterungsband. Berlin 1878. — Kurze Erläuterung zu J. Schmidt's Mondcharte in 25 Sectionen. Berlin 1878.

Dall, W. H., Preliminary descriptions of new species of Mollusks, from the N. W. Coast of America. — Note on »Die Gasteropoden-Fauna d. Baikalsees«. — Notes on some Aleut Mummies. — On the Californian species of Fusus. — On a provisional hypothesis of saltatory evolution. (Sep.-Abdrücke u. Ausschnitte aus verschiedenen Zeitschriften.)

Glaisher, J. W. L., Numerical values of the first twelve powers of π etc. — On the numerical value of a certain series. — Expansion derived from Lagrange's Series etc. — On long successions of composite numbers. — On expressions for the theta functions as definite integrals. — Preliminary account of an enumeration of the primes in Burckhardt's tables and Dase's tables. — On the solution of Kepler's problem. — Théorème d'arithmétique sur la somme des inverses des puissances semblables des nombres premiers. — An approximate numerical theorem involving e and π. (Sep.-Abdrücke u. Ausschnitte aus verschiedenen Zeitschriften.)

Münster-Blätter. Im Auftr. des Münster-Comités hrsg. von Frdr. Pressel. Heft 1. Ulm 1878.

Pertsch, Wilh., Die arab. Handschriften der herzogl. Bibliothek zu Gotha. Bd. 1, Heft 1. 2. Gotha 1877. 78.

Ἀναγραφὴ τῶν ἐπὶ τὸ ἀκαδ. ἔτος 1877/78 ἀρχῶν τοῦ ἐν Ἀθήναις Ἐθνικοῦ Πανεπιστημίου. Ἐν Ἀθήναις 1877.

Wormstall, Jos., Hesperien. Zur Lösung des religiös-geschichtlichen Problems der alten Welt. Trier 1878.

Buchner, Otto, Ueber den Meteorstein von Hungen u. über Meteoriten im Allgemeinen. o. O. u. J.

Krones, F., Zur Geschichte des deutschen Volksthums im Karpatenlande mit besonderer Rücksicht auf die Zips u. ihr Nachbargebiet. Festschrift der k. k. Universität Graz. Graz 1878.

Listing, J. B., Neue geometrische und dynamische Constanten des Erdkörpers. Aus den Nachrichten der k. Gesellschaft d. Wiss. Göttingen 1878.

Linnaeana, in Nederland aanwezig. Tentoongesteld op 10. Jan. 1878 in het Koninkl. zoolog. Genootschap »Natura artis magistra« te Amsterdam. Amsterdam 1878.

Aanwijzingen voor Bezoekers van de Tentoonstelling van Linnaeana, in Nederland aanwezig. 10—14. Jan. 1878.

Oudemans, C. A. J. A., Rede ter herdenking van den sterfdag van Car. Linnaeus, eene eeuw na diens verscheiden, op den 10. Jan. 1878. Amsterdam 1878.

Openingsplechtigheid van de Tentoonstelling, 10. Jan., in de Bibliotheek van het Kon. zoolog. Genootsch. »Natura artis magistra«. Amsterdam 1878.

Illustrations of cretaceous and tertiary plants of the Western Territories of the U. S. Washington 1878.

Melsens, De l'application du rhé-électromètre aux paratonnerres des télégraphes. Sep.-Abdruck. o. O. u. J.

Mailly, Ed., Essai sur la vie et les ouvrages de L.-A.-J. Quételet. Bruxelles 1875.

Total Solar Eclipse of 1878, July 29. Notice to intending observers. U. S. Naval Observatory, Washington, 1878.

(Harkness, W.) Instructions for observing the total Solar Eclipse of July 29th, 1878. Issued by the U. S. Naval Observatory. Washington 1878.

Bechler, G. R., Map of the Upper Geyser Basin on the Upper Madison River, Montana Terr.

——, Map of the Lower Geyser Basin on the Upper Madison River.

——, and J. Stevenson, Map of the sources of Snake River.

**C. Neumann,** *Neue Methode zur Reduction gewisser Potentialaufgaben.* *)

Die Aufgabe, eine Function $\Phi = \Phi(x, y)$ zu finden, welche innerhalb einer gegebenen Fläche $\mathfrak{Z}$ den bekannten Potentialbedingungen:

$$\text{(1.)}\qquad \begin{aligned} &\Phi,\ \frac{\partial \Phi}{\partial x},\ \frac{\partial \Phi}{\partial y} = \text{eindeutig und stetig,} \\ &\Delta \Phi = 0 \end{aligned}$$

entspricht, und welche gleichzeitig am Rande jener Fläche vorgeschriebene Werthe besitzt, — kann bekanntlich reducirt werden auf die Ermittelung der *Green'schen Function*.

Ich werde im Folgenden zeigen, dass die genannte Aufgabe noch in *anderer* Weise sich reduciren lässt; wobei allerdings von vornherein zu bemerken, dass diese *neue* Methode gegenüber der *Green*'schen keine wesentlichen Vortheile darbietet.

## § 1.

### Ueber ein scheinbares Paradoxon.

Es sei $\sigma(\alpha, \beta)$ ein *fester* Punct am Rande einer gegebenen *Kreisfläche*, ferner $i(x, y)$ ein *variabler* Punct im Innern der Fläche; ferner sei $E = \sqrt{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2}$, und

$$\text{(2.)}\qquad T = \log\left(\frac{1}{E}\right);$$

endlich sei:

$$\text{(3.)}\qquad U = \frac{\partial T}{\partial \nu} = -\frac{1}{E}\frac{\partial E}{\partial \nu} = \frac{\cos \vartheta}{E},$$

wo $\nu$ die *innere* Normale des Kreisrandes im Puncte $\sigma$, und $\vartheta$ denjenigen Winkel bezeichnet, unter welchem $\nu$ gegen die Linie $E(\sigma \to i)$ geneigt ist.

---

*) Vorgetragen und zum Druck übergeben in der Sitzung am 11. März 1878.

Lässt man $i$ nach einer beliebigen Stelle $s$ des Kreisrandes rücken, und markirt man gleichzeitig den zu $\sigma$ diametral gegenüberliegenden Punct $\delta$, so bilden $s, \sigma, \delta$ ein rechtwinkliges Dreieck, in welchem $\vartheta$ durch den Winkel $s\sigma\delta$ dargestellt ist. Somit folgt:

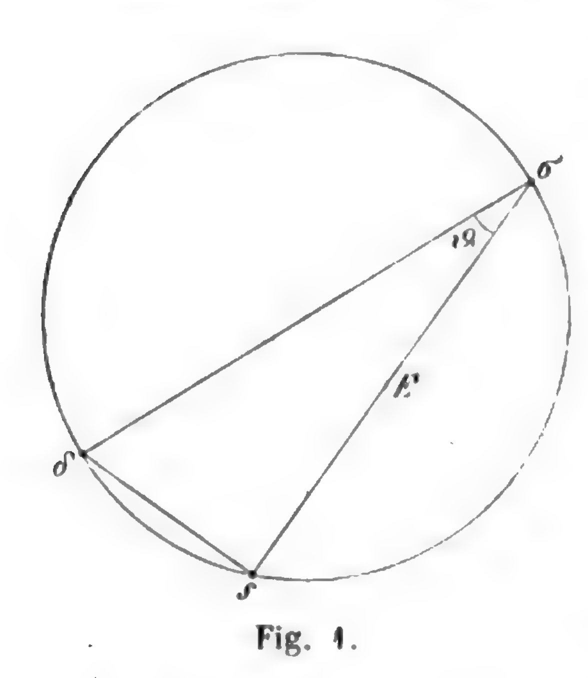


Fig. 1.

$$(\sigma s) = (\sigma\delta) \cos\vartheta,$$

oder was dasselbe:

$$E = C \cos\vartheta,$$

wo $C$ den Durchmesser des Kreises bezeichnet. Substituirt man aber den hieraus für $\frac{\cos\vartheta}{E}$ entspringenden Werth $\frac{1}{C}$ in (3.), so folgt:

$$\overline{U} = \frac{1}{C}. \tag{4.}$$

Dies ist also der *Randwerth* [1]) der Function $U$, d. i. derjenige Werth, den diese Function annimmt, sobald der variable Punct $i(x, y)$ nach irgend einer Stelle $s$ des Randes rückt.

Demgemäss ist $U$ eine Function, welche [wie aus (2.), (3.) ersichtlich] innerhalb der Kreisfläche den Potentialbedingungen (1.) entspricht, und welche gleichzeitig [wie aus (4.) ersichtlich] am Rande dieser Fläche den *constanten* Werth $\frac{1}{C}$ besitzt. Hieraus aber folgt nach bekanntem Satz [2]), dass $U$ auf der Kreisfläche *allenthalben* constant, also allenthalben $= \frac{1}{C}$ ist.

Dieses Resultat ist, wie ein Blick auf die Function $U$ (3.) zeigt, **vollkommen absurd**; und der innere Grund dieser Absurdität liegt in der Unrichtigkeit oder wenigstens nur bedingten Richtigkeit der Formel (4.).

---

1) Um diesen Werth $U$ als *Randwerth* kenntlich zu machen, ist das $U$ mit einem *horizontalen Strich* versehen worden.

2) Vgl. z. B. meine »*Untersuchungen über das Logarithmische und Newton'sche Potential*« (Leipzig, bei Teubner, 1877) Seite 41, Nr. 30.

In der That ist die Formel (4.) durch die angestellten Betrachtungen nur für *solche* Randpuncte $s$ constatirt, welche vom festen Puncte $\sigma$ durch irgend welche (wenn auch noch so kleine) Zwischenräume getrennt sind, während das Verhalten der Function $U$ in $\sigma$ selber noch einer nähern Untersuchung bedarf. Zu diesem Zwecke construire man [vgl. die beistehende Figur, in welcher $\sigma\delta$ den Durchmesser des *gegebenen* Kreises vorstellt] irgend einen Hülfskreis, der den gegebenen Kreis in $\sigma$ berührt. Lässt man nun den Punct $i$ längs dieses Hülfskreises $\tau i \sigma$ sich fortbewegen, so folgt aus (3.):

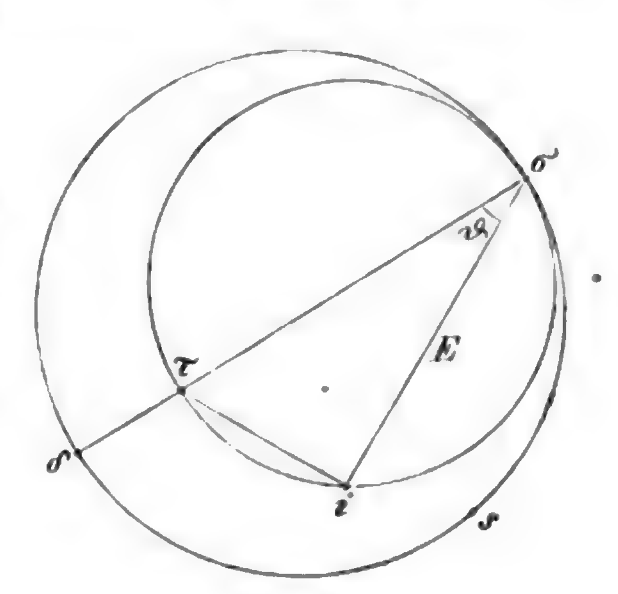



Fig. 2.

$$U = \frac{\cos\vartheta}{E} = \frac{1}{(\sigma\tau)},$$

d. i.

$$U = \frac{1}{D},$$

falls nämlich $D$ den Durchmesser des Hülfskreises bezeichnet. Somit wird also $U$ den *constanten* Werth $\frac{1}{D}$ besitzen, und mit diesem constanten Werth in $\sigma$ eintreffen, sobald man den variablen Punct $i$ längs des Hülfskreises weiter und weiter fortwandern und schliesslich nach $\sigma$ gelangen lässt. Solcher Hülfskreise, die innerhalb des gegebenen Kreises liegen, und den letztern im Puncte $\sigma$ berühren, giebt es offenbar unendlich viele; und jeder dieser Hülfskreise liefert für die Function $U$ im Puncte $\sigma$ einen *andern* Werth, nämlich einen Werth, welcher gleich ist dem reciproken Werth seines Durchmessers. Die Durchmesser jener Hülfskreise variiren aber zwischen $C$ und $0$. *Folglich wird die Function U im Puncte σ, je nach dem* ***Wege****, auf welchem man i nach σ rücken lässt, alle möglichen Werthe zwischen* $\frac{1}{C}$ *und* $\infty$ *annehmen können.*

## § 2.

### Ueber die im Vorhergehenden betrachtete Function $U$, welche für die weiter folgende Untersuchung von Wichtigkeit ist.

Um anzudeuten, dass die Functionen $T$, $U$, (2.), (3.) auf die Puncte $i, \sigma$ sich beziehen, wird es angemessen sein, die betreffenden Indices beizufügen, also zu schreiben:

$$(5.)\qquad U_\sigma^i = \frac{\partial T_\sigma^i}{\partial \nu},$$

oder, falls $i$ nach $s$ rückt:

$$(6.)\qquad U_\sigma^s = \frac{\partial T_\sigma^s}{\partial \nu}.$$

Wir wollen nun gegenwärtig statt der Kreisfläche eine **beliebig gegebene Fläche** $\mathfrak{Z}$ unserer Betrachtung zu Grunde legen, mithin unter $\sigma$ und $s$ irgend zwei Puncte am Rande dieser Fläche, ferner unter $\nu$ die in $\sigma$ errichtete *innere* Normale des Randes verstehen. Und zwar wollen wir unsere Aufmerksamkeit richten auf diejenigen Werthe, welche die Function (6.) durchläuft, wenn man $\sigma$ festhält, und $s$ variiren lässt, oder umgekehrt $s$ festhält, und $\sigma$ sich ändern lässt. Dabei mag der jedesmal *festgehaltene* Punct durch Einklammerung ( ) kenntlich gemacht werden.

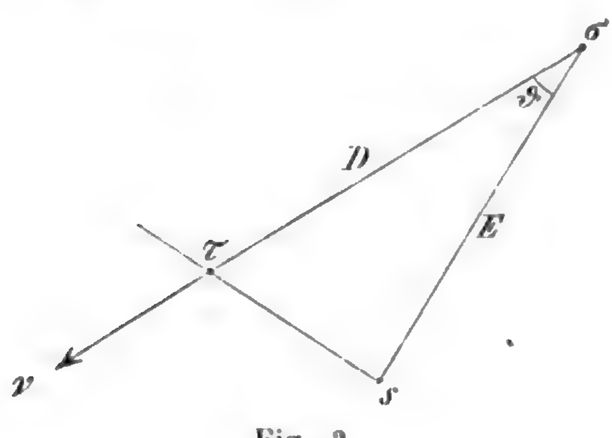


Fig. 3.

Offenbar ist [vgl. (3.)]:

$$(7.)\qquad U_\sigma^s = \frac{\cos\vartheta}{E} = \frac{1}{D},$$

wo $\vartheta$, $E$, $D$ die aus der nebenstehenden Figur ersichtlichen Bedeutungen haben. Sind also $s, \sigma, \nu$ gegeben, so hat man, um den zugehörigen Werth der Function (7.) zu finden, auf der Linie $\sigma s$ im Puncte $s$ ein Perpendikel zu errichten, und den Schnittpunct $\tau$ dieses Perpendikels mit der Normale $\nu$ zu markiren; das so erhaltene Segment $(\sigma\tau) = D$ repräsentirt alsdann den reciproken Werth der Function. Oder kürzer ausgedrückt: Man hat einen die Randcurve in $\sigma$ berührenden und durch $s$ gehenden Hülfskreis zu construiren;

der Durchmesser dieses Kreises ist alsdann der reciproke Werth der Function. — Hieraus ergiebt sich, was die Werthe $U_{(\sigma)}^{s}$ betrifft, die Regel:

(8.) *Man bringe mit der gegebenen Randcurve im festen Puncte σ einen Kreis in Berührung, und lasse die Grösse dieses Kreises in solcher Weise variiren, dass derselbe jederzeit hindurchgeht durch den in Bewegung begriffenen Punct s. Alsdann wird der dem Puncte s entsprechende Werth von*

$$U_{(\sigma)}^{s}$$

*in jedem Augenblick dargestellt sein durch den reciproken Durchmesser jenes Kreises.*

Kommt $s$ dem festen Punct $\sigma$ unendlich nahe, so geht offenbar der genannte Kreis über in den *Krümmungskreis* der Randcurve. Folglich ist $U_{(\sigma)}^{\sigma}$ gleich dem reciproken Durchmesser des Krümmungskreises jener Curve im Puncte $\sigma$. Auch erkennt man sofort, dass die Werthe der Function $U_{(\sigma)}^{s}$ bei fortschreitendem $s$ durchweg *stetig* aufeinander folgen, falls nur jene Curve allenthalben von *stetiger Krümmung* ist.

Was andrerseits die Function $U_{\sigma}^{(s)}$ betrifft, so gelangt man zu folgender ebenfalls sehr einfachen Regel:

(9.) *Man lasse auf der gegebenen Randcurve einen Kreis von veränderlicher Grösse fortrollen, dessen Peripherie fortwährend durch den festen Punct s geht. Alsdann wird der Werth von*

$$U_{\sigma}^{(s)}$$

*für den augenblicklichen Berührungspunct σ stets ebensogross sein, wie der augenblickliche reciproke Durchmesser jenes Kreises.*

Rückt $\sigma$ an den festen Punct $s$ unendlich nahe heran, so verwandelt sich dieser Kreis in den *Krümmungskreis* der Randcurve. Folglich ist $U_{s}^{(s)}$ identisch mit dem reciproken Durchmesser des Krümmungskreises jener Curve im Puncte $s$. Auch übersicht man leicht, dass sämmtliche Werthe der Function $U_{\sigma}^{(s)}$ *stetig* aufeinander folgen, falls nur jene Curve überall von *stetiger Krümmung* ist.

## § 3.

### Darlegung der neuen Methode für eine Fläche $\mathfrak{J}$, deren Randcurve $\sigma$ überall von stetiger Krümmung ist.

Es sei $i(x, y)$ ein variabler Punct im Innern der gegebenen Fläche $\mathfrak{J}$; und es handele sich um die Ermittelung einer von diesem Punct abhängenden Function

(10.) $\Phi_i$, *welche auf der Fläche* $\mathfrak{J}$ *den Potentialbedingungen* (1.) *entspricht, und ausserdem am Rande der Fläche* ***vorgeschriebene*** *Werthe besitzt. Diese vorgeschriebenen Werthe seien bezeichnet mit* $f$.

Wir betrachten die *innere* Seite der gegebenen Randcurve $\sigma$ als die *positive*, breiten auf $\sigma$ eine Doppelbelegung aus vom Momente $\frac{f}{\pi}$, und bezeichnen das Potential dieser Belegung auf irgend einen innern Punct $i$ oder auf irgend einen Randpunct $s$ mit $W_i$ resp. $W_s$. Alsdann ist:

$$W_i = \frac{1}{\pi}\int U_\sigma^i f_\sigma \, d\sigma, \tag{11.}$$

$$W_s = \frac{1}{\pi}\int U_\sigma^s f_\sigma \, d\sigma, \tag{12.}$$

wo $d\sigma$ ein Element der gegebenen Randcurve vorstellt, $f_\sigma$ den in $d\sigma$ vorhandenen Werth von $f$ bezeichnet, und $U_\sigma^i$, $U_\sigma^s$ die Functionen (5.), (6.) repräsentiren. Ferner ist alsdann:

$$W_{is} = W_s + f_s, \tag{13.}$$

falls nämlich $W_{is}$ den Werth von $W$ in einem Puncte $i$ vorstellt, der dem Randpuncte $s$ *unendlich nahe* liegt[1]).

Solches vorangeschickt, machen wir für die unbekannte Function $\Phi_i$ folgenden Ansatz:

$$\Phi_i = W_i - \frac{1}{\pi}\int H_\sigma^i f_\sigma \, d\sigma, \tag{14.}$$

wo $\sigma$ den Ort des Elementes $d\sigma$ bezeichnet, und $H_\sigma^i$ eine noch disponible *stetige* Function der beiden Puncte $\sigma$, $i$ vorstellen soll. Alsdann ergiebt sich, falls man $i$ nach irgend welcher Randstelle $s$ wandern lässt:

---

1) Näheres über die Formeln (11.), (12.), (13.) findet man in dem citirten Werke Seite 139; wobei, was die Formel (13.) betrifft, zu beachten ist, dass im gegenwärtigen Fall die Grösse $u_s$ durchweg $= 0$ ist, weil die gegebene Randcurve nach unserer Voraussetzung von überall *stetiger Krümmung* sein soll.

(15.) $$\Phi_s = W_{is} - \frac{1}{\pi}\int H_\sigma^s f_\sigma \, d\sigma,$$

d. i. nach (13.):

(16.) $$\Phi_s = f_s + W_s - \frac{1}{\pi}\int H_\sigma^s f_\sigma \, d\sigma,$$

oder, mit Rücksicht auf (12.):

(17.) $$\Phi_s = f_s + \frac{1}{\pi}\int (U_\sigma^s - H_\sigma^s) f_\sigma \, d\sigma.$$

Aus (14.) folgt, dass $\Phi$ den auferlegten Potentialbedingungen genügt, sobald man $H$ (d. i. $H_\sigma^i$) denselben entsprechen lässt. Und aus (17.) folgt, dass $\Phi$ die vorgeschriebenen Randwerthe besitzt, sobald man $H$ der Bedingung unterwirft:

(18.) $$H_\sigma^s = U_\sigma^s.$$

Somit gelangen wir zu folgendem Resultat:

*Gelingt es für jeden gegebenen Randpunct* ($\sigma$) *eine von dem variablen Punct* $i$ ($x, y$) *abhängende Function* $H_{(\sigma)}^i$ *zu finden, welche auf* $\mathfrak{J}$ *den Potentialbedingungen* (1.) *entspricht, und welche gleichzeitig am Rande von* $\mathfrak{J}$ *die in* (8.) *besprochenen* **stetigen** *Werthe* $U_{(\sigma)}^s$ *besitzt, also der Bedingung entspricht:*

(19.) $$H_{(\sigma)}^s = U_{(\sigma)}^s,$$

*so wird die Lösung des Problemes* (10.) *dargestellt sein durch die Formel* (14.):

(20.) $$\Phi_i = W_i - \frac{1}{\pi}\int H_\sigma^i f_\sigma \, d\sigma;$$

*eine Formel, welche mit Rücksicht auf* (11.) *auch so geschrieben werden kann:*

(21.) $$\Phi_i = \frac{1}{\pi}\int (U_\sigma^i - H_\sigma^i) f_\sigma \, d\sigma,$$

*wo* $U_\sigma^i$ *die Function* (5.) *bezeichnet.*

*Beispiel.* Ist $\mathfrak{J}$ eine Kreisfläche vom Durchmesser $C$, so wird, nach (8.), $U_\sigma^{(s)} = \frac{1}{C}$; so dass also $H_{(\sigma)}^i$ eine Function von $i$ ($x, y$) sein muss, welche auf der gegebenen Kreisfläche den Potentialbedingungen (1.) entspricht, und am Rande den constanten Werth $\frac{1}{C}$ besitzt. Hieraus aber folgt, dass diese Function $H_{(\sigma)}^i$ auf der Kreisfläche *allenthalben* den constanten Werth $\frac{1}{C}$ besitzen muss, und dass also die Lösung (21.) unsers Problems im gegenwärtigen Fall folgende Gestalt gewinnt:

$$(22.) \qquad \Phi_i = \frac{1}{\pi}\int\left(U_\sigma^i - \frac{1}{C}\right) f_\sigma \, d\sigma\,; \ -$$

eine Formel, zu der ich bereits früher (auf anderem Wege) gelangt war[1]).

§ 4.

**Ueber den besondern Fall, dass die am Rande von $\mathfrak{J}$ vorgeschriebenen Werthe $f$ daselbst unstetig sind.**

Um die Hauptsache deutlich hervortreten zu lassen, beschränken wir uns auf einen möglichst einfachen Fall, indem wir annehmen, dass die Randcurve durch zwei gegebene Puncte $g, h$ in zwei Theile $\sigma'$ und $\sigma''$ zerfällt, und dass $f$ auf $\sigma'$ überall *stetig*, andererseits auf $\sigma''$ überall *Null* sei. Alsdann stossen in $g$ von beiden Seiten her zwei verschiedene Werthe $f_g$ und 0 zusammen; ebenso in $h$ zwei Werthe $f_h$ und 0; so dass also $f$ in jenen Stellen $g, h$ mit *Unstetigkeiten* oder (besser ausgedrückt) mit gewissen *endlichen Differenzen* behaftet ist.

In diesem Falle wird, falls wir genau denselben Gang einschlagen wie im vorhergehenden §, die Formel (13.)

$$(23.) \qquad W_{is} = W_s + f_s$$

nur für *solche* Puncte $s$ gelten, welche von $g$ und $h$ verschieden sind, hingegen für die Puncte $g$ und $h$ selber durch folgende Formeln zu ersetzen sein: [2])

$$(24.) \qquad \begin{aligned} W_{ig} &= W_g + f_g\left(1 - \frac{\Delta}{\pi}\right), \\ W_{ih} &= W_h + f_h\left(1 - \frac{\Delta'}{\pi}\right), \end{aligned}$$

wo $\Delta$ und $\Delta'$ die Azimuthe vorstellen, unter denen die unendlich kleinen Linien $gi$ und $hi$ gegen die positive (d. i. innere) Seite der Curve $\sigma'$ geneigt sind. — Demgemäss wird die Formel (16.)

$$(25.) \qquad \Phi_{is} = \Phi_s = f_s + W_s - \frac{1}{\pi}\int H_\sigma^s f_\sigma \, d\sigma$$

im gegenwärtigen Fall ebenfalls nur auf *solche* Puncte $s$ anwendbar sein, welche von $g$ und $h$ verschieden sind, hingegen für $g$ und $h$ selber zu ersetzen sein durch folgende Formeln:

$$(26.) \qquad \begin{aligned} \Phi_{ig} &= f_g\left(1 - \frac{\Delta}{\pi}\right) + W_g - \frac{1}{\pi}\int H_\sigma^g f_\sigma \, d\sigma, \\ \Phi_{ih} &= f_h\left(1 - \frac{\Delta'}{\pi}\right) + W_h - \frac{1}{\pi}\int H_\sigma^h f_\sigma \, d\sigma. \end{aligned}$$

---

1) Vgl. die Math. Annalen, Bd. 3, Seite 336, Formel (26.).

2) Vgl. das citirte Werk Seite 278, Nr. 63.

Disponirt man also über die Function $H$ genau in derselben Weise wie früher, so wird man vermöge der Formel (20.) oder (21.) zu einer Function $\Phi_i$ gelangen, welche auf der gegebenen Fläche $\mathfrak{J}$ den Potentialbedingungen (1.) entspricht, und deren Randwerthe sich darstellen durch die Formeln:

$$
(27.)\qquad
\begin{aligned}
\Phi_{is} &= f_s\,, \\
\Phi_{ig} &= f_g\left(1 - \frac{\Delta}{\pi}\right), \\
\Phi_{ih} &= f_h\left(1 - \frac{\Delta'}{\pi}\right),
\end{aligned}
$$

wo unter den $s$ sämmtliche Randpuncte mit Ausnahme von $g$ und $h$ zu verstehen sind. — Es wird also diese Function $\Phi$ in allen von $g$ und $h$ verschiedenen Puncten $s$ die *vorgeschriebenen* Randwerthe $f$ besitzen, hingegen in jedem der Puncte $g$, $h$ unendlich viele Werthe haben, welche abhängen von dem *Wege*, auf welchem man einem solchen Punct sich nähert. Und zwar wird die Gesammtheit der in $g$ möglichen Werthe zwischen $f_g$ und 0, die Gesammtheit der in $h$ möglichen Werthe zwischen $f_h$ und 0 liegen.

## § 5.

### Die Uebertragbarkeit der angestellten Betrachtungen auf die Theorie des Newton'schen Potentials im Raume.

In meinem mehrfach citirten Werke über das Logarithmische und Newton'sche Potential habe ich (auf Seite 128 in Nr. 19) einen gewissen Satz für *Ebene* und *Raum* ausgesprochen, dessen Gültigkeit ich durch eine spätere Berichtigung (Seite XVI des genannten Werkes) auf den Fall der *Ebene* einschränken zu müssen glaubte. Zu aufrichtigem Danke bin ich Herrn Professor *Beltrami* verpflichtet, der kürzlich durch eine briefliche Mittheilung mich darauf aufmerksam zu machen die Güte hatte, dass jener Satz bei genauerer Untersuchung auch für den *Raum* sich bewahrheite.

Hieran knüpft sich die Aussicht, die in den vorhergehenden §§ angestellten Betrachtungen vielleicht auch auf den *Raum*, d. i. auf die Theorie des Newton'schen Potentials übertragen zu können.

---

**C. Neumann,** *Ueber zwei von Green gegebene Formeln.* *)

Bezeichnet man mit $\sigma$ eine geschlossene Fläche mit der *innern* Normale $\nu$, und bezeichnet man ferner irgend welche Puncte *ausserhalb*, *auf* und *innerhalb* $\sigma$ respective mit $a$, $s$ und $i$, so lauten die in Rede stehenden Formeln folgendermassen:

$$(1.)\qquad \frac{1}{2h\pi}\int\left(\Phi\frac{\partial T^a}{\partial\nu} - T^a\frac{\partial\Phi}{\partial\nu}\right)d\sigma = 0\,,$$

$$(2.)\qquad \frac{1}{2h\pi}\int\left(\Phi\frac{\partial T^i}{\partial\nu} - T^i\frac{\partial\Phi}{\partial\nu}\right)d\sigma = \Phi_i\,.$$

Hier sind $T^a$, $T^i$ die reciproken Entfernungen der Puncte $a$, $i$ vom Elemente $d\sigma$; ferner ist $h = 2$; endlich repräsentirt $\Phi$ das Potential irgend welcher **ausserhalb** $\sigma$ gelegener Massen auf einen variablen Punct, so dass also $\Phi_i$ den Werth dieses Potentials im Puncte $i$ bezeichnet, während das unter dem Integralzeichen enthaltene $\Phi$ den Werth desselben an der Stelle des Elementes $d\sigma$ bezeichnet [1]).

*Wir stellen uns die Aufgabe, denjenigen Werth zu ermitteln, welchen das Integral (1.) oder (2.) besitzt, wenn man daselbst statt des Punctes a oder i einen* ***auf*** *σ gelegenen Punct s erwählt. Dabei mag der Fall mit berücksichtigt werden, dass die gegebene Fläche σ mit Kanten oder Ecken behaftet ist, so dass also der zu wählende Punct s möglicherweise in einer solchen Kante oder Ecke liegt.*

Benutzen wir also den Buchstaben $x$ als Collectivbezeichnung für sämmtliche Puncte $a$, $s$, $i$ und setzen wir:

$$(3.)\qquad U_x = W_x - V_x\,,$$

$$(4.)\qquad V_x = \frac{1}{2h\pi}\int\frac{\partial\Phi}{\partial\nu}T^x\,d\sigma\,,$$

$$(5.)\qquad W_x = \frac{1}{2h\pi}\int\Phi\,\frac{\partial T^x}{\partial\nu}\,d\sigma\,,$$

*) Vorgetragen und zum Druck übergeben in der Sitzung am 11. März 1878.

1) Vgl. das im vorhergehenden Aufsatz citirte Werk, Seite 19. Es wird zweckmässig sein, den Werth $h = 2$ in die obige Formel (2.) *nicht* zu substituiren, um auf solche Weise die Uebertragbarkeit unserer Betrachtungen auf den Fall der *Ebene*, wo $h = 1$ ist, zu erleichtern.

so handelt es sich um den Werth von $U_s$. Aus (3.) folgt:

$$(6.)\qquad \begin{aligned} U_{as} &= W_{as} - V_{as}, \\ U_s &= W_s - V_s, \\ U_{is} &= W_{is} - V_{is}, \end{aligned}$$

wo $as$ einen Punct $a$ bezeichnet, der *unendlich nahe* an $s$ liegt, ebenso $is$ einen Punct $i$, der gleichfalls *unendlich nahe* an $s$ sich befindet. Zufolge (1.), (2.) ist $U_{as} = 0$ und $U_{is} = \Phi_{is}$, d. i. $= \Phi_s$. Ferner ist nach (4.) $V$ das Potential einer auf $\sigma$ ausgebreiteten *einfachen* Belegung, mithin $V_{as} = V_{is} = V_s$. Somit erhalten die Formeln (6.) die einfachere Gestalt:

$$(7.)\qquad \begin{aligned} 0 &= W_{as} - V_s, \\ U_s &= W_s - V_s, \\ \Phi_s &= W_{is} - V_s; \end{aligned}$$

woraus durch Subtraction folgt:

$$(8.)\qquad \begin{aligned} 0 - U_s &= W_{as} - W_s, \\ \Phi_s - U_s &= W_{is} - W_s. \end{aligned}$$

Nun repräsentirt $W$ (5.) das Potential einer auf $\sigma$ ausgebreiteten Doppelbelegung vom Momente

$$(9.)\qquad \mu = \frac{1}{2h\pi}\Phi;$$

und hieraus ergiebt sich nach bekannten Sätzen[1]:

$$(10.)\qquad \begin{aligned} W_{as} - W_s &= \frac{\vartheta_s - h\pi}{2h\pi}\Phi_s, \\ W_{is} - W_s &= \frac{\vartheta_s + h\pi}{2h\pi}\Phi_s, \end{aligned}$$

wo $\vartheta_s$ das supplementare Winkelmaass der Fläche $\sigma$ im Puncte $s$ bezeichnet. Durch Substitution der Werthe (10.) in die *erste* der Formeln (8.) folgt:

$$U_s = \frac{h\pi - \vartheta_s}{2h\pi}\Phi_s = \left(\frac{1}{2} - \frac{\vartheta_s}{2h\pi}\right)\Phi_s;$$

und durch Substitution jener Werthe (10.) in die *zweite* der Fromeln (8.) gelangt man zu genau *demselben* Resultat. Combinirt man dieses Resultat mit den schon früher über $U_{as}$ und $U_{is}$ gemachten Bemerkungen, so erhält man die Formeln:

---

1) Vgl. das citirte Werk Seite 139; wobei zu bemerken, dass im gegenwärtigen Fall die *innere* Normale $\nu$ der Fläche zur *positiven* Normale gewählt ist.

$$
(12.)\qquad \begin{aligned} U_{as} &= 0\,, \\ U_s &= \left(\frac{1}{2} - \frac{\vartheta_s}{2h\pi}\right)\Phi_s\,, \\ U_{is} &= \Phi_s\,. \end{aligned}
$$

Liegt also z. B. $s$ *weder* in einer Kante *noch* in einer Ecke der Fläche, so wird $\vartheta_s = 0$, und *folglich $U_s$ das arithmetische Mittel zwischen $U_{as}$ und $U_{is}$*.

Um die Hauptsache zusammenzufassen: Das Integral

$$
(13.)\qquad U_x = \frac{1}{2h\pi}\int\left(\Phi\,\frac{\partial T^x}{\partial\nu} - T^x\,\frac{\partial\Phi}{\partial\nu}\right)d\sigma
$$

besitzt auf der Fläche $\sigma$ *dreierlei* Werthe, einen auf ihrer *äussern* Seite, einen zweiten direct *auf der Fläche selber*, und einen dritten auf ihrer *innern* Seite. Ueber diese drei Werthe geben die Formeln (12.) hinreichende Auskunft.

---

**C. Neumann**, *Ueber die Zusammensetzung der nach dem Weber'schen Gesetz sich ergebenden Beschleunigungen.**)

Es seien $m$, $M$, $M_1$ drei in gerader Linie liegende Massenpuncte, und zwar sei $m$ längs dieser Linie, welche als $x$-Axe des Coordinatensystems dienen mag, *frei beweglich*, während $M$ und $M_1$ *feste* Lagen besitzen; wie solches angedeutet sein mag durch folgende Figur, in welcher 0 den Anfangspunct des Coordinatensystems, und $x$ die Abscisse des Punctes $m$ bezeichnet:

0 ——— $m$ ($x$) ——— $M$ ——— $M_1$ ———

Bei Zugrundelegung des *Weber*'schen Gesetzes wird alsdann die von $M$ auf $m$ in der Richtung der $x$-Axe ausgeübte Kraft den Werth haben $A + Bx''$, wo $A$ und $B$ gewisse Functionen von $x$, $x'$ sind, auf deren genauere Werthe es hier nicht weiter ankommt; desgleichen, wird die von $M_1$ auf $m$ ausgeübte Kraft

*) Vorgetragen und zum Druck übergeben in der Sitzung am 11. März 1878.

den Werth haben $A_1 + B_1 x''$, wo $A_1$ und $B_1$ wiederum Functionen von $x, x'$ sind. Dabei bezeichnet $x'$ die augenblickliche Geschwindigkeit, und $x''$ die augenblickliche Beschleunigung des Punctes $m$.

Demgemäss ergeben sich für die Bewegung des Punctes $m$, jenachdem derselbe der *alleinigen Wirkung von* $M$, oder der *alleinigen Wirkung von* $M_1$, oder endlich der *gleichzeitigen Einwirkung von* $M$ und $M_1$ unterliegt, der Reihe nach die Differentialgleichungen:

(1.) $$m x'' = A + B x'',$$

(2.) $$m x'' = A_1 + B_1 x'',$$

(3.) $$m x'' = (A + A_1) + (B + B_1) x'';$$

denen man offenbar auch folgende Gestalt geben kann:

(1.) $$x'' = \frac{A}{m - B},$$

(2.) $$x'' = \frac{A_1}{m - B_1},$$

(3.) $$x'' = \frac{A + A_1}{m - (B + B_1)}.$$

Die letzten Formeln zeigen deutlich, dass das $x''$ im Falle (3.) keineswegs die *Summe* derjenigen Werthe ist, welche $x''$ in den Fällen (1.) und (2.) besitzt. Somit ergiebt sich folgendes beachtenswerthe Resultat:

*Hält man bei Zugrundelegung des Weber'schen Gesetzes an dem Grundsatze fest, dass gleichgerichtete* ***Kräfte*** *sich durch Addition zusammensetzen, so wird derselbe Grundsatz für die* ***Beschleunigungen*** *nicht mehr gelten.*

Oder genauer und zugleich allgemeiner ausgedrückt: *Hält man bei Anwendung des Weber'schen Gesetzes an dem Grundsatze fest, dass die auf einen beweglichen Punct ausgeübten* ***Kräfte*** *nach der Regel des Parallelogramms sich zusammensetzen, so wird dieser Grundsatz nicht mehr gelten für die* ***Beschleunigungen,*** *welche jenem Punct durch verschiedene Ursachen eingeprägt werden.*

---

Herr **Bruhns** legt 2 Tafeln mit Zeichnungen von Mars und dem Zodiakallicht von Herrn *Weinek* vor und theilt darüber mit: *)

Der Observator der hiesigen Sternwarte, Herr *Weinek*, hat während der letzten Mars-Opposition von diesem Planeten am 8zölligen Aequatoreal mit geübter Hand drei Zeichnungen angefertigt, deren Publication zur Vergleichung mit ähnlichen Aufnahmen anderer Sternwarten Werth besitzt. Ausserdem hat er auf seiner Rückreise von der Kerguelen-Insel, wohin er zur Beobachtung des Venusdurchganges 1874 entsendet worden, in den Tropen das Zodiakallicht beobachtet und gezeichnet. Beides lege ich im Folgenden vor. Herr *Weinek* bemerkt dazu:

Fig. 1 stellt das Zodiakallicht dar, wie ich es am 8. März 1875 8 Uhr Abends auf der Rückreise von Kerguelen zwischen Mauritius und den Seychellen-Inseln in 12° 42′ südlicher Breite und $3^h\ 42^m$ östlicher Länge von Greenwich vom Passagierdampfer aus aufgenommen. Die Spitze konnte noch über die Linie Plejaden-Aldebaran verfolgt werden. Die Begrenzung des Lichtes, so weit von einer solchen die Rede sein kann, war im Allgemeinen eine ziemlich deutliche; die Intensität desselben glich nahe jener der grösseren Capwolke und hatte ihr Maximum in etwa zwei Drittel der Breite gegen die Plejaden hin. Ins Auge fallend schien das Abbiegen der Begrenzung nach aussen gegen den Horizont hin. In der Zeichnung ist die Constellation der Sterne nach der Karte wiedergegeben und deren Helligkeit durch grössere oder kleinere Scheibchen angedeutet. Die Gesammtnüancirung des Bildes nimmt wesentlich auf den Charakter einer tropischen Nacht Rücksicht.

Ueber die relative Helligkeit des Zodiakallichtes zu anderen Objecten finde ich noch folgende Notiz vom 9. März 1875 (Breite — 8° 15′, Länge dieselbe): Mond $1^d\!.8$ alt. 35 Minuten nach Sonnenuntergang (oberer Rand $6^h\ 17^m$ mittl. Ortszeit) die

*) Vorgetragen in der Sitzung am 15. Dec. 1877, zum Druck übergeben am 4. Febr. 1878.

Fig. 1.



Das Zodiakallicht in den Tropen 1875 März 8, Abends 8h

Fig. 2



Mars 1877 Sept. 6. 10h 5 M.L.

*Berichte d. K. S. Ges. d. Wiss. math. phys. Cl. 1878.*
*Zur Abhandlung v. L. Weinek.*



Lith. Anst. v. E. A. Funke Leipzig

unbeleuchtete Scheibe mit freiem Auge zu sehen; 70 Minuten nach Untergang das Zodiakallicht deutlich wahrzunehmen, 10 bis 15 Minuten früher die grössere Capwolke. Anfügend sei noch bemerkt, dass die dunkle Seite des Mondes noch am Abend des 12. März (Breite + 0°50′, Länge dieselbe) — Alter desselben 4ᵈ8 — mit freiem Auge wahrgenommen werden konnte.

Fig. 2, 3 und 4 sind Zeichnungen des Mars, die ich hier am 8zölligen Aequatoreal bei 192facher Vergrösserung während der diesjährigen Opposition, soweit meine Zeit nicht von der Beobachtung des Planeten am Meridiankreis beansprucht war, und der Luftzustand ein rationelles Zeichnen zuliess, angefertigt. Dabei kam es mir wieder wesentlich darauf an, das Gesehene mit möglichster Treue zu reproduciren und namentlich auf das Verhältniss der Nüancirung des Planeten in seinen Theilen zum Himmelsgrunde zu achten. Am 21. Sept. wunderte es mich, fast denselben Charakter der Marslandschaft wie am 8. Sept. zu finden; am 26. hingegen Abends 9½ Uhr, aufmerksam gemacht durch Herrn *Peter*, beobachtete ich einen ganz veränderten Anblick des Mars. Die mittlere Schattirung der Scheibe fehlte ganz, dagegen präsentirten sich in ⅓ Marsdurchmesser vom Südpole zwei scharf markirte grosse Flecken, die gegen diesen Pol hin von einzelnen kleineren Flecken begleitet schienen. Die Meridianbeobachtung verzögerte leider ein Zeichnen, das endlich später des verschlechterten Luftzustandes wegen aufgegeben wurde. Am 29. Sept. gelang es schliesslich, eine zum 26. Sept. ähnliche Configuration zu fixiren, welche in Fig. 4 gegeben ist. — Im Allgemeinen ist hier der Luftzustand einem exacten Zeichnen wenig günstig.

**A. Mayer,** *Ueber das allgemeinste Problem der Variationsrechnung bei einer einzigen unabhängigen Variabeln.**)

In meinen früheren Arbeiten über die Kriterien des Maximums und Minimums der einfachen Integrale habe ich nach dem Vorgange von Clebsch[1]) als das allgemeinste[2]) Problem der Variationsrechnung, in welchem nur eine einzige unabhängige Variable auftritt, stets die folgende Aufgabe angenommen:

A. *Man soll die den m Differentialgleichungen 1. O.*

$$\varphi_1 = 0\,,\ \varphi_2 = 0\,,\ \ldots\ \varphi_m = 0 \quad (m < n)$$

*unterworfenen Variabeln $y_1, y_2, \ldots y_n$ als Functionen von $x$ so bestimmen, dass das Integral*

$$V = \int_{x_0}^{x_1} f(x, y_1, \ldots y_n, y_1', \ldots y_n')\, dx$$

*ein Maximum oder Minimum werde.*

Ich habe aber dann, um die Aufgabe zu einer bestimmten zu machen, die weitere Festsetzung hinzugefügt: *dass sämmtliche n Functionen $y_1, y_2, \ldots y_n$ in den beiden gegebenen Grenzen $x_0$ und $x_1$ gegebene Werthe annehmen sollen.*

Das hiermit vollständig bestimmte Problem enthält nun allerdings alle diejenigen Aufgaben der Variationsrechnung als specielle Fälle, in denen die Grösse, die ein Maximum oder Minimum werden soll, direkt durch ein bestimmtes einfaches Integral definirt wird, oder präciser ausgedrückt, in denen sich diese Grösse als das Integral eines Differentialausdruckes darstellen lässt, der nicht an und für sich ein vollständiges Differential ist. Allein durch die hinzugefügte Grenzbedingung wird, was ich früher übersehen hatte, diejenige Classe von

---

*) Vorgetragen und zum Druck übergeben in der Sitzung am 3. Juni 1878.

1) Borchardt's J. 55, p. 336.

2) Es handelt sich selbstverständlich immer nur um solche Probleme, auf welche die allgemeinen Methoden der Variationsrechnung anwendbar sind.

Problemen des Maximums und Minimums von vornherein ausgeschlossen, bei denen zwischen jener Grösse und anderen unbekannten Functionen nur eine oder mehrere Differentialgleichungen gegeben sind. Als den allgemeinsten Ausdruck dieser Gattung von Problemen, mit denen sich bereits Euler und Lagrange[1]) und ganz besonders auch (in einer, an der Königsberger Universität gehaltenen Vorlesung) Jacobi beschäftigt haben, kann man die folgende Aufgabe betrachten:

I. *Gegeben sind zwischen der unabhängigen Variabeln $x$ und den $n$ unbekannten Functionen $y_1, y_2, \ldots y_n$ $m$ Differentialgleichungen 1. O.*

$$1) \qquad \varphi_1 = 0, \varphi_2 = 0, \ldots \varphi_m = 0, \; (m < n).$$

*Es handelt sich darum, diese Functionen so zu bestimmen, dass während den Functionen $y_2, \ldots y_n$ für zwei gegebene Werthe $x_0$ und $x_1$ $(> x_0)$ von $x$ gegebene Werthe vorgeschrieben sind, die Function $y_1$ für $x = x_0$ einen gegebenen Werth erhalte und für $x = x_1$ ein Maximum oder Minimum werde.*

Sieht man ab von den Grenzbedingungen, so entspricht diese Aufgabe demjenigen speciellen Falle des Problems A., in welchem die Function $f$ sich auf den Differentialquotienten $y_1'$ reducirt. Aber das Problem I. würde jeden Sinn verlieren, wenn man in demselben der Function $y_1$ auch für $x = x_1$ einen gegebenen Werth vorschreiben wollte. Dasselbe kann also nicht als ein specieller Fall des Problems A. aufgefasst werden, sobald man diesem die oben angegebenen Grenzbedingungen hinzugefügt hat, während sich umgekehrt das durch diese Grenzbedingungen bestimmte Problem A. sofort als ein specieller Fall des Problems I., nur mit einer unbekannten Function mehr, ausweist.

Die allgemeinen Kriterien des Maximums und Minimums, wie ich sie früher für alle Probleme der Form A. entwickelt habe, die bei festen, aber unbestimmten Grenzwerthen von $x$, $y_1, \ldots y_n$ lösbar sind, können daher unmöglich die Kriterien des Maximums und Minimums auch für das Problem I. enthalten. Dieses allgemeinste Problem der Variationsrechnung bei einer unabhängigen Variabeln bedarf vielmehr einer besonderen Behandlung. Eine solche zu versuchen und damit eine Lücke in

1) Lagrange Oeuvres I p. 331, II p. 40.

meinen früheren Arbeiten auszufüllen, ist der Zweck der vorgelegten Mittheilung. Es ist jedoch klar, dass viele Eigenschaften des Problems A. auch dem Problem I. gemeinsam sein werden. Aus diesem Grunde wird ein näheres Eingehen nur da nöthig sein, wo die beiden Probleme wesentlich von einander abweichen, während wegen aller derjenigen Punkte, die sich in beiden auf ganz analoge Weise erledigen lassen, auf den Aufsatz „Ueber die Kriterien des Maximums und Minimums der einfachen Integrale" Borchardt's J. 69 verwiesen werden kann, den ich im Folgenden immer durch K. bezeichnen werde. —

## § 1.

### Die erste Variation und die Differentialgleichungen des Problems.

Denkt man sich die Functionen $y_1, \ldots y_n$ bereits so bestimmt, wie es das Problem I. verlangt, und lässt hierauf jedes $y_i$ übergehen in

$$y_i + \alpha\delta y_i + \frac{\alpha^2}{2}\delta^2 y_i,$$

wo $\alpha$ eine beliebige, nur hinreichend kleine Zahl bezeichnet, so muss, wenn wir im Folgenden durch Anhängung des Index 1 an zweiter Stelle immer die Substitution $x = x_1$ anzeigen, für alle mit den Bedingungen des Problems verträglichen Werthe der Variationen $\delta y$ und $\delta^2 y$:

$$\delta y_{11} = 0$$

sein und $\delta^2 y_{11}$ ein festes Vorzeichen besitzen.

Es wird also zunächst darauf ankommen $\delta y_{11}$ zu berechnen.

Aus den Gleichungen 1) ergeben sich nun für die ersten Variationen $\delta y_1, \ldots \delta y_n$ die $m$ Bedingungsgleichungen:

$$2)\qquad \sum_{i=1}^{i=n}\left\{\frac{\partial\varphi_k}{\partial y_i}\delta y_i + \frac{\partial\varphi_k}{\partial y_i'}\delta y_i'\right\} = 0.$$

Multiplicirt man diese mit den, vorläufig noch unbestimmten Factoren $\lambda_k$ und addirt, so entsteht, wenn man zur Abkürzung

$$3)\qquad \lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2 + \ldots \lambda_m\varphi_m = \Omega$$

setzt, die Gleichung:

$$\sum_{i=1}^{i=n}\left\{\frac{\partial\Omega}{\partial y_i}\delta y_i + \frac{\partial\Omega}{\partial y_i'}\delta y_i'\right\} = 0,$$

die sich in bekannter Weise auch so schreiben lässt:

$$\sum_{i=1}^{i=n} \left( \frac{\partial \Omega}{\partial y_i} - \frac{d}{dx} \frac{\partial \Omega}{\partial y_i'} \right) \delta y_i + \frac{d}{dx} \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial \Omega}{\partial y_i'} \delta y_i = 0 .$$

Nun müssen in Folge der Grenzbedingungen des Problems $\delta y_2, \ldots \delta y_n$ für $x = x_0$, wie für $x = x_1$ verschwinden, und für $x = x_0$ muss überdies auch $\delta y_1 = 0$ werden. Unterwirft man daher die $m$ Multiplicatoren $\lambda$ der Bedingung:

$$\alpha) \qquad \frac{\partial \Omega}{\partial y_1} - \frac{d}{dx} \frac{\partial \Omega}{\partial y_1'} = 0$$

und integrirt hierauf die letzte Gleichung zwischen den Grenzen $x_0$ und $x_1$, so erhält man:

$$4) \qquad \left[ \frac{\partial \Omega}{\partial y_1'} \right]_1 \delta y_{11} = -\int_{x_0}^{x_1} dx \sum_{i=2}^{i=n} \left( \frac{\partial \Omega}{\partial y_i} - \frac{d}{dx} \frac{\partial \Omega}{\partial y_i'} \right) \delta y_i .$$

Hiermit ist $\delta y_{11}$ ausgedrückt durch $\delta y_2, \ldots \delta y_n$ allein, und durch Anwendung der bekannten Schlussweise der Variationsrechnung erkennt man, dass für die gesuchten Functionen $y$ die Coefficienten von $\delta y_2, \ldots \delta y_n$ unter dem Integrationszeichen einzeln verschwinden müssen. Mit Rücksicht auf die schon vorher eingeführte Gleichung $\alpha$) erhält man demnach zur Bestimmung dieser Functionen die $n$ Differentialgleichungen:

$$5) \qquad \frac{\partial \Omega}{\partial y_i} - \frac{d}{dx} \frac{\partial \Omega}{\partial y_i'} = 0 ,$$

zu denen noch die $m$ gegebenen Gleichungen 1) selbst hinzutreten.

Durch vollständige Integration dieser $n + m$ Differentialgleichungen ergeben sich die $y$ und $\lambda$ als Functionen von $x$ und von einer Reihe willkürlicher Constanten. Nun sind in unserm Probleme den Functionen $y_1, \ldots y_n$ $2n - 1$ Grenzbedingungen vorgeschrieben; man braucht also, um diesen Bedingungen genügen zu können, $2n - 1$ willkürliche Constanten in den Lösungen $y$ des Systems 5), 1). Die Gleichungen 5) aber sind linear und homogen in Bezug auf die Grössen $\lambda_1, \ldots \lambda_m, \lambda_1', \ldots \lambda_m'$, die in den Gleichungen 1) gar nicht vorkommen. Von den willkürlichen Constanten, welche die vollständige Integration des Systems 5), 1) mit sich bringt, geht daher eine allein und zwar als gemeinschaftlicher Factor in die Werthe der $\lambda$ ein. Soll

also das Problem I. möglich sein, so muss dies System Differentialgleichungen nothwendig von der Ordnung $2n$ sein und dies wieder verlangt, dass die Determinante:

$$6)\qquad R = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 \Omega}{\partial y_1' \partial y_1'}, & \dots & \frac{\partial^2 \Omega}{\partial y_1' \partial y_n'}, & \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_1'}, & \dots & \frac{\partial \varphi_m}{\partial y_1'} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial^2 \Omega}{\partial y_n' \partial y_1'}, & \dots & \frac{\partial^2 \Omega}{\partial y_n' \partial y_n'}, & \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_n'}, & \dots & \frac{\partial \varphi_m}{\partial y_n'} \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_1'}, & \dots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_n'}, & 0, & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial \varphi_m}{\partial y_1'}, & \dots & \frac{\partial \varphi_m}{\partial y_n'}, & 0, & \dots & 0 \end{vmatrix}$$

nicht identisch Null sei[1]).

Um von vornherein Probleme auszuschliessen, die, weil sie nur in ganz besonderen Fällen möglich sind, sich nothwendig

---

1) Das System Differentialgleichungen 5), 4) besitzt, beiläufig bemerkt, die charakteristische Eigenschaft, *dass es sich zurückführen lässt auf eine partielle Differentialgleichung 1. O. mit nur n unabhängigen Variabeln, in der aber die unbekannte Function selbst vorkommt.* Man erhält diese partielle Differentialgleichung, wenn man aus den $n + m$ Gleichungen:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial y_h'} + \frac{\partial \Omega}{\partial y_1'} \frac{\partial y_1}{\partial y_h} = 0, \quad \varphi_k = 0,$$

$$\frac{\partial y_1}{\partial x} = y_1' - \sum_{h=2}^{h=n} y_h' \frac{\partial y_1}{\partial y_h}$$

die Differentialquotienten $y_1', \dots y_n'$, sowie die Verhältnisse der $\lambda$ eliminirt. Hat man von derselben irgend eine vollständige Lösung

$$y_1 = Y_1 (x, y_2, \dots y_n, a_1, a_2, \dots a_n)$$

gefunden, so ergeben sich aus den $n$ Gleichungen:

$$y_1 = Y_1,$$

$$\frac{\partial Y_1}{\partial a_h} + b_h \frac{\partial Y_1}{\partial a_n} = 0$$

die vollständigen Lösungen $y_1, \dots y_n$ des Systems 5), 4), womit zugleich auch die Verhältnisse der Multiplicatoren $\lambda$ bestimmt sind, während man ihre wahren Werthe schliesslich vermöge einer einfachen Quadratur aus einer beliebigen der Gleichungen 5) findet.

den allgemeinen Regeln entziehen müssen, setze ich im Folgenden immer voraus, dass die vollständigen Lösungen $y$ des Systems 5), 1) $2n-1$, nicht auf eine kleinere Anzahl reducirbare, willkürliche Constanten enthalten, und dass also auch die Determinante $R$ nicht Null sei.

Hat man nun die Differentialgleichungen 5), 1) vollständig integrirt und die $2n-1$ Constanten der Lösungen $y$ so bestimmt, dass die Functionen $y_1, y_2, \ldots y_n$ für $x = x_0$ und die Functionen $y_2, \ldots y_n$ für $x = x_1$ die gegebenen Grenzwerthe annehmen, wodurch auch die Multiplicatoren $\lambda_1, \ldots \lambda_m$ bis auf einen gemeinsamen constanten Factor, der sich aus allen Formeln weghebt, vollständig bestimmte Werthe erhalten, so sind nach 4) die so gewonnenen Functionen $y_1, y_2, \ldots y_n$ sicher [1]) die Lösungen des Problems $\delta y_{11} = 0$, so oft nach Substitution der Werthe der $y$ und $\lambda$ der Ausdruck:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial y_1'}$$

für $x = x_1$ nicht verschwindet. Im letzteren Falle dagegen bleibt es zweifelhaft, ob die Bedingung $\delta y_{11} = 0$ wirklich erfüllt wird. Um diesen fraglichen Punkt zu vermeiden, werden wir daher die obere Grenze $x_1$ so wählen müssen, dass jener Ausdruck für $x = x_1$ nicht Null wird.

Um aber zu entscheiden, ob die Lösungen des Problems $\delta y_{11} = 0$ den Ausdruck $y_{11}$ zu einem wirklichen Maximum oder Minimum machen, bleibt uns noch übrig, die zweite Variation $\delta^2 y_{11}$ zu bilden und ihr Zeichen zu untersuchen.

Auch hier wieder sehe ich ab von allen den besonderen Ausnahmefällen, die nur bei besonderer Wahl der Grenzwerthe von $x, y_1, \ldots y_n$ auftreten können, und nehme also z. B. an, dass jeder von den $y$ und $\lambda$ abhängige Ausdruck, der durch die vollständigen Lösungen des Systems 5), 1) nicht identisch Null wird, auch für die Lösungen des Problems $\delta y_{11} = 0$ nicht identisch verschwindet.

Hat man, was in Folge der über die Determinante $R$ eingeführten Voraussetzung immer möglich ist, die $m$ gegebenen Be-

---

1) Ich nehme selbstverständlich an, was sich ja eventuell immer durch passende Verengerung des Intervalles $x_0$ bis $x_1$ erreichen lässt, dass zwischen diesen Grenzen keinerlei solche Unstetigkeiten eintreten, durch welche die Gültigkeit der Formel 4) aufgehoben würde.

dingungsgleichungen 1) auf eine solche Form gebracht, dass die Gleichung $R=0$ nicht eine blosse Folge der Gleichungen 1) wird [1], so kann auch die vollständige Integration der Differentialgleichungen 5), 1) niemals die Gleichung $R=0$ nach sich ziehen. Nach der eben getroffenen Festsetzung wird also die Determinante $R$ auch nach Substitution der Lösungen unseres Problems nicht identisch Null.

Ich verstehe endlich von jetzt an unter $y_1, \ldots y_n, \lambda_1, \ldots \lambda_m$ die vollständigen Lösungen des Systems 5), 1) und bezeichne die $2n-1$ willkürlichen Constanten der Lösungen $y$ durch $a_1$, $a_2, \ldots a_{2n-1}$, dagegen durch $a_{2n}$ den gemeinschaftlichen constanten Factor der Lösungen $\lambda$, der in den Functionen $y$ gar nicht vorkommt. Den Constanten $a_1, a_2, \ldots a_{2n-1}$ selbst sind die festen Werthe beizulegen, die sich aus den $2n-1$ Grenzbedingungen des Problems ergeben. —

## § 2.

### Die zweite Variation und der Grenzwerth der unteren Grenze.

Setzt man zur Abkürzung $\delta y_i = z_i$ und bezeichnet durch $2\delta^2\psi$ diejenige homogene Function zweiter Ordnung der $z$ und $z'$, die aus einer beliebig gegebenen Function $\psi$ von $x, y_1, \ldots y_n, y_1', \ldots y_n', \lambda_1, \ldots \lambda_m$ hervorgeht, wenn man darin jedes $y_i$ in $y_i + \alpha z_i$ übergehen lässt und hierauf von der Entwickelung der Function nach steigenden Potenzen von $\alpha$ den Coefficienten von $\frac{\alpha^2}{2}$ nimmt, so ergeben sich aus den Gleichungen 1) für die zweiten Variationen $\delta^2 y_1, \ldots \delta^2 y_n$ die $m$ Bedingungsgleichungen:

$$\sum_{i=1}^{i=n}\left(\frac{\partial\varphi_k}{\partial y_i}\,\delta^2 y_i + \frac{\partial\varphi_k}{\partial y'_i}\,\delta^2 y_i'\right) + 2\delta^2\varphi_k = 0\,.$$

Multiplicirt man diese Gleichungen mit den Functionen $\lambda_k$ und addirt die Produkte, so erhält man nach 3):

$$\sum_{i=1}^{i=n}\left(\frac{\partial\Omega}{\partial y_i}\,\delta^2 y_i + \frac{\partial\Omega}{\partial y_i'}\,\delta^2 y_i'\right) + 2\delta^2\Omega = 0\,.$$

---

1) Diese Vorsicht ist nothwendig. Denn man sieht leicht, dass man umgekehrt den Gleichungen 1) immer solche Formen geben kann, dass die Gleichung $R=0$ eine blosse Folge der Gleichungen 1) wird. Ich hebe dies ausdrücklich hervor, weil ich früher (K. p. 241) nicht an diese Möglichkeit des Verschwindens der Determinante $R$ gedacht hatte.

Diese Gleichung aber lässt sich, da die Functionen $y$ und $\lambda$ den Gleichungen 5) genügen, auch so schreiben:

$$\frac{d}{dx}\sum_{i=1}^{i=n}\frac{\partial \Omega}{\partial y_i'}\delta^2 y_i = -2\delta^2\Omega$$

und hieraus ergiebt sich, weil in Folge der Grenzbedingungen unseres Problems $\delta^2 y_2, \ldots \delta^2 y_n$ für $x = x_0$ und für $x = x_1$ und $\delta^2 y_1$ für $x = x_0$ verschwinden muss, durch Integration zwischen den Grenzen $x_0$ und $x_1$:

$$7)\qquad \delta^2 y_{11} = -\frac{1}{\left[\frac{\partial \Omega}{\partial y_1}\right]_1}\int_{x_1}^{x_1} 2\delta^2\Omega dx .$$

Soll also für die Lösungen des Problems $\delta y_{11} = 0$ ein wirkliches Maximum oder Minimum eintreten, so muss dieser Ausdruck stets negativ oder stets positiv bleiben für alle willkürlichen Variationen $z_1, z_2, \ldots z_n$, welche den $m$ Bedingungsgleichungen:

$$2)\qquad \sum_{i=1}^{i=n}\left\{\frac{\partial \varphi_k}{\partial y_i} z_i + \frac{\partial \varphi_k}{\partial y'_i} z_i'\right\} = 0$$

genügen, innerhalb des Integrationsintervalles stetig sind und an den beiden Grenzen $x_0$ und $x_1$ verschwinden. Wir müssen jetzt auch der Variation $z_1 = \delta y_1$ die Bedingung $z_{11} = 0$ vorschreiben, da die zweite Variation $\delta^2 y_{11}$ immer nur zu untersuchen ist unter der Voraussetzung, dass die erste $\delta y_{11}$ verschwindet.

In Folge der Bedingungsgleichungen 2) kann man die Formel 7) auch ersetzen durch die folgende:

$$8)\qquad \delta^2 y_{11} = -\frac{1}{\left[\frac{\partial \Omega}{\partial y_1'}\right]_1}\int_{x_0}^{x_1} 2\,\Omega_2\, dx,$$

in welcher:

$$9)\qquad 2\,\Omega_2 = 2\delta^2\Omega + 2\sum_{k=1}^{k=m}\mu_k\sum_{i=1}^{i=n}\left\{\frac{\partial \varphi_k}{\partial y_i} z_i + \frac{\partial \varphi_k}{\partial y_i'} z_i'\right\}$$

ist und über die $m$ Grössen $\mu_k$ willkürlich verfügt werden kann. Zugleich stellen sich bei Einführung der Function $2\,\Omega_2$ die Bedingungsgleichungen 2) einfach so dar:

$$2^*)\qquad \frac{\partial \Omega_2}{\partial \mu_k} = 0 \cdot -$$

Soll nun die zweite Variation ein sicheres Kriterium des Maximums oder Minimums liefern, so muss sie weder ihr Zeichen ändern, noch auch selbst verschwinden können, ausser wenn alle $n$ Variationen $z$ identisch Null werden.

Da aber $2\Omega_2$ eine homogene Function zweiter Ordnung der $z$, $z'$ und $\mu$ ist, und die Variationen $z$ in den beiden Grenzen $x_0$ und $x_1$ verschwinden müssen, so lässt sich mit Rücksicht auf die Bedingungsgleichungen 2*) die Formel 8) auch so schreiben:

$$\delta^2 y_{11} = -\frac{1}{\left[\frac{\partial\Omega}{\partial y'_1}\right]_1}\int_{x_0}^{x_1} dx \sum_{h=1}^{h=n}\left(\frac{\partial\Omega_2}{\partial z_h} - \frac{d}{dx}\frac{\partial\Omega_2}{\partial z_h'}\right)\delta z_h .$$

Man erkennt ferner durch Differentiation der Identitäten:

$$10) \qquad \frac{\partial\Omega}{\partial y_i} - \frac{d}{dx}\frac{\partial\Omega}{\partial y_i'} = 0\,, \quad \varphi_k = 0$$

nach den $2n$ Integrationsconstanten $a_1, a_2, \dots a_{2n}$, dass

$$z_i = \sum_{h=1}^{h=2n-1}\gamma_h \frac{\partial y_i}{\partial a_h}\,, \quad \mu_k = \sum_{h=1}^{h=2n}\gamma_h \frac{\partial \lambda_k}{\partial a_h}$$

die vollständigen Lösungen der $n+m$ Differentialgleichungen sind:

$$\frac{\partial\Omega_2}{\partial z_h} - \frac{d}{dx}\frac{\partial\Omega_2}{\partial z_h'} = 0\,, \quad \frac{\partial\Omega_2}{\partial\mu_k} = 0\,.$$

Die zweite Variation $\delta^2 y_{11}$ lässt sich daher immer zum Verschwinden bringen, wenn man die $2n-1$ willkürlichen Constanten $\gamma_1, \gamma_2, \dots \gamma_{2n-1}$ so bestimmen kann, dass die $n$ Ausdrücke:

$$11) \qquad z_i = \sum_{h=1}^{h=2n-1}\gamma_h \frac{\partial y_i}{\partial a_h}\,,$$

ohne identisch Null zu werden, für $x = x_0$ und $x = x_1$, oder allgemeiner für irgend zwei verschiedene Werthe von $x$ innerhalb dieser Grenzen verschwinden.

Die Substitutionen 11) aber erfüllen mit den Gleichungen 2) nach 3) zugleich auch die Gleichung:

$$\sum_{i=1}^{i=n}\left\{\frac{\partial\Omega}{\partial y_i} z_i + \frac{\partial\Omega}{\partial y'_i} z_i'\right\} = 0$$

und diese ergiebt wegen der Identitäten 10)

$$\frac{d}{dx}\sum_{i=1}^{i=n}\frac{\partial\Omega}{\partial y_i'}z_i = 0\,.$$

Durch die Substitutionen 11) wird folglich:

$$12)\qquad \sum_{i=1}^{i=n}\frac{\partial\Omega}{\partial y_i'}z_i = \text{const.}$$

Hat man also $n$ von den $2n-1$ Constanten $\gamma$ so bestimmt, dass für einen bestimmten Werth von $x$ die Formeln 11) ergeben:

$$z_1 = z_2 = \ldots = z_n = 0\,,$$

so genügen die Ausdrücke 11) identisch der Gleichung:

$$\sum_{i=1}^{i=n}\frac{\partial\Omega}{\partial y_i'}z_i = 0\,,$$

und daher wird, so oft man die $n-1$ übrigen Constanten $\gamma$ so wählen kann, dass noch für einen andern Werth von $x$:

$$z_2 = z_3 = \ldots = z_n = 0$$

wird, für diesen zweiten Werth von $x$ gleichzeitig auch $z_1 = 0$, vorausgesetzt, dass derselbe den Ausdruck $\frac{\partial\Omega}{\partial y_1'}$ nicht ebenfalls zum Verschwinden bringt. Nun dürfen wir ohnedies die obere Grenze $x_1$ nicht so wählen, dass $\left[\frac{\partial\Omega}{\partial y_1'}\right]_1 = 0$ wird. Nehmen wir daher diese zu jenem zweiten Werthe von $x$ und betrachten sie als fest gegeben, so erhalten wir den Satz:

II. *Die zweite Variation $\delta^2 y_{11}$ kann immer zum Verschwinden gebracht werden, so oft die Determinante*

$$13)\quad \Delta(x\,x_1) = \begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial a_1} & \frac{\partial y_1}{\partial a_2} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial a_{2n-1}} \\ \frac{\partial y_2}{\partial a_1} & \frac{\partial y_2}{\partial a_2} & \cdots & \frac{\partial y_2}{\partial a_{2n-1}} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial y_n}{\partial a_1} & \frac{\partial y_n}{\partial a_2} & \cdots & \frac{\partial y_n}{\partial a_{2n-1}} \\ \frac{\partial y_{21}}{\partial a_1} & \frac{\partial y_{21}}{\partial a_2} & \cdots & \frac{\partial y_{21}}{\partial a_{2n-1}} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial y_{n1}}{\partial a_1} & \frac{\partial y_{n1}}{\partial a_2} & \cdots & \frac{\partial y_{n1}}{\partial a_{2n-1}} \end{vmatrix}$$ [1])

*für irgend einen von $x_1$ verschiedenen Werth von $x$ innerhalb der Grenzen $x_0$ und $x_1$ verschwindet.*

Hieraus ergiebt sich zugleich, wenn man unter $x'$ diejenige Wurzel der Gleichung:

$$\Delta(x\,x_1) = 0$$

versteht, die der Wurzel $x_1$ am nächsten liegt und $< x_1$ ist, dass im Allgemeinen $x'$ die äusserste Grenze ist, bis zu welcher oder unter welche $x_0$ nicht herabsinken darf, wenn ein Maximum oder Minimum stattfinden soll.

Noch bemerke ich, dass in Folge der willkürlichen Constanten $\gamma_h$ die Gleichung 12) in die $2n - 1$ Gleichungen zerfällt:

$$\sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial \Omega}{\partial y'_i} \frac{\partial y_i}{\partial a_h} = \text{const.} = b_h\,,$$ [2])

1) Nach der in § 1 eingeführten Bezeichnung ist unter $y_{i1}$ der Werth von $y_i$ für $x = x_1$ zu verstehen.

2) Diese Formel ergiebt:

$$\beta)\quad \sum_{i=1}^{i=n} \left\{ \frac{\partial \Omega}{\partial y_i} \frac{\partial y_i}{\partial a_h} - \left[\frac{\partial \Omega}{\partial y_i'}\right]_1 \frac{\partial y_{i1}}{\partial a_h} \right\} = 0$$

und bestätigt somit aufs Neue, dass die willkürlichen Constanten der Lösungen $y$ sich stets auf $2n - 1$ reduciren lassen. Denn hat man durch vollständige Integration des Systems 5), 1) die $y$ zunächst als Functionen von $x$ und von $2n$ willkürlichen Constanten $a_1, a_2, \ldots a_{2n}$ gefunden, so zeigen die $2n$ Gleichungen $\beta$), dass

aus denen sich leicht ergiebt, dass identisch ist:

$$14)\qquad \frac{\partial \Omega}{\partial y_1'} \Delta(x x_1) = \pm \left[\frac{\partial \Omega}{\partial y_1'}\right]_1 \Delta(x_1 x) .$$

## § 3.

### Die Kriterien des Maximums und Minimums.

Nach der am Schlusse von § 1 eingeführten Voraussetzung ist die Determinante $R$ auch jetzt nicht Null. Wendet man daher auf das Integral der Formel 7) die Clebsch'sche Reduction der zweiten Variation (K. p. 248, Formel (26)) an, so kann man auf die zweite Variation $\delta^2 y_{11}$ unmittelbar die Resultate übertragen, die in K. § 4 und § 5 für $\delta^2 J$ erhalten wurden. Man sieht auf diese Weise, dass es, so lange diese Reduction angewendet werden darf, für das Maximum oder Minimum nothwendig und hinreichend ist, dass die homogene Function zweiter Ordnung:

$$2\,W = -\frac{1}{\left[\frac{\partial \Omega}{\partial y_1'}\right]_1} \sum_{h=1}^{h=n} \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial^2 \Omega}{\partial y_h' \partial y_i'} U_h U_i ,$$

zwischen deren $n$ willkürlichen Argumenten $U_1, \ldots U_n$ die $m$ Bedingungsgleichungen

$$\sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial \varphi_k}{\partial y_i'} U_i = 0$$

bestehen, zwischen den Grenzen $x_0$ und $x_1$ ein festes Vorzeichen bewahre. Die Clebsch'sche Reduction aber ist auf das Integral 7) anwendbar, so lange man die $2n^2$ Constanten $\gamma_h^\sigma$ in den Ausdrücken:

$$15)\qquad u_i^\sigma = \sum_{\tau=1}^{\tau=2n-1} \gamma_\tau^\sigma \frac{\partial y_i}{\partial a_\tau} , \quad r_k^\sigma = \sum_{\tau=1}^{\tau=2n} \gamma_\tau^\sigma \frac{\partial \lambda_k}{\partial a_\tau}$$

so bestimmen kann, dass die Determinante:

$$16)\qquad U = \Sigma \pm u_1^1 u_2^2 \ldots u_n^n$$

---

$$\sum \pm \frac{\partial y_1}{\partial a_1} \cdots \frac{\partial y_n}{\partial a_n} \frac{\partial y_{11}}{\partial a_{n+1}} \cdots \frac{\partial y_{n1}}{\partial a_{2n}} = 0$$

sein muss.

innerhalb der Grenzen $x_0$ und $x_1$ nirgends verschwindet und zugleich den $\frac{n(n-1)}{2}$, von $x$ unabhängigen Bedingungsgleichungen:

$$17)\qquad \sum_{i=1}^{i=n} \left\{ u_i^\sigma \frac{\partial \Omega_2(u^\varrho r^\varrho)}{\partial \frac{du_i^\varrho}{dx}} - u_i^\varrho \frac{\partial \Omega_2(u^\sigma r^\sigma)}{\partial \frac{du_i^\sigma}{dx}} \right\} = 0$$

genügt wird, in denen $\Omega_2(u^\varrho r^\varrho)$ aus $\Omega_2$ entsteht, wenn man darin allgemein setzt:

$$z_i = u_i^\varrho\,,\ \mu_k = r_k^\varrho\,.$$

Um also zu zeigen, dass umgekehrt ein wirkliches Maximum oder Minimum stattfindet, so lange bei festem $x_1$ die untere Grenze $x_0$ innerhalb desjenigen Intervalles bleibt, welches ihr durch den Satz des vorigen § vorgeschrieben wird, und vorausgesetzt, dass überdies die Function $2W$ in diesem Intervalle ein constantes Zeichen besitzt, wird es darauf ankommen, nachzuweisen, dass unter diesen Voraussetzungen die Constanten $\gamma_h^\sigma$ sich immer in der verlangten Weise bestimmen lassen. Hierzu aber wieder genügt es, wie man unter Berücksichtigung der Identität 14) durch Anwendung der Schlussfolge von K. § 7 ohne Schwierigkeit erkennt, zu zeigen, dass man den Constanten $\gamma_h^\sigma$ solche, den Bedingungsgleichungen 17) genügende Werthe beilegen kann, für welche die Determinante $U$ bis auf einen von $x$ unabhängigen Factor mit der Determinante $\Delta(x\,x_1)$ zusammenfällt.

Um zu einem solchen Werthsystem der $\gamma_h^\sigma$ zu gelangen, bilde ich mit den $n(2n-1)$ Constanten $\gamma_h^\sigma$, die in den Ausdrücken $u_i^\sigma$ vorkommen, und mit $(n-1)(2n-1)$ neuen Constanten $\gamma_h^{n+\varrho}$ die Determinante:

$$18)\qquad \Gamma = \Sigma \pm \gamma_1^1 \cdots \gamma_n^n\, \gamma_{n+1}^{n+1} \cdots \gamma_{2n-1}^{2n-1}$$

und multiplicire die Determinante $\Delta(x\,x_1)$ mit derselben. Dehnt man die Bezeichnungen 15) in der Art aus, dass man allgemein für $\sigma = 1, 2, \ldots 2n-1$ setzt:

$$
19)\qquad \begin{cases} u_i^\sigma = \sum\limits_{\tau=1}^{\tau=2n-1} \gamma_\tau^\sigma \dfrac{\partial y_i}{\partial a_\tau}\,, & {}^{1)} \\[2ex] u^\sigma_{n+k} = \sum\limits_{\tau=1}^{\tau=2n-1} \gamma_\tau^\sigma \dfrac{\partial y_{k+1\cdot 1}}{\partial a_\tau}\,, \end{cases}
$$

so erhält man hierdurch:

$$
20)\qquad \Gamma . \Delta (x\, x_1) = \sum \pm u_1^1 \cdots u_n^n\, u_{n+1}^{n+1} \cdots u_{2n-1}^{2n-1}\,.
$$

Versteht man nun unter $a_1, a_2, \cdots a_n$ solche $n$ von den $2n-1$ Integrationsconstanten $a_1, a_2, \cdots a_{2n-1}$, für welche die Determinante:

$$
21)\qquad Y = \sum \pm \frac{\partial y_1}{\partial a_1} \frac{\partial y_2}{\partial a_2} \cdots \frac{\partial y_n}{\partial a_n}
$$

nicht Null ist und wählt $x_1$ so, dass $Y$ auch für $x = x_1$ nicht verschwindet, so kann man $n(n-1)$ Grössen $A_h^{n+\mu}$ und $n^2$ Grössen $A_h^i$ so bestimmen, dass identisch wird:

$$
22)\qquad \frac{\partial y_{i1}}{\partial a_{n+\mu}} + \sum_{h=1}^{h=n} \frac{\partial y_{i1}}{\partial a_h} A_h^{n+\mu} = 0\,,
$$

$$
23)\qquad \sum_{h=1}^{h=n} \frac{\partial y_{i1}}{\partial a_h} A_h^i = 1\,, \quad \sum_{h=1}^{h=n} \frac{\partial y_{\varrho 1}}{\partial a_h} A_h^i = 0\,.
$$

Setzt man dann:

$$
24)\qquad \gamma_h^\mu = A_h^{n+\mu}\,, \quad \gamma^\mu_{n+\mu} = 1\,, \quad \gamma^\mu_{n+k} = 0\,,
$$

so wird nach 19) und 22)

$$
25)\qquad u^\mu_{n+k} = 0\,, \quad u^\mu_{n+\mu} = 0
$$

und zugleich auch:

$$
26)\qquad u_{11}^\mu = 0\,.
$$

Setzt man weiter:

---

1) Im Folgenden bedeuten immer:
$i$ und $\varrho$ irgend zwei verschiedene der Zahlen $1, 2, \ldots n$,
$k$ und $\mu$ - - - - - $1, 2, \ldots n-1$,
$h$ eine beliebige der Zahlen $1, 2, \ldots n$,
und $\nu$ irgend eine, von $k$ verschiedene Zahl aus der Reihe $0, 1, \ldots n-1$.

27) $$\gamma_h^{n+\nu} = A_h^{\nu+1}, \ \gamma_{n+\mu}^{n+\nu} = 0,$$

so wird nach 19) und 23):

28) $$u_{n+k}^{n+\nu} = 0, \ u_{n+k}^{n+k} = 1$$

und überdies:

29) $$u_{11}^{n} = 1.$$

Bei dieser Constantenbestimmung reducirt sich daher die Determinante $\Gamma$ auf

$$\Gamma = \Sigma \pm A_1^1 A_2^2 \cdots A_n^n$$

und (mit Rücksicht darauf, dass nach 25) und 28) alle $u_{n+k}^h = 0$ werden) die rechte Seite der Formel 20) auf:

$$\Sigma \pm u_1^1 u_2^2 \cdots u_n^n = U,$$

so dass man, da nach 21) und 23)

$$Y_1 \ \Sigma \pm A_1^1 A_2^2 \cdots A_n^n = 1$$

ist, aus 20) erhält:

30) $$U = \frac{1}{Y_1} \Delta(x x_1).$$

Hiermit sind die beiden Determinanten $U$ und $\Delta(x x_1)$ bis auf den von $x$ unabhängigen Factor $\frac{1}{Y_1}$ auf einander zurückgeführt. Es bleibt aber noch übrig, die Bedingungsgleichungen 17) zu erfüllen. Diese aber sind unabhängig von $x$, es genügt also sie für $x = x_1$ zu befriedigen.

Nun ist nach 19), da der 2te Index 1 die Substitution $x = x_1$ anzeigt:

$$u_{n+k}^{\sigma} = u_{k+1,1}^{\sigma}.$$

Nach 25) und 26) werden daher durch unsere Constantenbestimmung alle $u_{i1}^{\mu} = 0$ und somit alle diejenigen Gleichungen 17) für $x = x_1$ erfüllt, in denen $\varrho$ und $\sigma < n$ sind, und es bleiben nur noch die $n - 1$ Gleichungen zu erfüllen übrig:

$$\sum_{i=1}^{i=n} \left\{ u_i^n \frac{\partial \Omega_2(u^\mu r^\mu)}{\partial \frac{du_i^\mu}{dx}} - u_i^\mu \frac{\partial \Omega_2(u^n r^n)}{\partial \frac{du_i^n}{dx}} \right\} = 0.$$

Setzt man aber $x = x_1$, so reduciren sich diese Gleichungen, weil jedes $u_{i1}^{\mu} = 0$ und nach 28) auch jedes $u_{k+1,1}^{n} = 0$, dagegen nach 29) $u_{11}^{n} = 1$ ist, auf

$$\left[\frac{\partial \Omega_2(u^\mu r^\mu)}{\partial \frac{d u_1^\mu}{d x}}\right]_1 = 0 .$$

Nun ist, wie leicht erhellt:

$$\frac{\partial \Omega_2(u^\mu r^\mu)}{\partial \frac{d u_1^\mu}{d x}} = \sum_{\tau=1}^{\tau=2n} \gamma_\tau^\mu \frac{\partial}{\partial a_\tau} \frac{\partial \Omega}{\partial y_1'} .$$

Nach 24) und 27) werden also die letzten Gleichungen:

$$\sum_{h=1}^{h=n} A_h^{n+\mu}\left[\frac{\partial}{\partial a_h}\frac{\partial \Omega}{\partial y_1'}\right]_1 + \left[\frac{\partial}{\partial a_{n+\mu}}\frac{\partial \Omega}{\partial y_1'}\right]_1 + \gamma_{2n}^\mu \left[\frac{\partial}{\partial a_{2n}}\frac{\partial \Omega}{\partial y_1'}\right]_1 = 0,$$

und bestimmen folglich, da

$$\frac{\partial}{\partial a_{2n}}\frac{\partial \Omega}{\partial y_1'} = \frac{1}{a_{2n}}\frac{\partial \Omega}{\partial y_1'}$$

ist, nur die in $U$ gar nicht vorkommenden $n-1$ Constanten $\gamma_{2n}^\mu$.

Nunmehr ist der verlangte Nachweis vollständig zu Ende geführt und wir können daher unsere Resultate jetzt zusammenfassen in den Satz:

III. *Das Problem I. wird gelöst durch die $n+m$ Differentialgleichungen:*

$$\frac{\partial \Omega}{\partial y_i} - \frac{d}{dx}\frac{\partial \Omega}{\partial y_i'} = 0 , \quad \varphi_k = 0 ,$$

*in denen*

$$\Omega = \lambda_1 \varphi_1 + \lambda_2 \varphi_2 + \cdots \lambda_m \varphi_m$$

*ist. Die vollständige Integration dieser Gleichungen ergiebt, vorausgesetzt, dass das Problem überhaupt möglich ist, $y_1, \cdots y_n$, $\lambda_1, \cdots \lambda_m$ als Functionen von $x$ und von $2n$ willkürlichen Constanten. Von diesen Constanten lassen sich jedoch diejenigen, welche in die Lösungen $y$ eingehen, immer auf $2n-1$ Constante $a_1, a_2, \cdots a_{2n-1}$ reduciren, worauf die $2n^{te}$ Constante $a_{2n}$ nur allein in den Lösungen $\lambda$ als gemeinschaftlicher Factor auftritt. Die Constanten $a_1, a_2, \cdots a_{2n-1}$ sind hierauf so zu bestimmen, dass $y_1, y_2, \cdots y_n$ für $x = x_0$ und $y_2, \cdots y_n$ für $x = x_1$ die gegebenen Grenzwerthe erhalten. Hat man irgend ein bestimmtes Werthsystem dieser Constanten gefunden, welches diese Grenzbedingungen erfüllt, und für $x_1$ einen solchen festen Werth gewählt, dass der Ausdruck $\frac{\partial \Omega}{\partial y_1'}$ für $x = x_1$ nicht Null*

*wird*, *so findet* (abgesehen immer von solchen Ausnahmefällen, die nur unter besonderen Umständen auftreten können und ebendeshalb sich nicht den allgemeinen Regeln unterordnen lassen), *für die entsprechenden Lösungen* $y_1, y_2, \cdots y_n$ *ein wirkliches Maximum oder Minimum des Problems statt, so lange* $x_0$ *zwischen* $x_1$ *und der nächstkleineren Wurzel der Grenzgleichung*:

$$\Delta(x x_1) = 0$$

*bleibt, vorausgesetzt, dass überdies die homogene Function zweiter Ordnung*:

$$2W = -\frac{1}{\left[\frac{\partial\Omega}{\partial y_1'}\right]_1} \sum_{h=1}^{h=n} \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial^2\Omega}{\partial y_h' \partial y_i'} U_h U_i,$$

*deren n willkürliche Argumente* $U_1, \cdots U_n$ *den m Bedingungsgleichungen*:

$$\sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial\Omega}{\partial y_i'} U_i = 0$$

*unterworfen sind, zwischen diesen Grenzen stets negativ oder stets positiv ist. Dagegen tritt weder ein Maximum noch Minimum ein, wenn die letzte Voraussetzung nicht erfüllt ist, und dasselbe gilt im Allgemeinen auch dann, wenn* $x_0$ *bis zu der angegebenen Grenze oder unter dieselbe herabgesunken ist.*

Reduciren sich die Bedingungsgleichungen 1) auf Gleichungen von der Form:

$$\psi_1 - y_1' = 0, \ \psi_2 = 0, \cdots \psi_m = 0,$$

wo $\psi_1, \psi_2, \cdots \psi_m$ frei sind von $y_1$ und $y_1'$, so erhalten die Differentialgleichungen 5) das Integral:

$$\frac{\partial\Omega}{\partial y_1'} = \text{const.},$$

und von den $2n-1$ Integrationsconstanten $a_1, a_2, \cdots a_{2n-1}$ der Lösungen $y$ tritt eine nur in $y_1$ und auch hier nur als additive Constante auf. Die gefundenen Kriterien werden daher in diesem Falle identisch mit dem Satze V von K. p. 260, sobald man, wie es gestattet ist, dort nicht die untere, sondern die obere Grenze $x_1$ als fest gegeben betrachtet.

Die Reciprocitätsverhältnisse, welche zwischen dem Probleme I. und denjenigen Problemen bestehen, die man erhält, wenn man in I. $y_1$ mit irgend einer der $n-1$ übrigen unbekannten Functionen $y_2, \cdots y_n$ vertauscht, liegen so klar zu Tage, dass ein näheres Eingehen auf dieselben ganz unnöthig sein dürfte.

**W. Hankel**, *Über die thermoelektrischen Eigenschaften des Apatits, Brucits, Coelestins, Prehnits, Natroliths, Skolezits, Datoliths und Axinits.* [1])

Die Abhandlung (die 13. in der Reihe meiner elektrischen Untersuchungen), welche ich heute der Gesellschaft vorlege, enthält die Untersuchung der thermoelektrischen Erscheinungen an einer Reihe von Krystallen, welche den verschiedensten Krystallsystemen angehören. Ich werde mich, da ein Eingehen auf das specielle Verhalten der einzelnen geprüften Individuen in diesem Berichte nicht möglich ist, auf die Mittheilung der allgemeinen Resultate beschränken.

1) *Apatit.*

Die Krystalle des Apatits gehören dem hexagonalen Systeme an; sie werden seitlich vorzugsweise begrenzt von den Flächen des ersten und zweiten sechsseitigen Prismas ($\infty P$ und $\infty P2$), und tragen an den Enden der Hauptaxe mehr oder weniger die sogenannte gerade Endfläche $0P$, deren mit den Prismenflächen gebildete Ränder durch die Flächen mehrerer Pyramiden der ersten und zweiten Art abgestumpft werden. Ausserdem finden sich, namentlich an den Krystallen vom St. Gotthardt, Pyramiden- und Prismenflächen der dritten Art.

Die elektrische Vertheilung, die ich stets nur für die erkaltenden Krystalle angeben werde, da sie bei steigender Temperatur gerade die entgegengesetzte ist, entspricht den auf Krystallen des hexagonalen Systems, z. B. auf den Krystallen des Berylles, früher von mir beobachteten, selbst in der Beziehung, dass Krystalle mit gerade entgegengesetzt vertheilten Polaritäten vorkommen.

Die untersuchten Krystalle stammen aus den Smaragd-

1) Vorgetragen in der Sitzung am 4. Febr. 1878.

gruben am Ural, von Ehrenfriedersdorf in Sachsen, von Sulzbach in Tyrol, vom St. Gotthardt, aus Norwegen und von Sadisdorf bei Dippoldiswalde.

Die meisten Apatitkrystalle zeigen an den Enden der Hauptaxe positive und auf den prismatischen Seitenflächen negative Polarität. Dabei tritt aber die eigenthümliche Erscheinung auf, dass das Maximum der negativen Spannung, oder wenn ich es kurz so ausdrücken darf, die elektrischen Pole weder in der Mitte der Flächen $\infty P$, noch in der Mitte der Flächen $\infty P2$, sondern an den von den Flächen $\infty P$ und $\infty P2$ gebildeten Kanten, und zwar, wenn ich aus der geringen Zahl der mit Flächen der Pyramiden und Prismen dritter Art versehenen Krystalle einen Schluss ziehen darf, an denjenigen Kanten von $\infty P$ und $\infty P2$ liegen, an welchen die Flächen der Pyramiden und Prismen dritter Art nicht auftreten. Die Spannung der negativen Elektricität nimmt also auf den Flächen $\infty P$ von den durch die Prismen dritter Art abgestumpften Kanten nach den durch dieselben nicht abgestumpften Kanten hin zu, und auf den Flächen $\infty P2$ von diesen letzteren Kanten nach den abgestumpften hin ab. Es kann die Abnahme der negativen Spannung an diesen abgestumpften Kanten selbst so weit gehen, dass, wie bei einem Krystalle aus Norwegen, daselbst anstatt der negativen, sogar die positive Polarität erscheint [1].

Die Apatitkrystalle von Sadisdorf bilden längere dünnere Nadeln, und bei ihnen tritt die früher von mir bei den längeren säulenförmigen Krystallen der gelben und grünen Berylle bereits beobachtete Erscheinung auf, dass die positive Elektricität nicht blos die Endflächen $0P$ beherrscht, sondern auch auf einzelnen Seitenflächen die negative verdrängt.

Ausser den eben beschriebenen Krystallen des Apatits existirt nun noch eine zweite Gruppe, welche eine der vorhin angegebenen gerade entgegengesetzte elektrische Vertheilung zeigt. Die Substanz dieser Krystalle ist weisslich, kaum durchscheinend, und von zahlreichen Sprüngen parallel den Endflächen $0P$ durchsetzt. Es lag mir ein solcher Krystall sowohl vom St. Gotthardt als auch von Ehrenfriedersdorf vor. Bei ihnen sind also die Endflächen negativ und die Seitenflächen positiv.

1) Ich werde auf analoge Erscheinungen in einer spätern Abhandlung bei der Untersuchung der Krystalle des ebenfalls zum hexagonalen Systeme gehörigen unterschwefelsauren Kalis zurückkommen.

Eine solche Umkehrung der Polaritäten habe ich in meiner 11. Abhandlung [1]) fast bei allen untersuchten Mineralien, welche dem tetragonalen und dem hexagonalen Systeme angehören, nachgewiesen.

2) *Brucit.*

Von dem Brucit oder dem natürlichen Magnesiahydrat standen mir nur blätterige Massen von Texas in Pennsylvanien mit geringen Resten von Krystallflächen zur Verfügung. Nach den auf ihnen gemachten Beobachtungen würden auf einem vollständigen Krystalle die Enden der Hauptaxe nebst den anliegenden Flächenstücken negativ, die Kanten an der Basis nebst den ihnen anliegenden Flächenstücken aber positiv elektrisch sein.

Auf den mit den Flächen $0P$ parallelen Durchgangsflächen erscheint, je nach ihrer Lage zum ganzen Krystall, die negative oder positive elektrische Spannung [2]). Spaltet man eine Brucittafel nach dem mit $0P$ parallelen Durchgange, so wird meistens die eine Durchgangsfläche positiv, die an ihr angelegen habende zweite aber negativ erscheinen; nur wenn die Spaltung durch die Mitte des Krystalles ginge, würden beide Spaltungsflächen positiv erscheinen.

3) *Coelestin.*

Ebenso wie beim Schwerspath, zeigen auch die Coelestinkrystalle ein verschiedenes Wachsthum: ein Theil derselben (die von Strontian Island im Huronsee stammenden) ist mit dem einen Ende der Makrodiagonale, ein anderer Theil (die Krystalle von Wadi el Tih in Egypten und von Girgenti) mit dem einen Ende der Brachydiagonale angewachsen. Die ersteren, welche, gleich den Przibramer Schwerspäthen, meist flache vorzugsweise von den Flächen $0P$, $\infty P$ und $\frac{1}{2}\bar{P}\infty$ gebildete, und in der Richtung der Makrodiagonale sich erstreckende Tafeln bilden, zeigen stärkere elektrische Spannungen als die anderen, welche, gleich den Auvergner Schwerspäthen, in der Richtung der Brachydiagonale verlängerte, vorzugsweise an den Flächen $\breve{P}\infty$ und $0P$ gebildete und am freien Ende von den Flächen $\frac{1}{2}\bar{P}\infty$ und $\infty P$ begrenzte Säulen bilden.

---

1) Abhandl. der K. S. Ges. d. Wiss. Bd. XVIII. S. 203 ff.

2) Vergl. meine Beobachtungen am Gypse, Abhandl. der K. S. Ges. d. Wiss. Bd. XVIII. S. 491.

Der Coelestin gleicht in seiner elektrischen Vertheilung dem mit ihm isomorphen Schwerspathe. Bei der ersten Form sind die Flächen $0P$ und ebenso die Flächen $\infty P$ positiv, die Flächen $\frac{1}{2}\bar{P}\infty$ aber negativ; bei der zweiten Form sind die Flächen $\frac{1}{2}\bar{P}\infty$ und ebenso $\infty P$ negativ, dehnen ihre negative Spannung aber auch wohl noch über den vorderen Theil der meist nur schmalen Flächen $0P$ aus, während die Flächen $\breve{P}\infty$ positive Elektricität zeigen.

Von dem bläulichen Coelestin von Montecchio maggiore bei Vicenza standen mir nur zwei Bruchstücke zur Verfügung; beide zeigten sich stark elektrisch.

4) *Prehnit.*

Die Krystalle des Prehnits gehören dem rhombischen Systeme an; gewöhnlich bilden sie niedrige von $\infty P$ und $0P$ begrenzte Prismen, welche an den Enden der Makrodiagonale noch kleine Flächen $\infty\breve{P}\infty$ tragen. An den Enden der Brachydiagonale erscheinen diese Tafeln gewöhnlich aufgeblättert. Die untersuchten Krystalle stammen von Ratschinges in Tyrol.

Die beiden Endflächen $0P$ sind beim Erkalten negativ, und ebenso auch die beiden gewöhnlich durch kleine Flächen $\infty\breve{P}\infty$ abgestumpften makrodiagonalen Seitenkanten, während dagegen die brachydiagonalen Seitenkanten und die ihnen anliegenden Flächenstücke von $\infty P$ positive Polarität besitzen. Auf den durch Bruch entstandenen oder infolge des Anwachsens mangelhaft ausgebildeten seitlichen Begrenzungsflächen erscheint meistens negative Spannung.

5) *Natrolith.*

Die Natrolithkrystalle gehören dem rhombischen Systeme an. Die von mir untersuchten stammen von Brevig in Norwegen, und stellen verticale, von den Flächen $\infty P$ gebildete und an den Kanten durch sehr schmale Flächen $\infty\bar{P}\infty$ und $\infty\breve{P}\infty$ etwas abgestumpfte Säulen dar, welche an dem oberen Ende die Flächen der Pyramide $P$ tragen, an dem unteren Ende aber verbrochen sind.

Die brachydiagonalen Seitenkanten und die auf ihnen auftretenden Flächen $\infty\bar{P}\infty$ sind beim Erkalten negativ, die makrodiagonalen Seitenkanten und die auf ihnen auftretenden Flächen $\infty\breve{P}\infty$ aber positiv elektrisch. Auf den Flächen des Prismas

$\infty P$ geht also die eine Polarität in die andere über. Das ausgebildete und die Flächen $P$ tragende obere Ende ist positiv elektrisch; die am unteren Ende befindliche unregelmässige Bruchfläche zeigt in den meisten Fällen in Folge der Anwachsung mit diesem Ende, negative Spannung; bei anderer Bildungsweise kann sie aber auch positiv sein.

Die elektrische Erregung der Natrolithkrystalle ist nur gering.

6) *Skolezit.*

Obwohl die Krystalle des Skolezits gar sehr denen des Natroliths gleichen, gehören sie doch nicht dem rhombischen, sondern vielmehr dem monoklinoedrischen Systeme an; jedoch ist der schiefe Axenwinkel nur sehr wenig von einem rechten verschieden. Die Krystalle sind meistens von den Flächen $\infty P$, $\frac{P}{2}$, $-\frac{P}{2}$ und $\infty \mathcal{P}\infty$ begrenzte Zwillinge, deren Zusammensetzungsfläche, ähnlich wie beim Gypse, die Fläche $\infty \mathcal{P}\infty$ ist.

Da ich früher durch die Untersuchung der Aragonite, der Gyps- und Orthoklaskrystalle [1]) gezeigt habe, dass durch Zwillingsbildung die elektrische Vertheilung, wie sie auf den Flächen der einfachen Krystalle erscheint, im Allgemeinen nicht geändert wird, so lassen sich auch aus den auf Zwillingen gemachten Beobachtungen sichere Schlüsse auf die Vertheilung der elektrischen Polaritäten auf den einfachen Krystallen machen.

Die klinodiagonalen Seitenkanten oder die auf ihnen in sehr geringer Breite auftretenden Flächen $\infty \mathcal{P}\infty$ nebst den anliegenden Prismenflächen $\infty P$ sind beim Erkalten positiv, dagegen die an den Enden der Orthodiagonale liegenden ziemlich breiten Flächen $\infty \mathcal{P}\infty$ negativ. Das ausgebildete obere Ende der verticalen Axe ist positiv. Der Skolezit zeigt also dieselbe elektrische Vertheilung wie der Gyps, mit welchem er auch in seiner Zwillingsbildung übereinstimmt. Das verbrochene untere Ende der Säulenaxe ist negativ (wie dies auch z. B. die sächsischen Topaskrystalle zeigen, welche am obern Ende von der Endfläche $0P$, am untern aber von einer Durchgangsfläche begrenzt werden). Die elektrische Erregung der Skolezitkrystalle ist ausserordentlich stark.

An den radialstänglichen Skolezitmassen sind die freien Enden positiv, die am Centrum liegenden verwachsenen negativ.

---

1) Abhandl. d. K. S. Ges. d. Wiss. Bd. XV. und Bd. XVIII.

Auf den seitlichen Flächen erscheint positive oder negative Polarität, je nachdem die Flächen $\infty P$ oder $\infty \mathit{P}\infty$ der einzelnen Individuen in der Oberfläche liegen.

7) *Datolith.*

Die Krystalle des Datoliths gehören gleichfalls zum monoklinoedrischen Systeme; indess weicht der schiefe Axenwinkel noch weniger (nur um 9′) als beim Skolezit von 90° ab. Die von mir untersuchten Datolithkrystalle stammen von Andreasberg und sind am untern Ende, sowie zum grossen Theile auch seitlich von Bruchflächen begrenzt.

In elektrischer Beziehung sind die Endflächen, sowie die klinodiagonalen Seitenkanten und die ihnen anliegenden Theile der Prismenflächen negativ, die orthodiagonalen Seitenkanten nebst den ihnen benachbarten Theilen der Prismenflächen aber positiv. Ist das untere Ende der verticalen Axe verbrochen, so erscheint die Bruchfläche je nach ihrer Lage negativ oder positiv.

8) *Axinit.*

Die Krystalle des Axinits gehören zum triklinoedrischen Systeme; ihre Flächen sind von den Krystallographen in sehr verschiedener Weise gedeutet werden. Betrachtet man, weil bei allen übrigen Krystallen die elektrischen Pole mit den krystallographischen Axen in enger Beziehung stehen, die elektrische Vertheilung als maassgebend für die Stellung der Axinitkrystalle, so ist dieselbe nur mit der alten von Hauy gewählten Stellung im Einklange. Da die von Hauy eingeführte Bezeichnung der einzelnen Flächen in die Lehrbücher der Mineralogie übergegegangen ist, so kann ich mich ohne Weiteres derselben bedienen. Die Flächen *r* und *u* sind hiernach die Flächen eines verticalen Prismas mit rhomboidischem Querschnitte, und die Flächen *p* bilden die doppelt schiefen Endflächen. Die Flächen *s* sind die Flächen eines Pinakoids, welches auf den stumpfen Kanten des rhomboidischen Prismas liegt.

An den sehr stark elektrischen Krystallbruchstücken von Bourg d'Oisans war es unmöglich, die normale Vertheilung der Elektricität zu erkennen, weil dieselbe fast stets durch die Anwachsung und die Bruchflächen gestört wird. Erst nachdem ich ringsum tadellos ausgebildete Axinitkrystalle vom Scopi erlangt hatte, vermochte ich jene Vertheilung festzustellen.

Die beiden schiefen Endflächen $p$ sind beim Erkalten negativ, die beiden scharfen Seitenkanten des rhomboidischen Prismas aber positiv, dagegen die beiden stumpfen, auf welchen die Flächen $s$ liegen, wieder negativ. Ist die Fläche $s$ sehr schmal, so wird öfter die negative Zone auf dieser stumpfen Seitenkante mehr oder weniger unterdrückt; erhält die Fläche $s$ eine etwas grössere Breite, so breitet sich die eben genannte negative Zone mehr aus und kann selbst die positive Elektricität auf der anliegenden Fläche $u$ zum grossen Theile verdrängen.

Mit dieser auf den Krystallen vom Scopi auftretenden Vertheilung stimmt auch die auf einem vollständigen Krystalle von Bourg d'Oisans beobachtete überein.

Die Krystalle von Bourg d'Oisans zeigen fast sämmtlich sehr starke elektrische Spannungen, während auf den durch Chlorit schwärzlich-grün gefärbten Krystallen vom Scopi eben in Folge dieser Beimengung viel geringere elektrische Erregungen auftreten.

---

**W. Knop**, *Ueber eine merkwürdige Umgestaltung der Inflorescenz der Maispflanze bei künstlicher Ernährung.* [1])

(Hierzu eine Abbildung.)

In der Sitzung vom 4. Juni 1877 habe ich der Gesellschaft Bericht erstattet über eine Reihe von Vegetationsversuchen, deren Ergebniss ausweist, dass die höher organisirte Pflanze fähig ist, das zu ihrem Wachsthum erforderliche Quantum Schwefel ebensowohl den unterschwefelsauren Salzen, wie den schwefelsauren zu entziehen. Bei diesen Versuchen hatte ich eine Nährstofflösung in Anwendung gebracht, deren Bestandtheile qualitativ und quantitativ dieselben waren, wie bei derjenigen, welche sich bei allen meinen früheren Versuchen am besten bewährt hatte, jedoch war bei Herstellung der neuen Nährstofflösung die schwefelsaure Talkerde durch unterschwefelsaure ersetzt worden.

Zugleich berichtete ich über den Erfolg einer Versuchsreihe, bei welcher diese Lösung durch einen sehr geringen Zusatz von

1) Vorgetragen und zum Druck übergeben am 30. Juli 1878.

Salpetersäure schwach sauer gemacht worden, um das phosphorsaure Eisenoxyd besser in Lösung zu erhalten und ausgedehntere Versuche über die Aufnahme noch anderer Metalloxyde machen zu können, welche aus neutralen Lösungen durch die darin enthaltenen Phosphate der Alkalien ausgefällt werden.

In meinem Berichte vom 4. Juni 1877 habe ich übrigens (S. 112 unten) ausdrücklich angeführt, dass ich die besten Resultate nur bei Anwendung der möglichst neutralen Lösungen bisher erhalten hätte. Diese Erfahrung hat sich auch bei den neuesten Versuchen von 1877 und 1878 bestätigt.

Dagegen hat sich die angesäuerte Lösung zum Begiessen der Erde in Blumentöpfen bei der Cultur von Zimmerpflanzen durchaus bewährt.

Am Schlusse meines Berichtes habe ich bemerkt, dass Herr H. R. von Sandersleben aus Zwickau es unternommen habe, die quantitative Untersuchung über die Aufnahme der verschiedenen Säuren und Basen aus der mit unterschwefelsaurer Talkerde versetzten Lösung auszuführen. Derselbe hat diese erste Arbeit im Sommer und Winter des vorigen Jahres selbständig in meinem Laboratorio zu Ende geführt.

Die Lösungen, welche von Sandersleben im Sommer 1877 anwandte, hatten eine Concentration von annäherungsweise 2 pro mille. Derselbe machte dabei die Erfahrung, dass diese Concentration bei schwach sauren Lösungen schon zu hoch ist, um ein rasches Wachsthum zu bedingen. S. 111 meines Berichtes habe ich angegeben, dass ich meine Versuche mit Lösungen von 0,5, 1,0 — 2,0 pro mille Concentration angestellt hätte, und dass die letztere, namentlich von Gräsern, noch vollständig ertragen werde. Wenn es nun auch mit diesem Ausdruck seine Richtigkeit hat, so lassen die Resultate, welche von Sandersleben in vorigem Jahre erhielt, doch erkennen, dass es zweckmässiger ist, verdünntere Lösungen anzuwenden, wenn es darauf ankommt, einigermassen erhebliche Erntegewichte zu erzielen.

Diese Erfahrung schien es überhaupt nothwendig zu machen, vor der Ausführung neuer quantitativer Arbeiten erst qualitativ über die Wirkung verdünnterer Lösungen Voruntersuchungen anzustellen und dabei, um die Resultate mit grösserer Sicherheit richtig beurtheilen zu können, zu den neutralen Lösungen zurückzugreifen, deren Wirkung jetzt hinreichend erprobt

ist. Wir entschlossen uns die neuen Lösungen ganz nach der Vorschrift zusammenzusetzen, wie ich sie schon vor einer Reihe von Jahren für die neutrale Lösung angegeben habe, und nur die Abänderung dabei zu treffen, dass dasselbe Quantum Schwefel, welches die ältere Lösung in Form von Bittersalz enthält, der neuen Lösung in Gestalt von unterschwefelsaurer Talkerde hinzugesetzt werde.

Eine Reihe solcher Untersuchungen, bei welchen Lösungen von nur 1 pro mille Concentration in Anwendung kamen, habe ich gemeinschaftlich mit von Sandersleben in diesem Frühjahr vorbereitet und mit demselben im Laufe dieses Sommers durchgeführt. Die Lösungen waren sämmtlich von Letzterem dargestellt und titrirt.

Schon jetzt, Anfangs Juli, hat diese Versuchsreihe das merkwürdige Resultat gegeben, dass sich die ganze Inflorescenz der Maispflanze bei der Ernährung mit einer solchen Lösung umgestaltet. Die Nährstofflösung wurde durch geeignetes Verdünnen concentrirter Lösungen, auf annäherungsweise 1 pro mille Gesammtsalzgehalt, hergestellt, welche die einzelnen Salze in folgenden Proportionen enthielten:

| | In halben Aeq. | Wasserfrei berechnet: |
|---|---|---|
| 5 . $(N_2 Ca O_6)$ | 410 | $410 = 140\ Ca O + 270\ N_2 O_5$ |
| 2 . $(N K O_3)$ | 110 | $101 = 47\ K_2 O + 54\ N O_5$ |
| 2 . $(P K H_2 O_4)$ | 136 | $118 = 47\ K_2 O + 71\ P_2 O_5$ |
| 1 . $(S_2 Mg O_6 + 6 H_2 O)$ | 146 | $92 = 20\ Mg O + 72\ S_2 O_5$ |

In der fertigen verdünnten Nährstofflösung wurde dann noch ein sehr geringes Quantum phosphorsaures Eisenoxyd aufgeschlämmt, so wenig, dass die Flüssigkeit nur soeben eine Trübung erlitt.

Für Keimlinge war bereits im März, April und Mai gesorgt. Dieselben waren alle in destillirtem Wasser erzogen. Da es wegen Ausführung der quantitativen Analysen erwünscht war, wenig phosphorsaures Eisenoxyd als Niederschlag in den Lösungen zu haben und unter solchem Umstande leicht Gelbsucht bei den Pflanzen eintritt, so wurde dem destillirten Wasser, in welchem die Keimlinge vorräthig standen, zwölf Stunden vor ihrer Umpflanzung in die Nährstofflösung einige Tropfen Eisenchloridlösung hinzugesetzt.

Mit diesen Lösungen wurden 3 Glasflaschen von 2,5 Liter Inhalt angefüllt. Die Mündungen waren durch einen dreifach

durchbohrten Spundkork geschlossen. In jede dieser Durchbohrungen wurde eine Pflanze mit Hülfe von Baumwolle, wie bei allen früheren Versuchen, festgestellt. Bei den Versuchen, von denen hier die Rede ist, figurirten also im Ganzen neun Maispflanzen. Der Same war, angeblich, in Ungarn erbauter *Cinquantino*.

In den ersten Tagen des Juli blühten die drei grössten Exemplare. Sie waren um diese Zeit fast gleich entwickelt, die Stämme alle etwas über 60 Centimeter lang. Zwei derselben waren mit einer steril gebliebenen in einem und demselben Gefäss herangewachsen. In dem zweiten Gefäss stand die dritte blühende Pflanze neben zwei unfruchtbaren, während die drei Pflanzen im dritten Gefäss alle zu dieser Zeit noch keine Blüthenanlage zeigten. Alle neun Pflanzen haben eine sattgrüne Farbe.

Die blühenden Exemplare sind in allen Organen sehr regelmässig ausgebildet. Am 5. Juli waren die Blüthenähren bei allen drei Exemplaren aus der obersten Blattscheide hervorgeschoben. Bei allen hingen die langen Griffel schon aus der letzteren heraus, bevor die Spitze der männlichen Blüthe sichtbar war. Die vollständig entwickelten Blüthenähren hatten in den Tagen vom 5. bis 8. Juli eine Länge von 8 Centimetern. Bei allen trockneten aber die Pistille früher ein, als die Antheren stäubten, es konnte daher nicht an eine Befruchtung, auch nicht an eine künstliche, gedacht werden. Die Internodien sind fast alle gleich, 10 Centimeter und etwas darüber lang, nur die obersten ein wenig kürzer. Die grössten Blätter mitten am Stamm haben gegen 30 Centim. Länge und 2—3 Centim. grösste Breite. Zur Zeit der Blüthe sind an den einzelnen Pflanzen 6, 7, 11 Blätter vorhanden.

Die Blüthenähre ist bei allen drei Pflanzen an der Spitze männlich, weiter abwärts steht eine einzelne kurz gestielte männliche Blüthe neben einer gleichfalls einzelnen weiblichen Blüthe auf einem und demselben Torus. Die Blüthen des rein männlichen oberen Theils der Aehre sind sitzend, einzeln und gepaart, die drei obersten steril, alle übrigen enthalten bei den beiden am vollkommensten entwickelten Pflanzen jede drei Staubgefässe, die zur Zeit der Pollenreife länger sind als die Blumenspelzen. Alle Blüthen, männliche und weibliche, sind fast zweizeilig der gebogenen Spindel angedrückt, die männlichen und weiblichen am unteren Ende der Aehre etwas von einander ab-

gerückt. Die beiden grössten Exemplare haben 5 kräftige weibliche Blüthen, aus jeder derselben hängt ein über 10 Centimeter langer vollständig ausgebildeter Griffel herab.

Eine dieser beiden, zum Verwechseln ähnlich gebildeten, Pflanzen habe ich am 5. Juli photographisch aufnehmen lassen. Die Zeichnung, welche dieser Abhandlung beigegeben worden, ist mit Benutzung des Photogramms angefertigt.

Fasst man die Eigenthümlichkeiten der neuen Pflanze in den Ausdrücken der üblichen Terminologie zusammen und vergleicht die Diagnose mit der der Gattung *Zea*, so findet man die Abweichung so stark, dass man sie dieser Gattung nicht mehr einreihen kann.

Die Diagnose der Gattung *Zea*, entlehnt der *Synopsis florae german. et helvet., auctore Koch*, lautet, so weit sie die Inflorescenz betrifft, *Zea*: *Monoica. Flores masculi terminales, racemoso-paniculati. Flores feminei in spicas axillares, vaginis involutas, dispositi. Caryopsides subrotundo-reniformes, in series octo, per paria approximatas, dispositi, axi carnoso insertae.*

Dagegen würde die Beschreibung der Inflorescenz der neuen Maispflanze folgendermassen ausfallen:

*Spica simplex, terminalis, monoica, apice mascula, deorsum usque ad basin utriusque generis. Flores masculi superiores: sessiles, solitarii, geminique, subimbricati; inferiores: pedicellati, cum floribus femineis, plerumque remotis, solitariis, alternis conjugati. Flores masculi et feminei usque ad efflorescentiam rhachidi arcuato-flexuosae, excisae bifariam arcte adpressi.*

Diese Umgestaltung geschah bei allen drei Pflanzen in einem Sprunge, so dass bei keiner einzigen um die oben angegebene Zeit eine vermittelnde Stufe sich gezeigt hätte. Merkwürdiger Weise aber traten am 20. Juli an der dürftigsten unter den drei blühenden Pflanzen aus einer der unteren Blattscheiden die Spitzen der Hüllen eines Kolbens hervor.

Diese Pflanze ist unter den drei blühenden diejenige, welche mit der photographirten in einem und demselben Gefäss herangewachsen war. Sie blieb in der späteren Entwicklung der Blüthe etwa 4—5 Tage hinter den anderen beiden zurück. Keine ihrer männlichen Blüthen öffnete sich freiwillig und bei den meisten fehlten, wie eine schliesslich am 27. Juli mit der ganzen Aehre vorgenommene Section zeigte, die Staubfäden. Die weib-

lichen Blüthen dagegen waren eben so vollkommen ausgebildet, wie bei den anderen beiden Pflanzen.

Vom 1. Aug. an machten sich die Folgen eintretender mangelhafter Ernährung bei allen Pflanzen bemerkbar, die Blätter vergrösserten sich nicht mehr, einige fingen bereits an zu trocknen. Da der Versuch damit sein Ende erreicht hatte, so hat von Sandersleben die anderen Maispflanzen, aus denen keine Blüthe hervorgetreten war, sämmtlich secirt und gefunden, dass alle ohne Ausnahme in den obersten Blattscheiden eine zwar verkümmerte, aber mit der beschriebenen Inflorescenz ganz gleich gestaltete enthalten. Es sind dieselben Aehren, aber nur von 3—5 Centimeter Länge, die männlichen Blüthen finden sich meistens nur durch einige Blüthenspelzen angedeutet, einige weibliche haben dagegen lange Griffel. Wir haben alle diese Pflanzen, die 3 blühenden und diese sechs mit verkümmerten Blüthen versehenen aufgelegt.

Dass bei monöcischen Pflanzen Dislocationen der männlichen und weiblichen Blüthen vorkommen, ist eine gewöhnliche Erscheinung. Aber wenn auch mehr oder weniger ähnliche Gebilde in der Natur längst beobachtet sein sollten, so sind diese neun Maisexemplare jedenfalls die ersten Pflanzen, welche eine tief eingreifende Formveränderung unter Wachsthumsbedingungen erlitten haben, welche, so weit sie materieller Natur sind, dem Experimentator qualitativ und quantitativ vollständig bekannt sind. Dazu kommt noch der Umstand, dass das ganze Verfahren, bei welchem diese Formveränderung zu Stande kam, so einfach ist, dass man nicht einsieht, warum bei Wiederholung desselben nicht dasselbe Resultat wieder erzielt werden sollte, wenn es auch noch einige Anstrengungen kosten könnte, die Reihefolge der Bedingungen festzustellen, unter denen man es constant wieder erhält.

Es ist ferner nicht anzunehmen, dass mit der Maispflanze gerade die einzige Pflanzenspecies aus dem System herausgegriffen worden wäre, die solcher Umwandlungen fähig ist. Gelänge es aber, auf dem eingeschlagenen Wege allgemeiner tief eingreifende Formveränderungen durch materielle Mittel hervorzubringen und diese durch fortgesetzte Züchtung constant zu machen, so würde das Resultat erheblich genug sein. Ich werde in den nächsten Jahren diese Versuche erneuern und erweitern.

Die Frage, ob die Gegenwart der Unterschwefelsäure unter

den Nährstoffen als das ursächliche Moment der Formveränderung anzusehen ist, kann mit absoluter Gewissheit augenblicklich noch nicht beantwortet werden. Indessen müsste eine kaum glaubliche Complication von Zufällen eingetreten sein, wenn diese Maispflanzen sämmtlich ohne Mitwirkung der Nährstoffe alle dieselbe Formveränderung erlitten hätten, und dieses um so mehr, als diesen neuen Versuchen eine lange Reihe anderer vorausging, durch welche ich zeigte, dass die vier Basen ebenso wie die vier Säuren, welche zur Ernährung der grünen Pflanze nothwendig sind, in mannigfaltigen Verhältnissen abgeändert werden können, ohne dass man dadurch irgend welche Formveränderung hervorbrächte. Jedes einzelne Glied der Nährstoffreihe hat bei den früheren Versuchen quantitativ die mannigfaltigsten Modificationen erlitten, und selbst in den Fällen, wo ein solches völlig ausgelassen wurde und Krankheitserscheinungen eintraten, ist die specifische Form der Pflanze stets intact geblieben. Ebenso verhielt es sich in allen den Fällen, wo ich die vier Basen Kali, Kalk, Talkerde und Eisenoxyd und die vier Säuren Phosphorsäure, Schwefelsäure, Kohlensäure und Salpetersäure durch verwandte Substanzen ganz oder theilweise ersetzt hatte.

Das ganze Verfahren, bei welchem diese neun Maispflanzen entstanden sind, ist leicht zu wiederholen, so dass diese Frage sehr bald vollständig zu erledigen ist.

Es ist denkbar, dass die Unterschwefelsäure direct modificirend auf die Bildung und Wanderung der Eiweisskörper in der Pflanze einwirkt. Vielleicht aber wirkt sie nur mittelbar, indem sie einen Einfluss auf die Aufnahme der übrigen Nährstoffe ausübt.

Ich erinnere daran, dass ich der Gesellschaft in der Sitzung vom 23. April 1875 mittheilte, auf welchem Wege Dr. Dworzack und ich bei einer gemeinschaftlichen Untersuchung festgestellt haben, dass bei Gegenwart von Chlorkalium und Chlorcalcium unter den Nährstoffen viel weniger Basen als bei Anwendung chlorfreier Nährstofflösungen von den Pflanzen aufgenommen werden, so dass der Pflanzensaft durch den Zusatz von Chloriden viel saurer wird, als sonst. Ob eine solche mittelbare Wirkung der Unterschwefelsäure auch hier vorhanden ist, darüber werden die qualitativen Analysen, welche von Sandersleben mit

den Rückständen der Nährstofflösungen vornehmen wird, demnächst Aufschluss geben.

Jedenfalls kann die Fortsetzung dieser Versuche darüber entscheiden, ob die Form, in welcher der Schwefel der Pflanze dargeboten wird, auf die Gestaltung der Hauptorgane der Pflanze einen so bedeutenden Einfluss ausübt. In Zukunft werde ich auch die übrigen niederen Sauerstoffsäuren des Schwefels, mit Ausnahme der schwefligen Säure, deren Salze sich schnell zu schwefelsauren Verbindungen oxydiren, und ebenso die unterphosphorige Säure und phosphorige Säure noch mit in Betracht ziehen. Was die unterphosphorige und phosphorige Säure anbetrifft, so hat Ville (s. Biedermann's agric.-chem. Centralbl. Bd. 8. S. 379) zwar angegeben, dass er mit deren Salzen Vegetationsversuche angestellt habe, die ein negatives Resultat gegeben hätten, allein es kann sich mit den Wirkungen dieser Salze in vollständigen Nährstofflösungen möglicherweise anders verhalten. Man braucht sich bei solcher Erweiterung der Versuche nicht auf reine Wassercultur zu beschränken und kann solche Culturen auch in Blumentöpfen ausführen, deren Erde man mit Nährstofflösungen von bekannten Gehalten der einzelnen Salze begiesst. Die unterschwefelsauren Salze oxydiren sich nicht leicht und erhalten sich vielleicht selbst im porösen Erdreich lange genug, um ihren Einfluss bei der Ernährung der Pflanze geltend zu machen. Einige solcher Versuche mit unterschwefelsaurer und unterschwefligsaurer Magnesia habe ich im Juli noch eingeleitet.

---



**C. Neumann.** *Entwicklung nach Elementarpotentialen.*[*]

Die hier mitzutheilenden Betrachtungen stützen sich auf die »*Untersuchungen*[1] *über das Logarithmische und Newton'sche Potential*«, welche der Verf. im Jahre 1877 im Verlage von Teubner, und auszugsweise in den Math. Annalen Bd. 13 publicirt hat.

§ 1.

## Die gegebene geschlossene Curve $\sigma$.

Um für unsere Untersuchungen — wenn auch vielleicht auf Kosten einer zu starken Specialisirung — eine feste und wohldefinirte Basis zu erhalten, wollen wir annehmen, dass die gegebene geschlossene Curve $\sigma$ *zweiten Ranges* ist, und $\vartheta$, $\vartheta'$, $\vartheta''$ *stetig* sind[2]. Längs dieser Curve $\sigma$ kann, wie aus meiner Methode des Arithmetischen Mittels hervorgeht (vgl. d. Math. Ann. 13, Seite 287), die gegebene Masse *Eins* in solcher Weise vertheilt werden, dass ihr Potential auf alle *innern* Puncte *constant* ist. Auch wird sich (vgl. d. Math. Ann. 13, S. 287) eine solche Vertheilung nur auf *einerlei* Art bewerkstelligen lassen. Bezeichnet man also die Dichtigkeit dieser Massenvertheilung mit $\gamma$, und den constanten Werth ihres innern Potentials mit $\Gamma$, so ist $\gamma$ eine der Curve $\sigma$ eigenthümliche Function, und $\Gamma$ ein ihr zugehöriger constanter Parameter.

Je nach Beschaffenheit der Curve $\sigma$ wird der Parameter $\Gamma$

---

*) Vorgetragen am 3. Juni 1878; zum Druck übergeben am 23. Sept. 1878.

1) Dieses Werk soll im Folgenden, sobald dasselbe zu citiren ist, kurzweg mit »*Unt.*« bezeichnet werden.

2) Hier bezeichnet $\vartheta$ dasjenige *Azimuth*, unter welchem eine bewegliche Tangente der Curve gegen die $x$-Axe des Coordinatensystems geneigt ist. Denkt man sich ferner die *Bogenlänge* des Berührungspunctes dieser Tangente mit $\sigma$ bezeichnet, so sollen unter $\vartheta'$ und $\vartheta''$ die beiden Differentialquotienten $\frac{d\vartheta}{d\sigma}$ und $\frac{d^2\vartheta}{d\sigma^2}$ verstanden werden.

positiv, null, oder negativ sein; wobei zu bemerken, dass der Fall $\Gamma =$ *Null* einen *Ausnahmefall* constituirt, für welchen manche der sonst stattfindenden allgemeinen Sätze ihre Gültigkeit verlieren. Um die hieraus erwachsenden Schwierigkeiten resp. Weitläufigkeiten zu vermeiden, wollen wir jenen singulären Fall ganz ausschliessen, also festsetzen,

*die Curve $\sigma$ solle geschlossen und zweiten Ranges sein, ferner solle jede der Functionen*

(1.) $$\vartheta, \vartheta', \vartheta''$$

*stetig sein, und überdies solle endlich die Curve von solcher Beschaffenheit sein, dass ihr Parameter $\Gamma$ einen von Null verschiedenen Werth hat.*

## § 2.

## Einleitende Betrachtung.

Ist auf der Curve $\sigma$ irgend eine Function $f$ vorgeschrieben, welche längs $\sigma$ stetig ist, so existirt immer eine *Potentialfunction* $W$ des innern Gebietes (und nur eine einzige), welche auf $\sigma$ mit $f$ identisch ist (vgl. d. Math. Ann. 13, S. 289). Dabei ist, wie üblich, unter einer Potentialfunction des innern Gebietes das Potential irgend welcher Massen zu verstehen, die *auf* oder *ausserhalb* $\sigma$ liegen.

Dass die Ableitungen $\frac{\partial W}{\partial x}$, $\frac{\partial W}{\partial y}$ dieser Function $W$ in jedem *innern* Puncte $i$ *stetig* sind, unterliegt keinem Zweifel. Fraglich aber bleibt, ob diese Stetigkeit auch dann noch fortdauert, wenn man den Punct $i$ der gegebenen Curve $\sigma$ sich ins Unendliche nähern lässt. Namentlich steht in Frage, ob der nach der innern Normale $n$ gebildete Differentialquotient $\frac{\partial W}{\partial n}$ längs der Curve stetig oder unstetig ist.

Um näher hierauf einzugehen, betrachten wir zunächst den speciellen Fall des *Kreises*. Die Curve $\sigma$ sei dargestellt durch eine mit dem Radius $A$ um den Anfangspunct des Coordinatensystems beschriebene Kreisperipherie, und an Stelle der rechtwinkligen Coordinaten mögen die Polarcoordinaten eingeführt sein:

$$(2.)\qquad \begin{aligned} x &= r\cos\varphi\,, \\ y &= r\sin\varphi\,. \end{aligned}$$

Ferner sei die auf dem Kreise vorgeschriebene Function $f$ definirt durch die Reihe:

$$(3.)\qquad f = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left[\frac{\cos\varphi}{1^2} + \frac{\cos 3\varphi}{3^2} + \frac{\cos 5\varphi}{5^2} + \cdots\right];$$

alsdann hat $f$ in je zwei Puncten $(\varphi)$ und $(2\pi - \varphi)$, die zur $x$-Axe *symmetrisch* liegen, *einerlei* Werth, nämlich den Werth $\varphi$; so dass also die peripherische Ableitung von $f$ (d. i. die Ableitung nach der Bogenlänge) *unstetig* sein wird im Puncte $(\varphi = 0)$.

Die Potentialfunction $W$ des innern Gebietes, welche auf der Peripherie $\sigma$ mit dieser vorgeschriebenen Function $f$ identisch wird, kann sofort angegeben werden. Sie lautet:

$$(4.)\qquad W = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left[\frac{r}{A}\,\frac{\cos\varphi}{1^2} + \left(\frac{r}{A}\right)^3\frac{\cos 3\varphi}{3^2} + \left(\frac{r}{A}\right)^5\frac{\cos 5\varphi}{5^2} + \cdots\right].$$

Hieraus folgt:

$$(5.)\qquad \frac{\partial W}{\partial r} = -\frac{4}{\pi}\left[\frac{r}{A}\,\frac{\cos\varphi}{r} + \left(\frac{r}{A}\right)^3\frac{\cos 3\varphi}{3r} + \left(\frac{r}{A}\right)^5\frac{\cos 5\varphi}{5r} + \cdots\right];$$

und hieraus folgt weiter, wenn man $r = A$ setzt, und die *innere* Normale des Kreises mit $n$ bezeichnet:

$$(6.)\qquad \frac{\partial W}{\partial n} = \frac{4}{\pi A}\left[\frac{\cos\varphi}{1} + \frac{\cos 3\varphi}{3} + \frac{\cos 5\varphi}{5} + \cdots\cdot\right];$$

woraus ersichtlich, dass $\frac{\partial W}{\partial n}$ an der Stelle $(\varphi = 0)$ *unendlich gross*, mithin *unstetig* wird. — Wir gelangen daher zu folgendem Resultat.

(7.) *Ist auf einer Kreisperipherie eine Function $f$ vorgeschrieben, und bezeichnet $W$ diejenige Potentialfunction des innern Gebietes, welche auf der Peripherie mit $f$ identisch ist, so wird, wenn auch $f$ stetig ist, dennoch der* (nach der innern Normale $n$ gebildete) *Differentialquotient* $\frac{\partial W}{\partial n}$ *längs der Peripherie unstetig sein können.*

Gleichzeitig drängt sich, was die von uns betrachtete Function $W$ (4.) betrifft, die Vermuthung auf, dass die an der Stelle $(\varphi = 0)$ constatirte Unstetigkeit von $\frac{\partial W}{\partial n}$ in Zusammenhang stehen

könne mit derjenigen Unstetigkeit, welche die peripherische Ableitung der vorgeschriebenen Function $f$ (3.) an *ebenderselben* Stelle besitzt, und dass jene Unstetigkeit von $\frac{\partial W}{\partial n}$ wahrscheinlich fortfallen würde, wenn man festsetzt, dass nicht allein die Function $f$ selber, sondern auch ihre peripherische Ableitung längs der Curve stetig sein solle. — In der That werden wir diese Vermuthung durch das erste Theorem des folgenden § der Hauptsache nach bestätigt finden.

## § 3.

## Ueber die normale Ableitung der Potentialfunctionen des innern oder äussern Gebietes der Curve $\sigma$.

**Theorem.** — *Ist die auf der Curve $\sigma$ (1.) vorgeschriebene Function $f$ von solcher Beschaffenheit, dass*

(8.) *$f, f'$ stetig sind, und $f''$ abtheilungsweise stetig,*[1])

*und bezeichnet $W$ diejenige Potentialfunction des innern Gebietes, welche auf $\sigma$ mit $f$ identisch ist, so wird die nach der innern Normale $n$ genommene Ableitung*

$$(9.)\qquad \frac{\partial W}{\partial n}$$

*längs $\sigma$ stetig sein.*

*Oder genauer und zugleich vollständiger ausgedrückt: Es werden alsdann*

$$(10.)\qquad \left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)_{is}, \quad \left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)_{is} \quad \text{und} \quad \left(\frac{\partial W}{\partial t}\right)_{is}, \quad \left(\frac{\partial W}{\partial n}\right)_{is}$$

*Functionen sein, welche längs $\sigma$ stetig sind. Dabei bezeichnet $t$ die im peripherischen Puncte $s$ construirte Tangente, ebenso wie $n$ die daselbst errichtete innere Normale vorstellt.*

*Beweis*[2]). — Zunächst ergiebt sich aus der Methode des Arithmetischen Mittels, dass die in Rede stehende Potential-

---

1) Unter $f', f''$ sind die *peripherischen* (d. i. die nach der *Bogenlänge* genommenen) Ableitungen von $f$ zu verstehen. Vgl. übrigens die I. Bemerkung auf Seite 89.

2) Dieser Beweis stützt sich auf ein noch nicht publicirtes Manuscript. Und auf dieses Manuscript beziehen sich auch mehrere Citate (wie z. B. das Citat: »Seite $\alpha$ 15«), denen man im gegenwärtigen § begegnet.

function $W$ darstellbar ist als das Potential einer auf $\sigma$ ausgebreiteten Doppelbelegung, und dass das Moment $\mu$ dieser Doppelbelegung längs $\sigma$ *stetig* ist [vgl. die »*Unt.*« Seite 201]. Hieraus folgt sofort:

(11.) $$\pi\mu_s = W_{is} - W_s,$$ [vgl. Seite $\alpha$. 15]

oder weil $W_{is}$ (nach der Definition von $W$) identisch mit $f_s$ ist:

(12.) $$\pi\mu_s = f_s - W_s.$$

Nach der Voraussetzung (8.) sind nun

($\alpha$.) $f_s$, $f_s'$ *stetig*, und $f_s''$ *abtheilungsweise stetig*.

Anderseits folgt aus den Voraussetzungen (8.) und (1.), dass

($\beta$.) $W_s$, $W_s'$, $W_s''$ *stetig* sind. [vgl. d. Theorem, Seite $\alpha$. 54.]

Und mit Rücksicht auf diese Eigenschaften ($\alpha$.), ($\beta$.) folgt aus (12.), dass

(13.) $\mu_s$, $\mu_s'$ *stetig* sind, und $\mu_s''$ *abtheilungsweise stetig* [1]).

Solches constatirt, ergiebt sich aber sofort das zu beweisende Theorem, [nämlich durch Anwendung der Sätze Seite $\alpha$. 68, 69].

Dem Theoreme (10.), welches das *innere* Gebiet der Curve $\sigma$ betrifft, ist mit Bezug auf das *äussere* Gebiet folgendes analoge Theorem zur Seite zu stellen.

**Theorem.** — *Hält man fest an der Voraussetzung* (8.), *und bezeichnet man mit $W$ diejenige Potentialfunction des äussern Gebietes, welche auf $\sigma$ mit $f$ identisch ist, so sind*

(14.) $$\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)_{as},\quad \left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)_{as} \quad\text{und}\quad \left(\frac{\partial W}{\partial t}\right)_{as},\quad \left(\frac{\partial W}{\partial n}\right)_{as}$$

*längs der Curve $\sigma$ stetig.*

## § 4.

## Zusammenstellung derjenigen Sätze, welche den weiterhin anzustellenden Untersuchungen als Fundament dienen.

(15.) .... **Erster Fundamentalsatz.** — *Ist längs der Curve $\sigma$* (1.) *eine stetige Function $f$ vorgeschrieben, so existirt immer*

1) Selbstverständlich sollen $W_s'$, $W_s''$ und $\mu_s'$, $\mu_s''$ die *peripherischen* Ableitungen der Functionen $W_s$ und $\mu_s$ vorstellen, d. i. die Ableitungen dieser Functionen nach der Bogenlänge des Punctes $s$.

*eine Potentialfunction des* ä u s s e r n *Gebietes, und immer nur eine einzige, welche auf σ mit f identisch ist.*

*NB. Für das* i n n e r e *Gebiet gilt derselbe Satz.*

Diese Sätze sind bewiesen in den »*Unt.*« (vgl. namentlich auch die Math. Ann. Bd. 13, Seite 288–290).

(16.) · · · · **Zweiter Fundamentalsatz.** — *Ist eine Potentialfunction des* ä u s s e r n *Gebietes sammt ihrer peripherischen Ableitung längs σ* s t e t i g [und ihre zweite peripherische Ableitung abtheilungsweise stetig], *so wird ihre normale Ableitung ebenfalls längs σ* s t e t i g *sein.*

*NB. Für das* i n n e r e *Gebiet gilt derselbe Satz.*

Diese Sätze sind identisch mit den Theoremen (10.) und (14.) des vorhergehenden §. Ich habe bei dieser Reproduction die Bedingungen, dass $f$ und $f'$ *stetig* sein sollen, vorzugsweise betont, hingegen die Bedingung, dass $f''$ *abtheilungsweise stetig* sein solle (welche, wenn $f$, $f'$ stetig sind, in den meisten Fällen schon von selber erfüllt sein wird), nur in Parenthese beigefügt. Und in ähnlicher Weise werde ich auch bei den folgenden Stäzen verfahren, um auf diese Weise die eigentliche Hauptsache deutlicher hervortreten zu lassen.

(17.) · · · · **Dritter Fundamentalsatz.** — *Ist eine Potentialfunction des* ä u s s e r n *Gebietes sammt ihrer peripherischen Ableitung längs σ* s t e t i g [und ihre zweite peripherische Ableitung abtheilungsweise stetig], *so wird dieselbe immer darstellbar sein als das Potential einer auf σ ausgebreiteten einfachen Belegung. Und zwar wird die Dichtigkeit dieser Belegung längs σ* s t e t i g *sein.*

*NB. Für das* i n n e r e *Gebiet gilt derselbe Satz. Denkt man sich ferner* z w e i *Potentialfunctionen resp. des* ä u s s e r n *und* i n n e r n *Gebietes, welche den in Rede stehenden Bedingungen entsprechen, und überdies* l ä n g s *σ* i d e n t i s c h *sind, so werden beide darstellbar sein als die Potentiale* e i n *und* d e r s e l b e n *Belegung.*

*Beweis.* — Die in (17.) gemachten Voraussetzungen sind identisch mit denen in (16.). Ist also $U$ die diesen Voraussetzungen entsprechende Potentialfunction des *äussern*, und $V$ diejenige des *innern* Gebietes, so werden nach (16.)

$$(\alpha.) \qquad \frac{\partial U}{\partial N} \quad \text{und} \quad \frac{\partial V}{\partial n} \qquad \text{($N$ die äussere und $n$ die innere Normale der Curve.)}$$

längs $\sigma$ *stetig* sein. Gleiches gilt von $U$ und $V$ selber. Machen wir ferner, um uns unsere Aufgabe zu erleichtern, die Annahme, dass $U$ und $V$ längs der Curve *gleichwerthig* sind, so ist:

$$(\beta.)\qquad U_s = V_s\,,\ ^{1)}$$

wo $s$ einen beliebigen Punct der Curve $\sigma$ bezeichnet.

Sind nun $a$ und $i$ zwei beliebige Puncte, resp. *ausserhalb* und *innerhalb* $\sigma$ gelegen, und sind $T_s^a$ und $T_s^i$ die Logarithmen der reciproken Werthe von $(as)$ und $(is)$, so gelten die bekannten Formeln [vgl. die »*Unt.*« S. 19, (11. $\delta$, $\varepsilon$) und S. 21, (12. $\delta$, $\varepsilon$)]:

$$(\delta.)\qquad 0 = \int\left(V\frac{\partial T^a}{\partial n} - T^a\frac{\partial V}{\partial n}\right) ds\,,$$

$$(\varepsilon.)\qquad 2\pi\, V_i = \int\left(V\frac{\partial T^i}{\partial n} - T^i\frac{\partial V}{\partial n}\right) ds\,,$$

$$(\Delta.)\qquad 0 = \int\left(U\frac{\partial T^i}{\partial N} - T^i\frac{\partial U}{\partial N}\right) ds\,,$$

$$(\mathrm{E}.)\qquad 2\pi\, U_a = \int\left(U\frac{\partial T^a}{\partial N} - T^a\frac{\partial U}{\partial N}\right) ds\,,$$

($ds$ das beim Puncte $s$ gelegene Element der gegebenen Curve $\sigma$.)

wo bei den Grössen *unter* den Integralzeichen, wie z. B. bei den $T$, der Index $s$ als selbstverständlich unterdrückt ist. *Und zwar sind diese Formeln* ($\delta$.), ($\varepsilon$.), ($\Delta$.), (E.) *völlig correct, weil die Grössen* ($\alpha$.), ($\beta$.) *längs $\sigma$ stetig sind.*

Durch Addition von ($\delta$.), (E.) ergiebt sich, mit Rücksicht auf ($\beta$.):

$$(\zeta.)\qquad 2\pi\, U_a = -\int T^a\left(\frac{\partial U}{\partial N} + \frac{\partial V}{\partial n}\right) ds\,;$$

und ebenso ergiebt sich durch Addition von ($\varepsilon$.), ($\Delta$.):

$$(\eta.)\qquad 2\pi\, V_i = -\int T^i\left(\frac{\partial U}{\partial N} + \frac{\partial V}{\partial n}\right) ds\,.$$

---

1) Durch diese Annahme wird die Allgemeinheit unseres Beweises *nicht* beeinträchtigt. Denn ist z. B. $U$ irgend eine *beliebige*, den Voraussetzungen unseres Satzes entsprechende Potentialfunction des *äussern* Gebietes, so können wir uns [nach (15.)] jederzeit eine Potentialfunction $V$ des *innern* Gebietes construirt denken, welche mit $U$ längs der Curve $\sigma$ gleichwerthig ist. Und der Beweis, den wir zu geben im Begriff sind, zeigt alsdann, dass unser Satz richtig ist für jene *beliebige* Potentialfunction $U$. — In entsprechender Weise aber übersieht man andererseits, dass der hier mitzutheilende Beweis auch gültig ist für eine *beliebige* Function $V$.

Setzt man also zur Abkürzung:

$$(\vartheta.)\qquad q = -\frac{1}{2\pi}\left(\frac{\partial U}{\partial N} + \frac{\partial V}{\partial n}\right),$$

so erhält man:

$$(\iota.)\qquad \begin{aligned} U_a &= \int T^a q\,ds, \\ V_i &= \int T^i q\,ds. \end{aligned}$$

Diese Formeln aber zeigen, dass $U_a$ und $V_i$ angesehen werden können als die Potentiale einer gewissen auf $\sigma$ ausgebreiteten Massenbelegung. Die Dichtigkeit $q$ dieser Belegung hat den Werth ($\vartheta$.), und ist also, ebenso wie die Grössen ($\alpha$.), längs $\sigma$ *stetig*. — W. z. z. w.

(18.) · · · · **Vierter Fundamentalsatz.** — *Ist die auf der Curve $\sigma$* (1.) *gegebene Function $f$ sammt ihrer peripherischen Ableitung längs $\sigma$ stetig* [und ihre zweite peripherische Ableitung abtheilungsweise stetig], *so wird dieselbe immer darstellbar sein als das Potential einer auf $\sigma$ ausgebreiteten einfachen Belegung. Auch wird die Dichtigkeit dieser Belegung längs $\sigma$ stetig sein.*

Beweis. — Um den Beweis zu führen, brauchen wir uns nur diejenige Potentialfunction vorzustellen, von welcher der Satz (15.) handelt, d. i. diejenige Potentialfunction $U_a$, welche auf $\sigma$ mit der vorgeschriebenen Function $f$ gleichwerthig ist. Für dieses $U_a$ ergiebt sich alsdann nach dem vorhergehenden Satz (17.) die Darstellung:

$$(\varkappa.)\qquad U_a = \int T^a q\,ds,$$

oder, genauer geschrieben:

$$(\varkappa.)\qquad U_a = \int T_s^a q_s\,ds,$$

wo $q_s$ längs $\sigma$ *stetig* ist. Hieraus aber folgt, wenn man den Punct $a$ nach irgend einem peripherischen Punct $\sigma$ rücken lässt:

$$(\lambda.)\qquad U_\sigma = \int T_s^\sigma q_s\,ds,$$

oder, weil $U$ auf der Curve gleichwerthig mit $f$, also $U_\sigma = f_\sigma$ ist:

$$(\mu.)\qquad f_\sigma = \int T_s^\sigma q_s\,ds; \text{ w. z. z. w.}$$

*Bemerkung.* — Der Uebergang von ($\varkappa$.) zu ($\lambda$.) unterliegt keinem Bedenken. Denn da $q$ *stetig* ist, so wird das Potential

(ν.) $$\int T_s^a q_s \, ds \, ,$$

sobald man $a$ nach $\sigma$ rücken lässt, gegen einen *bestimmten endlichen* Werth convergiren. Andererseits aber ist $U$ seiner Definition nach auf der Curve $\sigma$ mit $f$ identisch; und es wird also

(ξ.) $$U_a \, ,$$

sobald man $a$ nach $\sigma$ rücken lässt, gegen den *bestimmten endlichen* Werth $f_\sigma$ convergiren.

Da nun die die von $a$ abhängenden Functionen (ν.) und (ξ.) für alle Punkte $a$ identisch sind, so müssen jene beiden *endlichen* Werthe, gegen welche sie bei Verkleinerung der Entfernung $(a\sigma)$ convergiren, ebenfalls identisch sein. W. z. z. w.

§ 5.

## Die den trigonometrischen Functionen $Y$ entsprechenden Elementarpotentiale $Z$.

**Die Coordinate** $\omega$. — Zur Ortsbestimmung eines Punktes auf der gegebenen Curve $\sigma$ wollen wir nicht geradezu die *Bogenlänge* $\sigma$, sondern eine *Function* derselben:

(19.a) $$\omega = \Phi(\sigma)$$

verwenden, *welche die Eigenschaft hat, bei der Umlaufung der Curve um* $2\pi$ *anzuwachsen.* Aus (19. a) mag durch Umkehrung sich ergeben:

(19.b) $$\sigma = \varphi(\omega) \, ,$$

und hieraus durch Differentiation:

(19. c) $$d\sigma = \varphi'(\omega) \, d\omega = \psi(\omega) \, d\omega = \psi \, d\omega.$$

Über die Abhängigkeit zwischen $\omega$ und $\sigma$ machen wir folgende Voraussetzungen:

(20. α) *$\omega$ soll eine stetige Function von $\sigma$, und $\sigma$ eine stetige Function von $\omega$ sein.*

(20. β) *Die in (19. c) auftretende Function $\psi(\omega)$ soll eine stetige Function von $\omega$ sein; und Gleiches soll gelten von ihrem*

*reciproken Werth* $\frac{1}{\psi(\omega)}$. [Überdies soll $\psi'(\omega)$ eine abtheilungsweise stetige Function von $\omega$ sein][1]).

(21.) .... **Bemerkung.** — Man nennt eine Function *auf der Curve stetig*, wenn sie eine stetige Function der Bogenlänge ist. Ist aber solches der Fall, so wird sie [nach (20.$\alpha$)] auch eine stetige Function von $\omega$ sein, also z. B. entwickelbar sein nach den trigonometrischen Functionen von $\omega$, d. i. nach den Cosinus und Sinus der Vielfachen von $\omega$.

Diese trigonometrischen Functionen bezeichnen wir mit dem Buchstaben $Y$, indem wir setzen:

(22)
$$Y^{(1)} = \frac{\sin \omega}{\sqrt{\pi}}, \qquad Y^{(3)} = \frac{\sin 2\omega}{\sqrt{\pi}}, \qquad Y^{(5)} = \frac{\sin 3\omega}{\sqrt{\pi}}, \ldots$$
$$Y^{(2)} = \frac{\cos \omega}{\sqrt{\pi}}, \qquad Y^{(4)} = \frac{\cos 2\omega}{\sqrt{\pi}}, \qquad Y^{(6)} = \frac{\cos 3\omega}{\sqrt{\pi}}, \ldots$$

und ferner:

$$Y^{(0)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.$$

Alsdann ist:

(23. $a$)
$$\int_0^{2\pi} Y^{(n)} Y^{(p)} \, d\omega = O^{(n,p)},$$

oder, mit Rücksicht auf (19. $c$):

(23. $b$)
$$\int Y^{(n)} Y^{(p)} \frac{d\sigma}{\psi} = O^{(n,p)},$$

(Die Integration ausgedehnt gedacht über sämmtliche Elemente $d\sigma$ der gegebenen Curve.)

---

1) Ist die gegebene Curve $\sigma$ eine *Ellipse*, so werden die in den Math. Ann. Bd. 8, Seite 322 eingeführte Coordinate $\omega$, und die ihr [mittelst der Gleichung (19.c)] zugehörige Function $\psi = \psi(\omega)$ den hier gestellten Anforderungen (20. $\alpha$, $\beta$) *vollständig entsprechen.* Denn es wird alsdann:

$$\psi^2 = \left(\frac{1}{2} c\right)^2 \left(e^{2\vartheta} + e^{-2\vartheta} - 2\cos 2\omega\right),$$

mithin:

$$\frac{d\psi}{d\omega} = \left(\frac{1}{2} c\right)^2 \frac{2 \sin 2\omega}{\psi}.$$

Hieraus aber folgt, weil $\psi$ niemals Null wird, dass $\psi$, $\frac{1}{\psi}$ und $\frac{d\psi}{d\omega}$ *stetige* Functionen von $\omega$ sind.

wo $O^{(n,p)}$ *eine Grösse vorstellt, welche* = 1 *oder* = 0 *ist, jenachdem die* (ganzen) *Zahlen n und p einander gleich oder von einander verschieden sind.*

**Entwicklung von *T*.** — Sind die beiden Punkte *a* und *i* von der gegebenen Curve $\sigma$ durch irgend welche (wenn auch noch so kleine) Zwischenräume getrennt, und bezeichnet $\omega$ die Coordinate des peripherischen Punctes $\sigma$, so sind

$$T_{a\sigma} = log \frac{1}{(a\sigma)} \text{ und } T_{i\sigma} = log \frac{1}{(i\sigma)}$$

*stetige* Functionen von $\omega$, die zu denselben Werthen zurückkehren, sobald $\omega$ um $2\pi$ anwächst, also Functionen, die entwickelt werden können, nach den $Y^{(n)}$ oder $Y^{(n)}(\omega)$. Die in diesen Entwicklungen:

$$(\alpha.) \qquad \begin{aligned} T_{a\sigma} &= \Sigma\, Z_a^{(n)}\, Y^{(n)}(\omega), \\ T_{i\sigma} &= \Sigma\, Z_i^{(n)}\, Y^{(n)}(\omega), \end{aligned}$$

auftretenden Coefficienten $Z_a^{(n)}$ und $Z_i^{(n)}$ lassen sich sofort bestimmen mittelst der Formel (23.*a*). Man erhält:

$$(\beta.) \qquad \begin{aligned} Z_a^{(n)} &= \int T_{a\sigma}\, Y^{(n)}(\omega)\, d\omega, \\ Z_i^{(n)} &= \int T_{i\sigma}\, Y^{(n)}(\omega)\, d\omega, \end{aligned}$$

die Integrationen hinerstreckt über die ganze Curve, oder (was dasselbe) hinerstreckt von $\omega = 0$ bis $\omega = 2\pi$. Substituirt man für $d\omega$ den aus (19. *c*) entspringenden Werth:

$$d\omega = [\psi(\omega)]^{-1}\, d\sigma,$$

und schreibt man gleichzeitig $\psi_\sigma$ für $\psi(\omega)$, und $Y_\sigma^{(n)}$ für $Y_\omega^{(n)}$, um in solcher Weise die Abhängigkeit dieser Functionen von dem peripherischen Punct $\sigma$ anzudeuten, — so gewinnen die Formeln ($\alpha$.), ($\beta$.) die Gestalt:

$$(\gamma.) \qquad \begin{aligned} T_{a\sigma} &= \Sigma\, Z_a^{(n)}\, Y_\sigma^{(n)}, \\ T_{i\sigma} &= \Sigma\, Z_i^{(n)}\, Y_\sigma^{(n)}, \end{aligned}$$

und:

$$(\delta.)\qquad \begin{aligned} Z_a^{(n)} &= \int T_{a\sigma}\, Y_\sigma^{(n)}\, (\psi_\sigma)^{-1}\, d\sigma, \\ Z_i^{(n)} &= \int T_{i\sigma}\, Y_\sigma^{(n)}\, (\psi_\sigma)^{-1}\, d\sigma. \end{aligned}$$

Aus diesen Formeln ($\delta.$) folgt, dass $Z_a^{(n)}$ und $Z_i^{(n)}$ die Potentiale einer auf der Curve ausgebreiteten Massenbelegung sind, deren Dichtigkeit $Q_\sigma^{(n)}$ den Werth hat:

$$(\varepsilon.)\qquad Q_\sigma^{(n)} = Y_\sigma^{(n)} (\psi_\sigma)^{-1}.$$

*Im Folgenden mögen nun diese Potentiale*

$$(25.)\qquad \begin{aligned} &Z_a^{(0)},\ Z_a^{(1)},\ Z_a^{(2)},\ \ldots\ldots \\ &Z_i^{(0)},\ Z_i^{(1)},\ Z_i^{(2)},\ \ldots\ldots \end{aligned}$$

*die Elementarpotentiale, und die ihnen zu Grunde liegenden Massenbelegungen, deren Dichtigkeiten*

$$(26.)\qquad Q_\sigma^{(0)},\ Q_\sigma^{(1)},\ Q_\sigma^{(2)},\ \ldots\ldots$$

*sind, die Elementarbelegungen genannt werden.*

Die Dichtigkeit ($\varepsilon.$) ist nach (20. $\beta$) eine stetige Function von $\omega$, also nach (20. $\alpha$) auch eine stetige Function von $\sigma$. Folglich ist das dieser Dichtigkeit entsprechende Potential $Z^{(n)}$ in der Ebene (mit etwaiger Ausnahme der unendlich fernen Puncte) allenthalben stetig. Und hieraus ergibt sich sofort, dass die Formeln ($\delta.$) in Kraft bleiben, wenn man den Punct $a$, respective den Punct $i$ nach der gegebenen Curve, etwa nach dem peripherischen Punct $s$ hinrücken lässt, dass also die Gleichung stattfindet:

$$(\zeta.)\qquad Z_s^{(n)} = \int T_{s\sigma}\, Y_\sigma^{(n)}\, (\psi_\sigma)^{-1}\, d\sigma.$$

*Um die Hauptsache zusammenzufassen: Die Formeln* ($\gamma.$)

$$(27.)\qquad \begin{aligned} T_{a\sigma} &= \Sigma\, Z_a^{(n)}\, Y_\sigma^{(n)}, \\ T_{i\sigma} &= \Sigma\, Z_i^{(n)}\, Y_\sigma^{(n)}, \end{aligned}$$

*sind nur auf solche Puncte $a$, $i$ anwendbar*[1]), *welche von der*

---

1) Ist die gegebene Curve $\sigma$ eine um den Anfangspunct des Coordinatensystems beschriebene *Kreisperipherie* vom Radius $\varrho$, und bezeichnet man die Polarcoordinaten der Puncte $\sigma$ und $a$ resp. mit $\varrho$, $\omega$ und $r$, $u$, so wird

*Curve durch irgend welche* (wenn auch noch so kleine) *Zwischenräume getrennt sind. — Hingegen erstrecken sich die Formeln* ($\delta$.), ($\zeta$.) *auf sämmtliche Puncte a, s, i, sodass man schreiben kann:*

(28.) $$Z_x^{(n)} = \int T_{x\sigma} Y_\sigma^{(n)} (\psi_\sigma)^{-1} d\sigma,$$

*wo x als Collectivbezeichnung dienen soll für a, s, i.*

**Der peripherische Werth des Elementarpotentials.** — Da das Potential $Z^{(n)}$ in der Ebene überall stetig ist, so wird z. B. sein peripherischer Werth $Z_s^{(n)}$ stetig sein längs der gegebenen Curve, also nach (21.) entwickelbar sein in eine nach den $Y_s^{(n)}$ fortschreitende Reihe:

(29.) $$Z_s^{(n)} = \sum_p C^{(n,p)} Y_s^{(p)}.$$

Die Coefficienten dieser Entwicklung bestimmen sich mittelst der Formel (23. $b$); man findet:

(30.$a$) $$C^{(n,p)} = \int Z_s^{(n)} Y_s^{(p)} (\psi_s)^{-1} ds,$$

die Integration hinerstreckt über sämmtliche Elemente $ds$ der gegebenen Curve. Schliesslich sei bemerkt, dass dieser Ausdruck (30.$a$) durch Substitution des Werthes ($\zeta$.) die Gestalt erhält:

(30.$b$) $$C^{(n,p)} = \iint T_{s\sigma} Y_s^{(p)} Y_\sigma^{(n)} (\psi_s \psi_\sigma)^{-1} ds\, d\sigma;$$

woraus folgt:

(30.$c$) $$C^{(n,p)} = C^{(p,n)}.$$

---

($\alpha$.) $$d\sigma = \varrho\, d\omega, \text{ mithin } \psi = \varrho = \text{Const.}$$

Solches festgesetzt, erkennt man leicht, dass die Entwicklung (27.):

($\beta$.) $$T_{a\sigma} = \Sigma Z_a^{(n)} Y_\sigma^{(n)}$$

in diesem speciellen Fall die Gestalt annimmt:

($\gamma$.) $$T_{a\sigma} = \log \frac{1}{r} + \Sigma \frac{1}{n} \left(\frac{\varrho}{r}\right)^n \cos n\,(\omega - u).$$

Diese Formel aber verliert, wie man sofort übersieht, ihre Gültigkeit, sobald man $a$ mit dem Puncte $\sigma$ zusammenfallen lässt. Man muss also in der That sagen, dass die Formel ($\gamma$.), folglich auch die Formel ($\beta$.), *fehlerhaft* werden kann, sobald der Punct $a$ sich in einen peripherischen Punct verwandelt.

## § 6.

## Einführung neuer Functionen *X*, welche zu den *Y* in derselben Beziehung stehen, wie die *Y* zu den *Z*.

Da die Function $Y_s^{(n)}$ nach (20. $\alpha$) auf der gegebenen Curve $\sigma$ stetig ist, so existirt zufolge des ersten Fundamentalsatzes (S. 51), eine und nur eine einzige Potentialfunction des *äussern* Gebietes, welche auf der Curve mit $Y_\sigma^{(n)}$ identisch ist. Und ebenso ergiebt sich, dass unter den Potentialfunctionen des *innern* Gebietes ebenfalls eine und nur eine einzige existirt, welche auf der Curve mit $Y_\sigma^{(n)}$ übereinstimmt. Um auf diese Potentialfunctionen, welche mit $Y_a^{(n)}$ und $Y_i^{(n)}$ bezeichnet sein mögen, näher einzugehen, sei bemerkt, dass die peripherischen Ableitungen von

(A.) $$Y = Y_\sigma^{(n)}$$

die Werthe haben [vgl. (19. $c$)]:

(B.) $$\frac{dY}{d\sigma} = \frac{dY}{d\omega}\frac{d\omega}{d\sigma} = \frac{dY}{d\omega}\frac{1}{\psi},$$

(C.) $$\frac{d^2Y}{d\sigma^2} = \frac{d^2Y}{d\omega^2}\left(\frac{1}{\psi}\right)^2 - \frac{dY}{d\omega}\left(\frac{1}{\psi}\right)^3\frac{d\psi}{d\omega};$$

woraus [nach (20. $\alpha.\beta.$)] sich ergiebt, dass die Functionen (A.), (B.) längs der Curve $\sigma$ *stetig* sind, [und dass die Function (C.) längs $\sigma$ *abtheilungsweise stetig* ist]. Mit Rücksicht hierauf folgt aus dem ersten und dritten Fundamentalsatz (Seite 51, 52), dass jene Potentialfunctionen $Y_a^{(n)}$ und $Y_i^{(n)}$ darstellbar sind als die Potentiale einer gewissen auf $\sigma$ *ausgebreiteten Belegung*, und dass die Dichtigkeit dieser Belegung längs $\sigma$ *stetig* ist. Bezeichnet man also diese Dichtigkeit mit

(D.) $$X_\sigma^{(n)}(\psi_\sigma)^{-1},$$

so sind $Y_a^{(n)}$, $Y_i^{(n)}$, sowie auch die peripherischen Werthe $Y_\sigma^{(n)}$ oder $Y_s^{(n)}$, [1]) darstellbar durch die Formel

(31.) $$Y_x^{(n)} = \int T_{x\sigma}\, X_\sigma^{(n)}\,(\psi_\sigma)^{-1}\, d\sigma,$$

wo $x$ als Collectivbezeichnung dient für sämmtliche Puncte $a, s, i$.

1) Wir bezeichnen die peripherischen Puncte (d. i. die auf der gegebenen Curve $\sigma$ gelegenen Puncte) je nach Umständen, bald mit $\sigma$, bald mit $s$.

Die Dichtigkeit ($D.$) ist, wie soeben bemerkt wurde, eine stetige Function von $\sigma$, also nach (20. $\alpha$) auch eine stetige Function von $\omega$. Gleiches gilt daher, nach (20. $\beta$), von der Function $X_\sigma^{(n)}$. Demgemäss wird diese Function entwickelbar sein in eine nach den $Y_\sigma^{(0)}$, $Y_\sigma^{(1)}$, $Y_\sigma^{(2)}$, $\cdots$ fortschreitende Reihe:

(32.) $$X_\sigma^{(n)} = \sum_p A^{(n,p)} Y_\sigma^{(p)},$$

deren Coefficienten, nach (23. $b$), die Werthe besitzen:

(33. $a$) $$A^{(n,p)} = \int X_\sigma^{(n)} Y_\sigma^{(p)} (\psi_\sigma)^{-1} \, d\sigma,$$

oder (was dasselbe ist) die Werthe:

(33. $A$) $$A^{(n,p)} = \int X_s^{(n)} Y_s^{(p)} (\psi_s)^{-1} \, ds.$$

Dabei sei bemerkt, dass die letzte Formel durch Substitution des aus (31.) für $Y_s^{(p)}$ entspringenden Werthes folgende Gestalt erhält:

(33. $B$) $$A^{(n,p)} = \iint T_{s\sigma} X_s^{(n)} X_\sigma^{(p)} (\psi_s \psi_\sigma)^{-1} \, ds \, d\sigma;$$

woraus folgt:

(33. $C$) $$A^{(n,p)} = A^{(p,n)}.$$

Ein Blick auf die Formeln (28.) und (31.) zeigt, *dass die $Y$ zu den $X$ in genau derselben Beziehung stehen, wie die $Z$ zu den $Y$.* Man wird also die $Z$ etwa zu bezeichnen haben als die aus den $Y$ sich ergebenden *Elementarpotentiale*, und ebenso die $Y$ als diejenigen *Elementarpotentiale*, welche aus den $X$ sich ergeben.

## § 7.
## Entwicklung der $Y$ nach den $Z$.

Nach (31.) ist für $x$ (d. i. für sämmtliche Puncte $a$, $s$, $i$):

$$Y_x^{(n)} = \int T_{x\sigma} X_\sigma^{(n)} (\psi_\sigma)^{-1} \, d\sigma,$$

oder, falls man für $X_\sigma^{(n)}$ den Werth (32.) substituirt:

$$Y_x^{(n)} = \sum_p \left\{ A^{(n,p)} \int T_{x\sigma} Y_\sigma^{(p)} (\psi_\sigma)^{-1} \, d\sigma \right\};$$

also mit Rücksicht auf (28):

(34.) $$Y_x^{(n)} = \sum_p A^{(n,p)} Z_x^{(p)};$$

*und hiermit sind die $Y$ entwickelt nach den $Z$.*

**Bemerkung.** Nimmt man für $x$ einen peripherischen Punct $s$, und schreibt man gleichzeitig $q$ für $p$, so folgt aus (34.):

$$Y_s^{(n)} = \sum_q A^{(n,q)} Z_s^{(q)}.$$

Hieraus aber folgt durch Multiplication mit $Y_s^{(p)}(\psi_s)^{-1} ds$ und Integration:

$$\int Y_s^{(n)} Y_s^{(p)} (\psi_s)^{-1} ds = \sum_q \left\{ A^{(n,q)} \int Z_s^{(q)} Y_s^{(p)} (\psi_s)^{-1} ds \right\},$$

also mit Rücksicht auf (23. $b$) und (30. $a$):

$$O^{(n,p)} = \sum_q A^{(n,q)} C^{(q,p)},$$

oder weil, nach (30. $c$), $C^{(q,p)} = C^{(p,q)}$ ist:

(35.) $$\sum_q A^{(n,q)} C^{(p,q)} = O^{(n,p)}.$$

**Zweite Bemerkung.** Aus (29.) und (32.) ergiebt sich:

$$Z_s^{(p)} = \sum_q C^{(p,q)} Y_s^{(q)},$$

$$X_s^{(n)} = \sum_q A^{(n,q)} Y_s^{(q)}.$$

Multiplicirt man das *Product* dieser beiden Formeln mit $(\psi_s)^{-1} ds$, und integrirt sodann über die ganze Curve, so erhält man:

$$\int X_s^{(n)} Z_s^{(p)} (\psi_s)^{-1} ds = \int \left( \sum_q A^{(n,q)} Y_s^{(q)} \right) \left( \sum_q C^{(p,q)} Y_s^{(q)} \right) (\psi_s)^{-1} ds,$$

also mit Rücksicht auf (23. $b$):

$$\int X_s^{(n)} Z_s^{(p)} (\psi_s)^{-1} ds = \sum_q A^{(n,q)} C^{(p,q)},$$

oder, mit Rücksicht auf (35):

(36.) $$\int X_s^{(n)} Z_s^{(p)} (\psi_s)^{-1} ds = O^{(n,p)}$$

## § 8.

## Zusammenstellung der erhaltenen Formeln.

Die gegenseitige Beziehung zwischen den Functionen $X^{(n)}$, $Y^{(n)}$, $Z^{(n)}$ ist nach (28.), (31.) ausgedrückt durch die Formeln:

$$(37.a) \qquad Z_x^{(n)} = \int T_{x\sigma}\, Y_\sigma^{(n)}\, (\psi_\sigma)^{-1}\, d\sigma, \qquad \text{(wo } x = a, s, i.)$$

$$(37.b) \qquad Y_x^{(n)} = \int T_{x\sigma}\, X_\sigma^{(n)}\, (\psi_\sigma)^{-1}\, d\sigma;$$

und zwar sind die Functionen $X^{(n)}$ und $X^{(n)}(\psi)^{-1}$ *stetig längs der gegebenen Curve*[1]; andererseits sind die Functionen $Y^{(n)}$ und $Z^{(n)}$ *in der ganzen Ebene stetig*, mit etwaiger Ausnahme der unendlich fernen Puncte.

Diese Functionen $X^{(n)}$, $Y^{(n)}$, $Z^{(n)}$ besitzen nach (23. $a, b$) und (36.) die Integraleigenschaften:

$$(38\,a.) \qquad \int Y_\sigma^{(n)}\, Y_\sigma^{(p)}\, (\psi_\sigma)^{-1}\, d\sigma = O^{(n,p)}$$

$$(38.b) \qquad \int X_\sigma^{(n)}\, Z_\sigma^{(p)}\, (\psi_\sigma)^{-1}\, d\sigma = O^{(n,p)},$$

wo $O^{(n,p)}$ eine Grösse vorstellt, die $= 1$ oder $= 0$ ist, je nachdem die Zahlen $n$ und $p$ einander gleich, oder von einander verschieden sind.

Für die Functionen $X^{(n)}$, $Y^{(n)}$, $Z^{(n)}$ gelten nach (29.), (32.), (34.) folgende Entwicklungen:

$$(39.) \qquad Z_s^{(n)} = \sum_p C^{(n,p)}\, Y_s^{(p)}, \qquad Y_x^{(n)} = \sum_p A^{(n,p)}\, Z_x^{(p)}, \qquad \text{(wo } x = a, s, i.)$$

$$X_s^{(n)} = \sum_p A^{(n,p)}\, Y_s^{(p)},$$

deren constante Coefficienten $C^{(n,p)}$ und $A^{(n,p)}$ sich nach (30. $a$, $b$, $c$) und (33. $A$, $B$, $C$) folgendermassen darstellen lassen:

$$(40.) \qquad \begin{aligned} C^{(n,p)} = C^{(p,n)} &= \int Z_s^{(n)}\, Y_s^{(p)}\, (\psi_s)^{-1}\, ds, \\ &= \iint T_{s\sigma}\, Y_s^{(n)}\, Y_\sigma^{(p)}\, (\psi_s \psi_\sigma)^{-1}\, ds\, d\sigma, \\ A^{(n,p)} = A^{(p,n)} &= \int X_s^{(n)}\, Y_s^{(p)}\, (\psi_s)^{-1}\, ds, \\ &= \iint T_{s\sigma}\, X_s^{(n)}\, X_\sigma^{(p)}\, (\psi_s \psi_\sigma)^{-1}\, ds\, d\sigma. \end{aligned}$$

Auch entsprechen diese Constanten $C^{(n,p)}$ und $A^{(n,p)}$ der in (35.) angegebenen Relation:

---

1) Die $X^{(n)}$ sind Functionen, welche von uns nur *längs der Curve* definirt sind; und wir können also sagen, sie seien *stetig, soweit sie überhaupt definirt sind.*

(41.) $$\sum_q A^{(n,q)} C^{(p,q)} = O^{(n,p)},$$

wo $O^{(n,p)}$ die bei (38.) angegebene Bedeutung hat.

Endlich gelten, was die Functionen $Y^{(n)}$, $Z^{(n)}$ betrifft, nach (27.) folgende Entwicklungen:

(42.) $$T_{as} = \Sigma Z_a^{(n)} Y_s^{(n)},$$
$$T_{is} = \Sigma Z_i^{(n)} Y_s^{(n)},$$

jedoch *nur unter der Voraussetzung*, dass die Puncte $a$ und $i$ von der gegebenen Curve $\sigma$ durch irgend welche (wenn auch noch so kleine) Zwischenräume *getrennt* sind.

## § 9.

## Allgemeine Theoreme über die Entwicklung einer gegebenen Function nach den $Z$.

Es sei $W_a$ irgend eine Potentialfunction, und zwar sei vorausgesetzt[1]), dass $W_s$, $W'_s$ längs $\sigma$ *stetig* sind, [ferner, dass $W''_s$ längs $\sigma$ *abtheilungsweise stetig* ist]. Diese Function wird alsdann, nach dem dritten Fundamentalsatz (Seite 52), folgendermassen darstellbar sein:

($\alpha$.) $$W_a = \int T_{a\sigma} Q_\sigma \, d\sigma,$$
$$W_s = \int T_{s\sigma} Q_\sigma \, d\sigma;$$

auch wird die hier auftretende (unbekannte) Function $Q_\sigma$, zufolge jenes Satzes, längs der Curve $\sigma$ *stetig* sein.

Aus dieser Stetigkeit von $Q_\sigma$ folgt, mit Rücksicht auf (20. $\alpha$, $\beta$), dass $Q_\sigma$ und $\psi_\sigma Q_\sigma$ stetige Functionen von $\omega$ sind. Und hieraus folgt weiter, dass $\psi_\sigma Q_\sigma$ entwickelbar ist in eine nach der $Y_\sigma^{(n)}$ fortschreitende Reihe:

($\beta$.) $$\psi_\sigma Q_\sigma = \Sigma C^{(n)} Y_\sigma^{(n)}.$$

---

1) Unter $W'_s$ und $W''_s$ sollen die *peripherischen* Ableitungen von $W_s$ verstanden werden, d. i. die Ableitungen nach der *Bogenlänge* $s$ des Punctes $s$.

Substituirt man diesen Werth ($\beta$.) in ($\alpha$.), so erhält man:

$$(\gamma.)\qquad \begin{aligned} W_a &= \Sigma\left\{C^{(n)}\int T_{a\sigma}\, Y_\sigma^{(n)}\, (\psi_\sigma)^{-1}\, d\sigma\right\},\\ W_s &= \Sigma\left\{C^{(n)}\int T_{s\sigma}\, Y_\sigma^{(n)}\, (\psi_\sigma)^{-1}\, d\sigma\right\}, \end{aligned}$$

oder, mit Rücksicht auf (37.):

$$(\delta.)\qquad \begin{aligned} W_a &= \Sigma\, C^{(n)}\, Z_a^{(n)},\\ W_s &= \Sigma\, C^{(n)}\, Z_s^{(n)}. \end{aligned}$$

Somit erkennen wir, *dass die in Rede stehende Function $W$ in eine nach den $Z^{(n)}$ fortschreitende Reihe entwickelbar ist, deren Gültigkeit sich erstreckt auf sämmtliche Puncte $a$, $s$.*

Die noch unbekannten constanten Coefficienten $C^{(n)}$ ergeben sich mittels der Integraleigenschaft (38.$b$). Multiplicirt man nämlich die *zweite* der Formeln ($\delta$.) mit $X_s^{(n)}\, (\psi_s)^{-1}\, ds$, und integrirt, so erhält man mit Rücksicht auf jene Eigenschaft sofort:

$$(\varepsilon.)\qquad \int W_s\, X_s^{(n)}\, (\psi_s)^{-1}\, ds = C^{(n)},$$

*und hierdurch ist $C^{(n)}$ bestimmt*, vorausgesetzt, dass die peripherischen Werthe $W_s$ unserer Potentialfunction gegeben sind.

Auch ergiebt sich leicht, dass eine nach den $Z^{(n)}$ fortschreitende Entwicklung der Function $W$, falls sie gültig sein soll für *sämmtliche Puncte $a$, $s$*, nur auf *einerlei* Weise möglich ist. Denn existirte neben der *für alle Puncte $a$, $s$* geltenden Entwicklung ($\delta$.) noch eine andere *solche*[1]) Entwicklung:

$$(\Delta.)\qquad \begin{aligned} W_a &= \Sigma\, D^{(n)}\, Z_a^{(n)},\\ W_s &= \Sigma\, D^{(n)}\, Z_s^{(n)}, \end{aligned}$$

so würden sich, mittels jener Integraleigenschaft (38.$b$), für die Constanten $D^{(n)}$ genau *dieselben* Werthe ergeben, welche in ($\varepsilon$.) für die $C^{(n)}$ gefunden sind. — Somit erhalten wir folgendes:

(43.) · · · · **Erstes Theorem.** — *Ist eine Potentialfunction des äusseren Gebietes sammt ihrer peripherischen Ableitung längs $\sigma$* (1.) *stetig* [und ihre zweite peripherische Ableitung abtheilungsweise stetig], *so wird dieselbe stets entwickelbar sein in eine*

1) Nämlich eine Entwicklung, die ebenfalls für *sämmtliche Puncte $a$, $s$* gilt.

*nach den $Z^{(n)}$ fortschreitende Reihe, deren Gültigkeit sich erstreckt auf sämmtliche Puncte a, s. Auch giebt es, falls Gültigkeit für sämmtliche Puncte a, s verlangt wird, nur eine solche Entwicklung*[1].

*Die Coefficienten dieser Entwicklung bestimmen sich mittels der in* (38. *b*) *angegebenen Integraleigenschaft.*

Dieser Satz bezieht sich auf das *äussere* Gebiet. Doch übersieht man leicht, dass man durch ganz ähnliche Betrachtungen zu einem entsprechenden Satz für das *innere* Gebiet gelangen wird, welcher folgendermassen lautet:

(44.) · · · · **Zweites Theorem.** — *Ist eine Potentialfunction des innern Gebietes sammt ihrer peripherischen Ableitung längs σ* (1.) *stetig*, [und ihre zweite peripherische Ableitung abtheilungsweise stetig], *so wird dieselbe stets entwickelbar sein in eine nach den $Z^{(n)}$ fortschreitende Reihe, deren Gültigkeit sich erstreckt auf sämmtliche Puncte i, s. Auch giebt es, falls Gültigkeit für sämmtliche Puncte i, s verlangt wird, nur eine solche Entwicklung.*

*Die Coefficienten dieser Entwicklung bestimmen sich mittels der Integraleigenschaft* (38. *b*).

Es sei, um zu einer verwandten Betrachtung überzugehen, längs $\sigma$ irgend eine Function $f_s$ gegeben; und zwar sei vorausgesetzt, dass $f_s$ und $f_s'$ längs $\sigma$ *stetig* sind, [und dass $f_s''$ *abtheilungsweise stetig* ist]. Alsdann existirt, nach unserm dritten Fundamentalsatz (S. 52), stets eine Potentialfunction $W_a$ des äussern Gebietes, welche längs $\sigma$ mit $f_s$ identisch ist; so dass also

$$(\zeta.) \qquad W_s = f_s\,.$$

Mittels dieser Relation ($\zeta$.) überträgt sich aber das in (43.) aufgestellte Theorem, soweit dasselbe die *peripherischen* Werthe $W_s$ betrifft, augenblicklich auf die Function $f_s$; so dass man zu folgendem Resultat gelangt:

(45.) · · · · **Drittes Theorem.** — *Ist die auf der Curve σ* (1.) *gegebene Function $f_s$ sammt ihrer peripherischen Ableitung längs σ*

---

1) Verlangt man von der Entwicklung nicht, dass sie für *sämmtliche Puncte a, s*, sondern dass sie nur die *a allein*, oder nur für einen *Theil* der *a* gelten sollte, so muss die Frage, ob es *nur eine* oder *mehrere* solche Entwicklungen giebt, vorläufig dahingestellt bleiben.

*stetig* [und ihre zweite peripherische Ableitung abtheilungsweise stetig], *so wird dieselbe immer, und immer nur auf einerlei Art, entwickelbar sein in eine nach den $Z_s^{(n)}$ fortschreitende Reihe.*

*Die Coefficienten dieser Entwicklung ergeben sich mittels der Integraleigenschaft* (38. *b*).

## § 10.

## Anwendung der allgemeinen Theoreme auf einige einfache Fälle.

**Erstes Beispiel.** — Wir stellen uns die Aufgabe, diejenige Potentialfunction $P_a$ des *äussern* Gebietes zu ermitteln, welche längs $\sigma$ den Werth 1 hat. — Nach dem ersten Fundamentalsatz (Seite 51) kann nur *eine* solche Potentialfunction existiren. Auch ergiebt sich aus dem Theorem (43.), dass dieselbe für alle $a$, $s$ entwickelbar ist in eine nach den $Z^{(n)}$ fortschreitende Reihe:

$$(\alpha.)\qquad \begin{aligned} P_a &= \Sigma\, a^{(n)}\, Z_a^{(n)}, \\ 1 = P_s &= \Sigma\, a^{(n)}\, Z_s^{(n)}. \end{aligned}$$

Zugleich ergeben sich für die Coefficienten $a^{(n)}$, mittels der Integraleigenschaft (38. *b*), die Werthe:

$$(\beta.)\qquad a^{(n)} = \int X_s^{(n)}\, (\psi_s)^{-1}\, ds.$$

**Bemerkung.** — Die soeben behandelte Potentialfunction $P_a$ muss zufolge des dritten Fundamentalsatzes (Seite 52) darstellbar sein als das Potential einer auf $\sigma$ ausgebreiteten Belegung von *stetiger* Dichtigkeit; so dass sich also, falls man diese Dichtigkeit mit $\delta_\sigma$ bezeichnet, die Formeln ergeben:

$$(\gamma.)\qquad \begin{aligned} P_a &= \int T_{a\sigma}\, \delta_\sigma\, d\sigma, \\ 1 = P_s &= \int T_{s\sigma}\, \delta_\sigma\, d\sigma. \end{aligned}$$

Aus der Stetigkeit von $\delta_\sigma$ folgt mit Rücksicht auf (20. $\alpha, \beta$), dass $\delta_\sigma$ und $\psi_\sigma\, \delta_\sigma$ stetige Functionen von $\omega$ sind; und hieraus folgt weiter, dass $\psi_\sigma\, \delta_\sigma$ entwickelbar ist in eine nach der $Y_\sigma^{(n)}$ fortschreitende Reihe:

$$(\delta.)\qquad \psi_\sigma\, \delta_\sigma = \Sigma\, h^{(n)}\, Y_\sigma^{(n)}.$$

Substituirt man diesen Werth von $\delta_\sigma$ in die Formeln ($\gamma$.), so folgt:

$$(\varepsilon.)\quad \begin{aligned} P_a &= \int T_{a\sigma} (\Sigma\, h^{(n)}\, Y_\sigma^{(n)}) (\psi_\sigma)^{-1}\, d\sigma, \\ 1 = P_s &= \int T_{s\sigma} (\Sigma\, h^{(n)}\, Y_\sigma^{(n)}) (\psi_\sigma)^{-1}\, d\sigma, \end{aligned}$$

oder, mit Rücksicht auf (37.):

$$(\zeta.)\quad \begin{aligned} P_a &= \Sigma\, h^{(n)}\, Z_a^{(n)}, \\ 1 = P_s &= \Sigma\, h^{(n)}\, Z_s^{(n)}. \end{aligned}$$

Nach unserm Theorem (43.) ist aber eine Potentialfunction des äussern Gebietes, die den dort angegebenen Bedingungen entspricht, in eine nach den $Z^{(n)}$ fortschreitende und für alle $a$, $s$ gültige Reihe nur auf *einerlei* Art entwickelbar. Somit folgt aus ($\alpha$.) und ($\zeta$.), dass

$$(\eta.)\quad h^{(n)} = a^{(n)}$$

ist. Und mit Rücksicht hierauf folgt aus ($\delta$.):

$$(\vartheta.)\quad \delta_\sigma = (\Sigma\, a^{(n)}\, Y_\sigma^{(n)}) (\psi_\sigma)^{-1},$$

wo alsdann die Constanten $a^{(n)}$ dargestellt sind durch die in ($\beta$.) angegebene Integrale.

**Zweites Beispiel.** — Die einfachste Potentialfunction des *innern* Gebietes ist eine *Constante*, z. B. die Constante 1. Diese Potentialfunction 1 muss, weil sie den im Theorem (44.) genannten Voraussetzungen entspricht, für alle Puncte $i$, $s$ entwickelbar sein in eine nach den $Z^{(n)}$ fortschreitende Reihe:

$$(\iota.)\quad \begin{aligned} 1 &= \Sigma\, g^{(n)}\, Z_i^{(n)}, \\ 1 &= \Sigma\, g^{(n)}\, Z_s^{(n)}. \end{aligned}$$

Zugleich ergeben sich für die Constanten $g^{(n)}$, mittels (38. $b$), die Werthe:

$$(\varkappa.)\quad g^{(n)} = \int X_s^{(n)} (\psi_\sigma)^{-1}\, ds,$$

woraus mit Rücksicht auf ($\beta$.) folgt:

$$(\lambda.)\quad g^{(n)} = a^{(n)}.$$

**Bemerkung.** — Die betrachtete Potentialfunction 1 ist nach dem dritten Fundamentalsatz (Seite 52) darstellbar als das Po-

tential einer gewissen Curvenbelegung von *stetiger* Dichtigkeit. Diese Dichtigkeit, sie mag $\varepsilon_\sigma$ heissen, kann sofort angegeben werden, falls man nur beachtet, dass die gegenwärtige Potentialfunction 1 des *innern* Gebietes längs der gegebenen Curve $\sigma$ *identisch* ist mit der vorhin betrachteten Potentialfunction $P_a$ des *äussern* Gebietes. Denn mit Rücksicht hierauf ergiebt sich aus jenem dritten Fundamentalsatz (Seite 52) sofort:

$$(\mu.) \qquad \varepsilon_\sigma = \delta_\sigma .$$

**Um die Hauptsache zusammenzufassen:** *Definirt man* $\delta_\sigma$ *durch die Formel:*

$$(46.) \qquad \delta_\sigma = (\Sigma a^{(n)} Y_\sigma^{(n)})(\psi_\sigma)^{-1}, \text{ wo } a^{(n)} = \int X_\sigma^{(n)} (\psi_\sigma)^{-1} d\sigma,$$

*so ist* $\delta_\sigma$ *längs der Curve stetig. Denkt man sich ferner die Curve mit einer Massenbelegung versehen, deren Dichtigkeit* $= \delta_\sigma$ *ist, und bezeichnet man das von dieser Belegung auf irgend welche Puncte a, s, i ausgeübte Potential resp. mit* $P_a$, $P_s$, $P_i$, *so gelten die Formeln:*

$$(47.) \qquad \begin{aligned} P_a &= \int T_{a\sigma}\, \delta_\sigma\, d\sigma = \Sigma a^{(n)} Z_a^{(n)}, \\ 1 = P_s &= \int T_{s\sigma}\, \delta_\sigma\, d\sigma = \Sigma a^{(n)} Z_s^{(n)}, \\ 1 = P_i &= \int T_{i\sigma}\, \delta_\sigma\, d\sigma = \Sigma a^{(n)} Z_i^{(n)}, \end{aligned}$$

*wo die* $a^{(n)}$ *die in* (46.) *genannten Constanten sind.*

*Beiläufig sei bemerkt, dass die Gesammtmasse der in Rede stehenden Belegung* [nach (46.)] *den Werth hat:*

$$(48.) \quad \mu = \int \delta_\sigma\, d\sigma = \Sigma a^{(n)} b^{(n)}, \quad \text{wo } b^{(n)} = \int Y_\sigma^{(n)} (\psi_\sigma)^{-1} d\sigma.$$

*Diese Constanten* $b^{(n)}$ *stehen also zu den Functionen* $Y^{(n)}$ *in derselben Beziehung, wie die* $a^{(n)}$ *zu den* $X^{(n)}$. *Endlich sei bemerkt, dass die Function* $\delta_\sigma$ (nach einem bekannten allgemeinen Satz, vgl. die »*Unt.*« Seite 86) *längs der gegebenen Curve überall positiv und überall von Null verschieden ist*[1]).

---

1) Bezeichnet man die sogenannte *natürliche* Belegung der Curve mit $\gamma$, und die von dieser Belegung auf *äussere* und *innere* Puncte ausgeübte Potentiale resp. mit $\Pi$, so ergeben sich, wie leicht zu übersehen, folgende

## § 11.

## Zweifelhafte Betrachtungen und Formeln.

Wir stellen uns die Aufgabe, zu untersuchen, ob die in (39.) erhaltene Entwicklung:

$$(A.) \qquad \sum_n C^{(p,n)}\, Y_s^{(n)} = Z_s^{(p)}$$

noch giltig bleibt, wenn man statt des Punctes $s$ irgend welche Puncte $a$ oder $i$ nimmt.

Nach (39.) ist:

$$(B.) \qquad X_s^{(n)} = \sum_q A^{(n,q)}\, Y_s^{(q)};$$

und hieraus folgt durch Multiplication mit $C^{(p,n)}$ und Summation:

$$(C.) \qquad \sum_n C^{(p,n)}\, X_s^{(n)} = \sum_n \left\{ C^{(n,p)} \sum_q A^{(n,q)}\, Y_s^{(q)} \right\}.$$

Die rechte Seite dieser Formel kann, *falls man die Reihenfolge der beiden Summationen* (nach $q$ und $n$) *mit einander vertauscht*, auch so geschrieben werden:

$$(D.) \qquad \sum_q \left\{ Y_s^{(q)} \sum_n A^{(n,q)}\, C^{(n,p)} \right\},$$

oder, mit Rücksicht auf (41.), auch so:

$$(E.) \qquad \sum_q Y_s^{(q)}\, O^{(q,p)},$$

und hat also den Werth:

$$(F.) \qquad Y_s^{(p)}.$$

---

vier Formeln:

$$\gamma_\sigma = \frac{1}{\mu}\,\delta_\sigma,$$
$$\Pi_a = \frac{1}{\mu}\,P_a,$$
$$\Pi_s = \frac{1}{\mu}\,P_s = \frac{1}{\mu},$$
$$\Pi_i = \frac{1}{\mu}\,P_i = \frac{1}{\mu};$$

so dass also $\frac{1}{\mu}$ diejenige Constante vorstellt, welche in den »*Unt.*« mit $\Gamma$ bezeichnet ist.

Somit ergiebt sich aus $(C.)$:

$$(G.)\qquad \sum_n C^{(p,n)} X_s^{(n)} = Y_s^{(p)}. \ ?$$

Multiplicirt man aber diese Formel mit $T_{xs} (\psi_s)^{-1} ds$, wo $x = a, s, i$, und integrirt, so erhält man mit Rücksicht auf (37. $a, b$):

$$(H.)\qquad \sum_n C^{(p,n)} Y_x^{(n)} = Z_x^{(p)}; \ ?$$

woraus hervorzugehen scheint, *dass die Formel* $(A.)$ *in der That nicht nur für die Puncte* $s$, *sondern für sämmtliche Puncte* $a, s, i$ *in Kraft bleibt.*

**Bemerkung.** — Die Vertauschung der Reihenfolge zweier von 0 bis $\infty$ gehenden Summationen ist bekanntlich nicht ohne Weiteres gestattet; und der Uebergang von $(C.)$ zu $(D.)$ unterliegt daher einem gewissen Bedenken. Um hierauf näher einzugehen, wollen wir zunächst statt der *unendlichen Reihen* $(B.)$:

$$(I.)\qquad X^{(n)} = \sum_q A^{(n,q)} Y^{(q)},$$

die *endlichen Aggregate:*

$$(K.)\qquad X^{(Q,n)} = \sum_{q=0}^{q=Q} A^{(n,q)} Y^{(q)}$$

in Betracht ziehen, wo $Q$ eine *endliche Zahl* vorstellt. Dabei unterdrücken wir der Kürze willen den Index $s$.

Wir denken uns eine *beliebig gegebene* positive ganze Zahl $p$, nehmen für $Q$ eine der Relation

$$(L.)\qquad p < Q$$

entsprechende Zahl, multipliciren sodann die Formel $(K.)$ mit $C^{(p,n)}$, und summiren von $n = 0$ bis $n = \infty$. In solcher Weise erhalten wir mit voller Sicherheit:

$$\sum_n C^{(n,p)} X^{(Q,n)} = \sum_{q=0}^{q=Q} \left\{ Y^{(q)} \sum_n A^{(n,q)} C^{(n,p)} \right\},$$

$$= \sum_{q=0}^{q=Q} Y^{(q)} O^{(q,p)}.$$

Die hier auf der rechten Seite auftretenden Coefficienten sind [vgl. $(L.)$]:

$$O^{(0,p)},\ O^{(1,p)}, \ldots \ O^{(p,p)}, \ldots\ldots O^{(Q,p)},$$

und sind also mit Ausnahme von $O^{(p,p)}$ alle $= 0$, während $O^{(p,p)} = 1$. Demgemäss erhalten wir:

(*M.*) $$\sum_n C^{(p,n)} X^{(Q,n)} = Y^{(p)}.$$

Diese Formel (*M.*) ist also gültig für jedes der Relation (*L.*) entsprechende $Q$, und wird daher gültig *bleiben*, wenn man $Q$ weiter und weiter anwachsen lässt, also *wahrscheinlich*[1]) auch gültig bleiben für $Q = \infty$.

**Resultat.** — *Benutzen wir die soeben erhaltenen Formeln* (*G.*), (*H.*) *zur Vervollständigung des in* (39.) *angegebenen Formelsystems, so ergiebt sich*:

(50.) $$\underline{Z_x^{(n)} = \sum_p C^{(n,p)} Y_x^{(p)}, ?} \qquad Y_x^{(n)} = \sum_p A^{(n,p)} Z_x^{(p)}, \quad (\text{wo } x = a, s, i.)$$

$$\underline{Y_s^{(n)} = \sum_p C^{(n,p)} X_s^{(p)}, ?} \qquad X_s^{(n)} = \sum_p A^{(n,p)} Y_s^{(p)};$$

*wo die Gleichungen* r e c h t s *angesehen werden können als die Auflösungen der Gleichungen* l i n k s. — *Aus diesen Gleichungen* (50.) *ergiebt sich leicht folgende fünfte Gleichung*:

(51.) $$\underline{\sum_n Z_x^{(n)} X_s^{(n)} = \sum Y_x^{(n)} Y_s^{(n)}. ?} \qquad (\text{wo } x = a, s, i.)$$

Multiplicirt man nämlich das in (*K.*) eingeführte Aggregat

(*N.*) $$X_s^{(Q,n)} = \sum_{q=0}^{q=Q} A^{(n,q)} Y_s^{(q)}$$

mit $Z_x^{(n)}$, und summirt von $n = 0$ bis $n = \infty$, so erhält man mit voller Sicherheit:

(*O.*) $$\sum_n Z_x^{(n)} X_s^{(Q,n)} = \sum_{q=0}^{q=Q} \left\{ Y_s^{(q)} \sum_n A^{(q,n)} Z_x^{(n)} \right\},$$

also mit Rücksicht auf (50.):

(*P.*) $$\sum_n Z_x^{(n)} X_s^{(Q,n)} = \sum_{q=0}^{q=Q} Y_s^{(q)} Y_x^{(q)}.$$

Diese Formel gilt (der eben gegebenen Ableitung zufolge) für jede endliche Zahl $Q$, und wird daher *wahrscheinlich* auch gültig bleiben für $Q = \infty$. W. z. z. w.

1) Strenge genommen bleiben die Formeln (*G.*) und (*H.*) nach wie vor *zweifelhaft*. Um solches anzudeuten, sind dieselben in (50.) durch ein *Fragezeichen* und durch *horizontale Unterstreichung* ausgezeichnet. Dasselbe Verfahren ist in (51.), dann später in (54.), (55.) u. s. w. beobachtet.

## § 12.

## Genaueres über die im vorhergehenden Paragraph erhaltenen zweifelhaften Formeln.

Um über jene zweifelhaften Formeln in (50.), (51.), so weit als möglich, ins Klare zu kommen, schicken wir folgenden Hülfssatz voraus.

**Hülfssatz.** — *Denkt man sich längs der gegebenen Curve $\sigma$ irgend welche Massenbelegungen ausgebreitet, deren Dichtigkeiten $\Delta$, $D^{(1)}$, $D^{(2)}$, $D^{(3)}$, ... stetig sind, bezeichnet man ferner die von diesen Belegungen ausgeübten Potentiale mit $\Omega$, $U^{(1)}$, $U^{(2)}$, $U^{(3)}$, ...*

$$\Omega_x = \int T_{x\sigma} \Delta_\sigma \, d\sigma ,$$

$$U_x^{(1)} = \int T_{x\sigma} D_\sigma^{(1)} \, d\sigma ,$$

(52.) $$U_x^{(2)} = \int T_{x\sigma} D_\sigma^{(2)} \, d\sigma , \qquad \text{(wo } x = a, s, i.)$$

$$U_x^{(3)} = \int T_{x\sigma} D_\sigma^{(3)} \, d\sigma ,$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

*und nimmt man an, dass die mit den constanten Coefficienten $C^{(1)}$, $C^{(2)}$, $C^{(3)}$, .... behaftete Entwicklung*

(53.) $$\Omega = C^{(1)} U^{(1)} + C^{(2)} U^{(2)} + C^{(3)} U^{(3)} + \cdots$$

*für die Gesammtheit der peripherischen Puncte s gültig und von gleichmässiger Convergenz sei; — so folgt hieraus, dass diese Entwicklung convergent und gültig bleibt für jedweden Punct i, und ebenso auch für jedweden Punct a.*

*Der Beweis für die Puncte i* beruht auf dem allgemeinen Satz, dass die extremen Werthe irgend einer Potentialfunction des *innern* Gebietes stets an seiner *Grenze*, d. i. auf der Curve $\sigma$ liegen. (Vergl. die »*Unt.*« Seite 40.)

Die Reihe

(α.) $$\Omega_s = \Sigma \, C^{(n)} U_s^{(n)}$$

ist nach unserer Voraussetzung für die Gesammtheit der Puncte $s$ von *gleichmässiger Convergenz*. Setzt man also

$$(\beta.) \qquad V_s = \Omega_s - \sum_{n=0}^{n=N} C^{(n)} U_s^{(n)},$$

so kann durch Vergrösserung von $N$ der absolute Werth von $V_s$ für sämmtliche Puncte $s$ unter einen beliebig gegebenen Kleinheitsgrad $\varepsilon$ hinabgedrückt werden:

$$(\gamma.) \qquad \text{als } V_s < \varepsilon.$$

Solches aber ausgeführt gedacht, wird zufolge des vorhin genannten allgemeinen Satzes für sämmtliche Puncte $i$ *dieselbe* Formel stattfinden, nämlich die Formel

$$(\delta.) \qquad \text{als } V_i < \varepsilon. \qquad \text{W. z. b. w.}$$

*Der Beweis für die Puncte a* beruht auf dem Satz, dass die extremen Werthe irgend einer Potentialfunction des *äussern Gebietes* an seiner *Grenze*, d. i. auf der Curve $\sigma$ liegen werden, sobald die Summe der diese Potentialfunction erzeugenden Massen den Werth *Null* hat. (Vgl. die »*Unt.*« S. 37.)

Nach unserer Voraussetzung ist die Reihe

$$(\varepsilon.) \qquad \Omega_s = \Sigma\, C^{(n)} U_s^{(n)}$$

für die Puncte $s$ von *gleichmässiger Convergenz*. Multiplicirt man daher diese Reihe mit $\delta_s\, ds$, wo $\delta$ die früher (Seite 69) besprochene Function bezeichnet, und integrirt, so wird die so entstehende neue Reihe

$$(\zeta.) \qquad \int \Omega_s \delta_s\, ds = \Sigma \left\{ C^{(n)} \int U_s^{(n)} \delta_s\, ds \right\}$$

ebenfalls *convergent* sein.

Nun ist nach (52.):

$$\Omega_s = \int T_{s\sigma} \Delta_\sigma\, d\sigma,$$

mithin:

$$\int \Omega_s \delta_s\, ds = \iint T_{s\sigma} \delta_s \Delta_\sigma\, ds\, d\sigma,$$

$$= \int \left\{ d\sigma\, \Delta_\sigma \int T_{\sigma s} \delta_s\, ds \right\},$$

also mit Rücksicht auf (47.) Seite 69:

$$\int \Omega_s \delta_s\, ds = \int \left( d\sigma\, \Delta_\sigma \right),$$

oder, was dasselbe:

$$(\eta.) \qquad \int \Omega_s \delta_s \, ds = \mathsf{M},$$

wo M die Summe der das Potential $\Omega$ erzeugenden Massen vorstellt. In analoger Weise ergiebt sich:

$$(\vartheta.) \qquad \int U_s^{(n)} \delta_s \, ds = M^{(n)},$$

falls nämlich $M^{(n)}$ die Summe der das Potential $U^{(n)}$ erzeugenden Massen vorstellt. — Mit Hinblick auf diese Gleichungen ($\eta.$), ($\vartheta.$) nimmt die *convergente* Formel ($\zeta.$) die Gestalt an:

$$(\iota.) \qquad \mathsf{M} = \Sigma C^{(n)} M^{(n)}.$$

Durch Subtraction von ($\varepsilon.$), ($\iota.$) ergiebt sich die Formel:

$$(\varkappa.) \qquad (\Omega_s - \mathsf{M}) = \Sigma C^{(n)} (U_s^{(n)} - M^{(n)}),$$

welche, ebenso wie ($\varepsilon.$), für die Gesammtheit der Puncte $s$ von *gleichmässiger Convergenz* ist. Bedient man sich der in (47.) Seite 69 behandelten Function

$$P_a, \; P_s, \; P_i,$$

und beachtet man, dass $P_s = 1$ ist, so kann man die Formel ($\varkappa.$) auch so schreiben:

$$(\lambda.) \qquad (\Omega_s - \mathsf{M} P_s) = \Sigma C^{(n)} (U_s^{(n)} - M^{(n)} P_s).$$

Da nun diese Reihe, ebenso wie ($\varepsilon.$), ($\varkappa.$), für die Puncte $s$ von gleichmässiger Convergenz ist, so wird sich, falls man

$$(\mu.) \qquad W_s = (\Omega_s - \mathsf{M} P_s) - \sum_{n=0}^{n=N} C^{(n)} (U_s^{(n)} - M^{(n)} P_s)$$

setzt, durch Vergrösserung von $N$ der absolute Werth von $W_s$ für sämmtliche Puncte $s$ unter einen beliebig gegebenen Kleinheitsgrad hinabdrücken lassen:

$$(\nu.) \qquad \text{als } W_s < \varepsilon.$$

Solches aber ausgeführt gedacht, folgt aus dem (zu Anfang dieser Beweisführung) genannten allgemeinen Satz, dass diese Formel ($\nu.$) auch stattfindet für sämmtliche Puncte $a$. Man erhält also:

$$(\xi.) \qquad \text{als } W_a < \varepsilon, \qquad \text{d. i. } \; W_a = \vartheta \varepsilon,$$

wo $\vartheta$ einen positiven oder negativen ächten Bruch bezeichnet, oder, falls man für $W_a$ seine eigentliche Bedeutung substituirt:

$$(o.)\qquad (\Omega_a - \mathsf{M}\, P_a) - \sum_{n=0}^{n=N} C^{(n)}\, (U_a^{(n)} - M^{(n)}\, P_a) = \vartheta\, \varepsilon\,,$$

oder, was dasselbe:

$$(\pi.)\qquad \left\{ \Omega_a - \sum_{n=0}^{n=N} C^{(n)}\, U_a^{(n)} \right\} = \left\{ \mathsf{M} - \sum_{n=0}^{n=N} C^{(n)}\, M^{(n)} \right\} P_a + \vartheta\, \varepsilon\,.$$

Durch Vergrösserung von $N$ kann man, weil die Reihe ($\iota.$) convergirt ist, den Ausdruck

$$P_a \left\{ (\mathsf{M} - \sum_{n=0}^{n=N} C^{(n)}\, M^{(n)}) \right\}$$

unter den gegebenen Kleinheitsgrad $\varepsilon$ herabdrücken. Solches aber ausgeführt gedacht, erhält man aus ($\pi.$):

$$(\varrho.)\qquad \Omega_a - \sum_{n=0}^{n=N} C^{(n)}\, U_a^{(n)} = (\Theta + \vartheta)\, \varepsilon\,,$$

wo $\Theta$ einen pos. oder neg. ächten Bruch vorstellt. W. z. b. w.

**Anwendung des Hülfssatzes.** — Wir haben in (39.) Seite 63 constatirt, dass für die peripherischen Puncte $s$ die Formel gilt:

$$(A.)\qquad Z_s^{(n)} = \sum_p C^{(n,\,p)}\, Y_s^{(p)}.$$

Auch kann, weil $Z_s^{(n)}$ längs der Curve $\sigma$ *stetig* ist, und $Y_s^{(0)}$, $Y_s^{(1)}$, $Y_s^{(2)}$, .... die trigonometrischen Functionen repräsentiren, kein Zweifel darüber stattfinden, dass diese Entwicklung ($A.$) für die Gesammtheit der Puncte $s$ von *gleichmässiger Convergenz* ist. Ferner ist nach (37.) Seite 63:

$$(B.)\qquad \begin{aligned} Z_x^{(n)} &= \int T_{x\sigma}\, Y_\sigma^{(n)}\, (\psi_\sigma)^{-1}\, d\sigma\,, \\ Y_x^{(n)} &= \int T_{x\sigma}\, X_\sigma^{(n)}\, (\psi_\sigma)^{-1}\, d\sigma\,, \end{aligned}$$

wo $Y_\sigma^{(n)}\, (\psi_\sigma)^{-1}$ und $X_\sigma^{(n)}\, (\psi_\sigma)^{-1}$ längs $\sigma$ *stetig* sind.

Somit sehen wir, dass

$$(C.)\qquad Z^{(n)} \text{ und } Y^{(0)},\ Y^{(1)},\ Y^{(2)},\ \ldots .$$

Potentiale sind, welche den in unserem Hülfsatz (Seite 73) an

$$\Omega \text{ und } U^{(1)},\ U^{(2)},\ U^{(3)},$$

gestellten Anforderungen entsprechen. Bringen wir aber diesen Hülfssatz auf die Potentiale ($C.$) in Anwendung, so ergiebt sich mit Rücksicht auf ($A.$) sofort, dass die Formeln

$$(D.) \qquad Z_i^{(n)} = \sum_p C^{(n,p)} Y_i^{(p)},$$

$$(E.) \qquad Z_a^{(n)} = \sum_p C^{(n,p)} Y_a^{(p)}$$

*convergent und gültig* sind für jedweden Punct $i$, resp. für jedweden Punct $a$.

**Resultat.** — Aus (*A.*), (*D.*), (*E.*) ergiebt sich, dass die *erste* der Formeln (50.) S. 72 keinem weitern Bedenken unterliegt; *so dass wir also zu schreiben haben:*

$$(54.) \quad \begin{aligned} Z_x^{(n)} &= \sum_p C^{(n,p)} Y_x^{(p)}, & Y_x^{(n)} &= \sum_p A^{(n,p)} Z_x^{(p)}, \text{ (wo } x = a, s, i.) \\ Y_s^{(n)} &= \sum_p C^{(n,p)} X_s^{(p)}, (?), & X_s^{(n)} &= \sum_p A^{(n,p)} Y_s^{(p)}, \end{aligned}$$

*und ferner:*

$$(55.) \qquad \sum_n Z_x^{(n)} X_s^{(n)} = \sum_n Y_x^{(n)} Y_s^{(n)}, \; (?), \qquad (x = a, s, i.)$$

*wo die beiden unterstrichenen Formeln, nach wie vor, zweifelhaft bleiben, also nur mit Vorsicht zu benutzen sind.*

## § 13.

## Entwicklung des Logarithmus der reciproken Entfernung zweier Puncte.

Repräsentirt $a$ irgend einen festen und von der Curve $\sigma$ *getrennten* Punct des *äussern* Gebietes, so wird

$$T_{a\,i}$$

eine Potentialfunction des *innern* Gebietes, welche sammt ihrer ersten [und zweiten] peripherischen Ableitung längs $\sigma$ *stetig* ist, und welche also (nach dem zweiten Theorem, Seite 66) für *sämmtliche Puncte* $i$, $s$ entwickelbar ist nach den $Z^{(n)}$:

$$(56.) \quad \begin{aligned} T_{a\,i} &= \sum_n C^{(n)} Z_i^{(n)}, \\ T_{a\,s} &= \sum_n C^{(n)} Z_s^{(n)}. \end{aligned}$$

Für die hier auftretenden constanten (d. h. nur von dem *festen* Puncte $a$ abhängenden) Coefficienten $C^{(n)}$ ergeben sich mittels der Integraleigenschaft (38. $b$) Seite 63 die Werthe:

$$C^{(n)} = \int T_{as} X_s^{(n)} (\psi_s)^{-1} ds;$$

und hieraus ergiebt sich mittels der Gleichung (37. $b$) Seite 63:

$$C^{(n)} = Y_a^{(n)}.$$

Demgemäss nehmen die Formeln (56.) folgende Gestalt an:

(57.) $$T_{ai} = \sum_n Y_a^{(n)} Z_i^{(n)}, \qquad T_{as} = \sum_n Y_a^{(n)} Z_s^{(n)}.$$ (wobei $a$ von der Curve $\sigma$ getrennt zu denken ist.)

Ist ferner, um zu einer ganz analogen Betrachtung überzugehen, $i$ irgend ein fester und von $\sigma$ getrennter Punct des *innern* Gebietes, so wird

$$T_{ia}$$

eine Potentialfunction des *äussern* Gebietes sein, welche sammt ihrer ersten [und zweiten] peripherischen Ableitung längs $\sigma$ *stetig* bleibt, und welche also (nach dem ersten Theorem Seite 65) für *sämmtliche Puncte* $a$, $s$ entwickelbar ist nach den $Z^{(n)}$:

(58.) $$T_{ia} = \sum_n D^{(n)} Z_a^{(n)}, \qquad T_{is} = \sum_n D^{(n)} Z_s^{(n)}.$$

Dabei ergeben sich für die Coefficienten $D^{(n)}$, mittels der Integraleigenschaft (38. $b$) Seite 63, die Werthe:

$$D^{(n)} = \int T_{is} X_s^{(n)} (\psi_s)^{-1} ds,$$

oder, mit Rücksicht auf (37. $b$) Seite 63:

$$D^{(n)} = Y_i^{(n)};$$

wodurch die Formeln (58.) folgende Gestalt erhalten:

(59.) $$T_{ia} = \sum_n Y_i^{(n)} Z_a^{(n)}, \qquad T_{is} = \sum_n Y_i^{(n)} Z_s^{(n)}.$$ (hier ist $i$ von der Curve $\sigma$ getrennt zu denken.)

**Zusammenfassung.** — Aus (57.) und (59.) folgt, *dass die Formeln*

$$(60.)\qquad T_{ai} = \sum_n Y_a^{(n)} Z_i^{(n)},\qquad T_{ai} = \sum_n Y_i^{(n)} Z_a^{(n)}$$

*sowohl dann gelten, wenn beide Puncte a und i von der Curve σ getrennt sind, als auch dann, wenn nur einer derselben einer solchen Trennung sich erfreut.* Liegen hingegen beide Puncte auf der Curve, so sind die Formeln unrichtig, oder wenigstens zweifelhaft. — Man bemerkt, dass diese Resultate in vollem Einklang stehen mit denjenigen *specielleren* Ergebnissen, die in (42) S. 64 notirt wurden.

**Weitere Untersuchung.** — Substituirt man in den Formeln (60.) für $Z_i^{(n)}$ und $Z_a^{(n)}$ die aus (54.) sich ergebenden Werthe, so erhält man:

$$(61.)\qquad T_{ai} = \sum_n \Big\{ Y_a^{(n)} \sum_p C^{(n,p)} Y_i^{(p)} \Big\},\qquad T_{ai} = \sum_n \Big\{ Y_i^{(n)} \sum_p C^{(n,p)} Y_a^{(p)} \Big\},$$

Und substituirt man andererseits in jenen Formeln (60.) für $Y_a^{(n)}$ und $Y_i^{(n)}$ die aus (54.) entspringenden Werthe, so ergiebt sich:

$$(62.)\qquad T_{ai} = \sum_n \Big\{ Z_i^{(n)} \sum_p A^{(n,p)} Z_a^{(p)} \Big\},\qquad T_{ai} = \sum_n \Big\{ Z_a^{(n)} \sum_p A^{(n,p)} Z_i^{(p)} \Big\}.$$

Diese *vier* Formeln (61.), (62) lassen sich zusammenfassen in folgende *zwei* Formeln:

$$(63.)\qquad T_{ai} = \sum_n \sum_p C^{(n,p)} Y_a^{(n)} Y_i^{(p)},\qquad T_{ai} = \sum_n \sum_p A^{(n,p)} Z_a^{(n)} Z_i^{(p)};$$

*wobei alsdann hinzuzufügen, dass in jeder dieser beiden Formeln* (63.) *die Reihenfolge der* (nach $n$ und $p$ auszuführenden) *Summationen gleichgültig ist, und ferner hinzuzufügen, dass diese Formeln* (63.) *sowohl dann gelten, wenn beide Puncte a und i von der Curve σ getrennt sind, als auch dann, wenn nur einer derselben einer solchen Trennung sich erfreut.*

## § 14.

## Die Dichtigkeit der Green'schen Belegung.

Ist $a$ ein fester und von der Curve $\sigma$ *getrennter* Punct des *äussern* Gebietes, so wird (wie schon zu Anfang des vorhergehenden Paragraphen bemerkt wurde)

$$T_{ia}$$

eine Potentialfunction des *inneren* Gebietes sein, welche sammt ihrer ersten [und zweiten] peripherischen Ableitung längs $\sigma$ *stetig* bleibt. Folglich wird diese Function (nach dem dritten Fundamentalsatz, S. 52) darstellbar sein als das Potential einer auf $\sigma$ ausgebreiteten Massenbelegung, deren Dichtigkeit längs $\sigma$ *stetig* bleibt. Bezeichnen wir also diese stetige Dichtigkeit mit $\eta_\sigma$, oder genauer (weil sie abhängt von dem festen Puncte $a$) mit $\eta_\sigma^a$, so ergiebt sich:

$$(64.)\qquad \begin{aligned} T_{ia} &= \int T_{i\sigma}\eta_\sigma^a \, d\sigma, \\ T_{sa} &= \int T_{s\sigma}\eta_\sigma^a \, d\sigma. \end{aligned}$$

Da $\eta_\sigma^a$ längs $\sigma$ *stetig* ist, so sind [nach (20. $\alpha$, $\beta$), Seite 55] $\eta^a$ und $\psi_\sigma \eta_\sigma^a$ *stetige* Functionen von $\omega$, mithin entwickelbar nach den $Y_\sigma^{(n)}$. Man erhält also z. B.:

$$(65.)\qquad \psi_\sigma \eta_\sigma^a = \Sigma C^{(n)} Y_\sigma^{(n)}.$$

Um die constanten (d. i. nur von dem *festen* Punct $a$ abhängenden) Coefficienten $C^{(n)}$ zu bestimmen, substituiren wir den Werth (65.) in die *zweite* Formel (64.) und erhalten hierdurch:

$$T_{sa} = \Sigma \left\{ C^{(n)} \int T_{s\sigma} Y_\sigma^{(n)} (\psi_\sigma)^{-1} d\sigma \right\},$$

also mit Rücksicht auf (37.) Seite 63:

$$T_{sa} = \Sigma\, C^{(n)} Z_s^{(n)}.$$

Hieraus aber folgt mittels der Integraleigenschaft (38. $b$) Seite 63:

$$C^{(n)} = \int T_{as} X_s^{(n)} (\psi_s)^{-1} ds,$$

also mit Rücksicht auf (37.) Seite 63:

$$C^{(n)} = Y_a^{(n)}.$$

Demgemäss gewinnt die Formel (65.) die Gestalt an:

(66.) $$\eta_\sigma^a = (\psi_\sigma)^{-1} \Sigma Y_a^{(n)} Y_\sigma^{(n)},$$

wofür man unter Anwendung der zweifelhaften Gleichung (55.) auch schreiben kann:

(67.) $$\underline{\eta_\sigma^a = (\psi_\sigma)^{-1} \Sigma Z_a^{(n)} X_\sigma^{(n)}}. \; (?)$$

Die hier behandelte Curvenbelegung, deren Dichtigkeit $\eta_\sigma^a$ ist, heisst bekanntlich *die dem Punct a entsprechende Green'sche Belegung*. Zu ganz analogen Resultaten gelangt man für $\eta_\sigma^i$, d. i. für *die einem innern Punct i entsprechende Green'sche Belegung*. Und man erhält daher folgenden Satz.

*Denkt man sich auf der Curve σ die einem äussern Puncte a oder die einem innern Puncte i entsprechende Green'sche Belegung ausgebreitet, und nimmt man an, dass jene Puncte a und i von der Curve getrennt sind, so gelten für die Dichtigkeiten* $\eta_s^a$ *und* $\eta_s^i$ *dieser Belegungen die Formeln:*

(68.) $$\eta_s^a = (\psi_s)^{-1} \Sigma Y_a^{(n)} Y_s^{(n)} = \underline{(\psi_s)^{-1} \Sigma Z_a^{(n)} X_s^{(n)}}, \; (?)$$
$$\eta_s^i = (\psi_s)^{-1} \Sigma Y_i^{(n)} Y_s^{(n)} = \underline{(\psi_s)^{-1} \Sigma Z_i^{(n)} X_s^{(n)}}, \; (?)$$

*wo die Gültigkeit der unterstrichenen Ausdrücke zweifelhaft bleibt.*

## § 15.

## Entwicklung der Green'schen Function.

Sind $a$ und $\alpha$ irgend zwei Puncte des *äussern* Gebietes, und bildet man die dem Puncte $a$ entsprechende Green'sche Belegung $(\eta^a)$, und sodann das Potential dieser Belegung auf den Punct $\alpha$, so heisst bekanntlich dieses Potential die *Green'sche Function*. Bezeichnet man also die letztere mit $G_\alpha^a$, so ist:

(α.) $$G_\alpha^a = \int T_{\alpha s}\, \eta_s^a \, ds,$$
$$G_\sigma^a = \int T_{\sigma s}\, \eta_s^a \, ds, \quad \text{(σ irgend ein periph. Punct.)}$$

oder mit Rücksicht auf (68.):

$$(\beta.)\qquad \begin{aligned} G^a_\alpha &= \Sigma\left\{ Y_a^{(n)} \int T_{\alpha s}\; Y_s^{(n)}\, (\psi_s)^{-1}\, ds \right\}, \\ G^a_\sigma &= \Sigma\left\{ Y_a^{(n)} \int T_{\sigma s}\; Y_s^{(n)}\, (\psi_s)^{-1}\, ds \right\}, \end{aligned}$$

oder endlich, mit Rücksicht auf (37.) Seite 63:

$$(69.)\qquad \left\{ \begin{aligned} G^a_\alpha &= \Sigma\, Y_a^{(n)}\, Z_\alpha^{(n)}, \\ G^a_\sigma &= \Sigma\, Y_a^{(n)}\, Z_\sigma^{(n)}. \end{aligned} \right.$$

(wo $a$ von der Curve $\sigma$ getrennt zu denken ist.)

Die *zweite* dieser Formeln zeigt mit Rücksicht auf (60.), dass

$$G^a_\sigma = T_{a\sigma}$$

ist, was mit den allgemeinen Eigenschaften der Green'schen Function in Einklang steht. Aus diesen allgemeinen Eigenschaften ergiebt sich übrigens, dass

$$G^a_\alpha = G^\alpha_a$$

ist. Demgemäss kann die *erste* der Formeln (69.) in doppelter Weise geschrieben werden:

$$(70.)\qquad \begin{aligned} G^a_\alpha &= \Sigma\, Y_a^{(n)}\, Z_\alpha^{(n)}, \\ G^a_\alpha &= \Sigma\, Y_\alpha^{(n)}\, Z_a^{(n)}. \end{aligned}$$

Substituirt man in diese Formeln (70.) für $Z_\alpha^{(n)}$ und $Z_a^{(n)}$ die aus (54.) sich ergebenden Werthe, so folgt:

$$(71.)\qquad \begin{aligned} G^a_\alpha &= \sum_n \left\{ Y_a^{(n)} \sum_p C^{(n,p)}\, Y_\alpha^{(p)} \right\}, \\ G^a_\alpha &= \sum_n \left\{ Y_\alpha^{(n)} \sum_p C^{(n,p)}\, Y_a^{(p)} \right\}. \end{aligned}$$

Und substituirt man andererseits in (70.) für $Y_a^{(n)}$ und $Y_\alpha^{(n)}$ die aus (54.) entspringenden Werthe, so folgt:

$$(72.)\qquad \begin{aligned} G^a_\alpha &= \sum_n \left\{ Z_\alpha^{(n)} \sum_p A^{(n,p)}\, Z_a^{(p)} \right\}, \\ G^a_\alpha &= \sum_n \left\{ Z_a^{(n)} \sum_p A^{(n,p)}\, Z_\alpha^{(p)} \right\}. \end{aligned}$$

Bezeichnet man die in Bezug auf $a$, $\alpha$ symmetrische Function $G^a_\alpha$ mit $G_{a\alpha}$, so können die *sechs* Formeln (70.), (71.), (72.) zusammengefasst werden in folgende *drei* Formeln:

$$(73.)\qquad \begin{aligned} G_{a\alpha} &= \sum_n Y_a^{(n)} Z_\alpha^{(n)}, \\ G_{a\alpha} &= \sum_n \sum_p C^{(n,p)} Y_a^{(n)} Y_\alpha^{(p)}, \\ G_{a\alpha} &= \sum_n \sum_p A^{(n,p)} Z_a^{(n)} Z_\alpha^{(p)}, \end{aligned}$$

*wobei alsdann hinzuzufügen ist, dass in den beiden letzten Formeln die Reihenfolge* (der nach $n$ und $p$ auszuführenden) *Summationen gleichgültig bleibt, und ferner hinzuzufügen ist, dass diese Formeln* (73.) *sowohl dann gelten, wenn beide Puncte $a$ und $\alpha$ von der Curve $\sigma$ getrennt sind, als auch dann, wenn nur einer derselben einer solchen Trennung sich erfreut.*

Sind ferner $i$ und $j$ zwei Puncte des *innern* Gebiets, so ergeben sich für die ihnen entsprechende Green'sche Function $G_{ij}$ in ganz analoger Weise die Formeln:

$$(74.)\qquad \begin{aligned} G_{ij} &= \sum_n Y_i^{(n)} Z_j^{(n)}, \\ G_{ij} &= \sum_n \sum_p C^{(n,p)} Y_i^{(n)} Y_j^{(p)}, \\ G_{ij} &= \sum_n \sum_p A^{(n,p)} Z_i^{(n)} Z_j^{(p)}, \end{aligned}$$

*wobei Aehnliches hinzuzufügen ist, wie in* (73.).

**Bemerkung.** Substituirt man in den Formeln ($\alpha$.) Seite 84 für $\eta_s^a$ den in (68.) angegebenen *zweifelhaften* Werth, so ergiebt sich:

$$G_\alpha^a = \Sigma\left\{ Z^{(n)} \int T_{\alpha s}\, X_s^{(n)} (\psi'_s)^{-1} ds \right\},$$

$$G_\sigma^a = \Sigma\left\{ Z_a^{(n)} \int T_{\sigma s}\, X_s^{(n)} (\psi'_s)^{-1} ds \right\},$$

also mit Rücksicht auf (37.) Seite 63:

$$(75.)\qquad \begin{aligned} G_\alpha^a &= \Sigma\, Z_a^{(n)} Y_\alpha^{(n)}, \\ G_\sigma^a &= \Sigma\, Z_a^{(n)} Y_\sigma^{(n)}. \end{aligned}$$

Die *erste* dieser Formeln ist richtig, weil sie mit der zweiten in (70.) übereinstimmt. Und die *zweite* Formel ist, weil $G_\sigma^a = T_{a\sigma}$ ist, ebenfalls richtig, wie sich leicht aus dem Satze (60.) ergiebt. *Wir sehen also, dass man in diesem Falle mittels der zweifelhaften Formel* (68.) *zu richtigen Resultaten gelangt.*

## § 16.

## Beiläufige Betrachtungen von ziemlich unsicherer Natur. Einführung neuer Functionen Ξ, H, Z an Stelle von X, Y, Z[1]).

Wir wollen uns die Constante $\lambda$ und daneben die unendlich vielen Constanten $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta \cdots$ den Bedingungen unterworfen denken:

$$(a.)\quad \begin{aligned} \alpha\alpha + \beta\beta + \gamma\gamma + \cdots\cdot &= 1, \\ A^{00}\alpha + A^{01}\beta + A^{02}\gamma + \cdots\cdot &= \lambda\alpha, \\ A^{10}\alpha + A^{11}\beta + A^{12}\gamma + \cdots\cdot &= \lambda\beta, \\ A^{20}\alpha + A^{21}\beta + A^{22}\gamma + \cdots\cdot &= \lambda\gamma, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \end{aligned}$$

wo die $A^{np}$ oder $A^{(n,p)}$ die früher festgesetzten Constanten sein sollen [vgl. (40.) Seite 63]. Hieraus ergeben sich für $\lambda$ und $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\cdots$ unendlich viele Werthsysteme. Und zwar wird, falls man irgend zwei solche Werthsysteme mit

$$(b.)\quad \begin{aligned} &\lambda^n, \alpha^n, \beta^n, \gamma^n, \cdots\cdot \\ &\lambda^p, \alpha^p, \beta^p, \gamma^p, \cdots\cdot \end{aligned}$$

bezeichnet, die Gleichung stattfinden:

$$(c.)\quad \alpha^n\alpha^p + \beta^n\beta^p + \gamma^n\gamma^p + \cdots\cdot = O^{np},$$

wo $O^{np}$ (ebenso wie bisher, vgl. Seite 57) eine Grösse vorstellt, welche $= 1$ oder $= 0$ ist, je nachdem die Zahlen $n$ und $p$ einander *gleich* oder von einander *verschieden* sind.

Statt der Functionen $Y$ und $Z$, die in der Beziehung zu einander stehen:

$$Z = \int T\,Y(\psi)^{-1}\,d\sigma, \text{ [vgl. (37.) Seite 63]}$$

mögen nun *neue* Functionen H und Z eingeführt werden, die in *derselben* Beziehung zu einander stehen:

$$(d.)\quad \mathsf{Z} = \int T\,\mathsf{H}(\psi)^{-1}\,d\sigma;$$

und zwar mag gesetzt werden:

$$(e.)\quad \mathsf{H} = \alpha Y^0 + \beta Y^1 + \gamma Y^2 + \cdots\cdot;$$

1) Vgl. die II. Bemerkung auf Seite 89. — Der Kürze willen mögen in diesem § die oberen Indices durchweg *ohne Einklammerung* geschrieben werden.

dann wird nach (*d.*):

$$(f.)\qquad \mathsf{Z} = \alpha Z^0 + \beta Z^1 + \gamma Z^2 + \cdots$$

Diese Formeln (*e.*), (*f.*) liefern, weil die Constanten $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\cdots$ unendlich viele Werthsysteme haben, *unendlich viele* Functionen H und Z. Denkt man sich irgend zwei solche Functionen H:

$$\mathsf{H}^n = \alpha^n Y^0 + \beta^n Y^1 + \gamma^n Y^2 + \cdots,$$
$$\mathsf{H}^p = \alpha^p Y^0 + \beta^p Y^1 + \gamma^p Y^2 + \cdots,$$

so ergiebt sich durch Multiplication und Integration:

$$\int \mathsf{H}^n \mathsf{H}^p (\psi)^{-1} d\sigma =$$
$$= \int (\alpha^n Y^0 + \beta^n Y^1 + \cdots)(\alpha^p Y^0 + \beta^p Y^1 + \cdots)(\psi)^{-1} d\sigma,$$

also mit Rücksicht auf die Integraleigenschaft der $Y$ [vgl. (38. *a*) Seite 63]:

$$\int \mathsf{H}^n \mathsf{H}^p (\psi)^{-1} d\sigma = \alpha^n \alpha^p + \beta^n \beta^p + \gamma^n \gamma^p + \cdots.$$

also nach (*c.*):

$$(g.)\qquad \int \mathsf{H}^n \mathsf{H}^p (\psi)^{-1} d\sigma = O^{np}.$$

Die Functionen H besitzen also *dieselbe* Integraleigenschaft, wie die $Y$. Eine zweite Eigenschaft der $Y$, auf welche wir uns bei unsern früheren Untersuchungen gestützt haben, besteht darin, dass jede stetige Function von $\omega$ nach den $Y$ entwickelbar ist. *Wir wollen annehmen*, dass diese letztere Eigenschaft den H ebenfalls zukomme, dass also jede stetige Function von $\omega$ nach den H entwickelbar sei.

(*h.*) $\cdots$ *Alsdann werden unsere frühern von den $Y$ ausgehenden Untersuchungen, bei Zugrundelegung der* H, *sich Schritt für Schritt von Neuem wiederholen lassen; und dieselbe Rolle, welche früher die $Z$ spielten, wird gegenwärtig den* Z *zu Theil werden.*

So werden also z. B. an Stelle der Entwicklungen (54.) Seite 77:

$$(i.)\qquad \begin{aligned} Y^0 &= A^{00} Z^0 + A^{01} Z^1 + A^{02} Z^2 + \cdots, \\ Y^1 &= A^{10} Z^0 + A^{11} Z^1 + A^{12} Z^2 + \cdots, \\ Y^2 &= A^{20} Z^0 + A^{21} Z^1 + A^{22} Z^2 + \cdots, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

sich gegenwärtig analoge Entwicklungen ergeben:

$$(k.)\quad \begin{aligned} \mathsf{H}^0 &= \mathsf{A}^{00}\mathsf{Z}^0 + \mathsf{A}^{01}\mathsf{Z}^1 + \mathsf{A}^{02}\mathsf{Z}^2 + \cdots, \\ \mathsf{H}^1 &= \mathsf{A}^{10}\mathsf{Z}^0 + \mathsf{A}^{11}\mathsf{Z}^1 + \mathsf{A}^{12}\mathsf{Z}^2 + \cdots, \\ \mathsf{H}^2 &= \mathsf{A}^{20}\mathsf{Z}^0 + \mathsf{A}^{21}\mathsf{Z}^1 + \mathsf{A}^{22}\mathsf{Z}^2 + \cdots, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

Wir stellen uns die Aufgabe, die Coefficienten $\mathsf{A}^{np}$ dieser neuen Entwicklungen näher zu untersuchen. Multipliciren wir zu diesem Zweck die Gleichungen (*i.*) der Reihe nach mit $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, ... und addiren, so ergiebt sich mit Rücksicht auf (*a.*):

$$\alpha Y^0 + \beta Y^1 + \gamma Y^2 + \cdots = \lambda(\alpha Z^0 + \beta Z^1 + \gamma Z^2 + \cdots),$$

also nach (*e.*) und (*f.*):

$$(l.)\qquad \mathsf{H} = \lambda \mathsf{Z}.$$

Diese Formel aber umfasst, weil die soeben angewandten Grössen $\lambda$, $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, ... unendlich viele Werthsysteme haben, *unendlich viele* Gleichungen, die der Reihe nach lauten:

$$(m.)\quad \begin{aligned} \mathsf{H}^0 &= \lambda^0\mathsf{Z}^0, \\ \mathsf{H}^1 &= \lambda^1\mathsf{Z}^1, \\ \mathsf{H}^2 &= \lambda^2\mathsf{Z}^2, \\ &\cdots\cdots \end{aligned}$$

Diese Gleichungen (*m.*) repräsentiren mithin die gesuchten Entwicklungen (*k.*), woraus folgt:

$$(n.)\quad \begin{aligned} &\mathsf{A}^{00} = \lambda^0, &&\mathsf{A}^{01} = 0, &&\mathsf{A}^{02} = 0, \cdots \\ &\mathsf{A}^{10} = 0, &&\mathsf{A}^{11} = \lambda^1, &&\mathsf{A}^{12} = 0, \cdots \\ &\mathsf{A}^{20} = 0, &&\mathsf{A}^{21} = 0, &&\mathsf{A}^{22} = \lambda^2, \cdots \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

**Die Entwicklungen von $T$, $G$, $\eta$.** — Mit Rücksicht auf (*m.*) erkennt man, dass die früher für $T$, $G$, $\eta$ erhaltenen Entwicklungen im gegenwärtigen Fall die Gestalt annehmen:

$$(o.)\qquad T_{ai} = \Sigma\, \mathsf{H}_a^n \mathsf{Z}_i^n = \Sigma\, \lambda^n \mathsf{Z}_a^n \mathsf{Z}_i^n, \qquad \text{[vgl. (60.) Seite 79.]}$$

$$(p.)\quad \begin{cases} G_{\alpha a} = \Sigma\, \mathsf{H}_a^n \mathsf{Z}_\alpha^n = \Sigma\, \lambda^n \mathsf{Z}_a^n \mathsf{Z}_\alpha^n, \\ G_{ij} = \Sigma\, \mathsf{H}_i^n \mathsf{Z}_j^n = \Sigma\, \lambda^n \mathsf{Z}_i^n \mathsf{Z}_j^n, \end{cases} \qquad \text{[vgl. (73.), (74.) S. 83.]}$$

$$(q.)\quad \begin{cases} \eta_s^a = (\psi_s)^{-1}\Sigma\, \mathsf{H}_a^n \mathsf{H}_s^n = (\psi_s)^{-1}\Sigma\, (\lambda^n)^2 \mathsf{Z}_a^n \mathsf{Z}_s^n, \\ \eta_s^i = (\psi_s)^{-1}\Sigma\, \mathsf{H}_i^n \mathsf{H}_s^n = (\psi_s)^{-1}\Sigma\, (\lambda^n)^2 \mathsf{Z}_i^n \mathsf{Z}_s^n; \end{cases} \qquad \text{[vgl. (68) S. 81.]}$$

so, dass also in all' diesen Entwicklungen schliesslich *nur* die Functionen $\mathsf{Z}$ enthalten sind.

**Die Entwicklungen von $P$, $\delta$.** — Die Beziehung der $Y$ zu den $Z$ war genau dieselbe wie die der $X$ zu den $Y$. In der That war z. B. nach (54.) Seite 77:

$$Y^n = \sum_p A^{np} Z^p,$$

$$X^n = \sum_p A^{np} Y^p.$$

Analoges wird also, falls wir die den $X$ entsprechenden Functionen mit $\Xi$ bezeichnen, im gegenwärtigen Falle gelten von der Beziehung der $\mathsf{H}$ zu den $\mathsf{Z}$ und der Beziehung der $\Xi$ zu den $\mathsf{H}$. Die *erstere* Beziehung ist aber dargestellt durch die Formeln ($m.$):

(r.) $$\mathsf{H}^n = \lambda^n \mathsf{Z}^n;$$

folglich wird die *letztere* dargestellt sein durch die analogen Formeln:

(s.) $$\Xi^n = \lambda^n \mathsf{H}^n = (\lambda^n)^2 \mathsf{Z}^n.$$

Mit Rücksicht auf ($r.$), ($s.$) erkennt man, dass die früher für $P$, $\delta$ erhaltenen Entwicklungen im gegenwärtigen Fall die Gestalt annehmen:

(t.) $$\begin{cases} P_a = \Sigma \alpha^n \mathsf{Z}_a^n, \\ 1 = P_s = \Sigma \alpha^n \mathsf{Z}_s^n, \\ 1 = P_i = \Sigma \alpha^n \mathsf{Z}_i^n; \end{cases}$$ [vgl. S. 69.]

(u.) $$\delta_s = (\psi_s)^{-1} \Sigma \alpha^n \mathsf{H}_s^n = (\psi_s)^{-1} \Sigma \alpha^n \lambda^n \mathsf{Z}_s^n;$$

(v.) $$\mu = \int \delta_s \, ds = \Sigma \alpha^n \beta^n;$$

wo die Constanten $\alpha^n$ und $\beta^n$ die Werthe haben:

(w.) $$\begin{cases} \alpha^n = \int \Xi^n (\psi)^{-1} \, d\sigma = (\lambda^n)^2 \int \mathsf{Z}^n (\psi)^{-1} \, d\sigma, \\ \beta^n = \int \mathsf{H}^n (\psi)^{-1} \, d\sigma = \lambda^n \int \mathsf{Z}^n (\psi)^{-1} \, d\sigma. \end{cases}$$

Demgemäss ist $\beta^n = \alpha^n (\lambda^n)^{-1}$; so dass also die Formel ($v.$) z. B. auch so geschrieben werden kann:

(x.) $$\mu = \Sigma (\alpha^n)^2 (\lambda^n)^{-1}.$$

## § 17.
## Vervollständigung der früheren Untersuchungen über $X$, $Y$, $Z$.

Wir haben (wie schon im vorhergehenden Paragraphen bemerkt wurde) bei unsern früheren Untersuchungen hinsichtlich der $Y$ nur *zwei* Eigenschaften in Anwendung gebracht, nämlich *erstens* die Integraleigenschaft: $\int Y^{(n)} Y^{(p)} (\psi)^{-1} d\sigma = O^{(n,p)}$, und *zweitens* die Eigenschaft, dass jede stetige Function von $\omega$ nach den $Y$ entwickelbar ist.

Wir wollen gegenwärtig in Betreff der $Y$ noch eine *dritte* Eigenschaft in Anwendung bringen, welche darin besteht, dass $Y^{(0)}$ eine *Constante* ist, nämlich:

$$Y^{(0)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}. \qquad \text{[vgl. S. 56.]} \tag{76.}$$

Mit Rücksicht hierauf können die Constanten $a^{(n)}$, $b^{(n)}$ (Seite 69) folgendermassen dargestellt werden:

$$a^{(n)} = \int X_\sigma^{(n)} (\psi_\sigma)^{-1} d\sigma = \sqrt{2\pi} \int Y_\sigma^{(0)} X_\sigma^{(n)} (\psi_\sigma)^{-1} d\sigma,$$

$$b^{(n)} = \int Y_\sigma^{(n)} (\psi_\sigma)^{-1} d\sigma = \sqrt{2\pi} \int Y_\sigma^{(0)} Y_\sigma^{(n)} (\psi_\sigma)^{-1} d\sigma;$$

und hieraus ergiebt sich nach (40.) und (38.) Seite 63 sofort:

$$\begin{aligned} a^{(n)} &= \sqrt{2\pi}\, A^{(n,0)} = \sqrt{2\pi}\, A^{(0,n)}, \\ b^{(n)} &= \sqrt{2\pi}\, O^{(n,0)} = \sqrt{2\pi}\, O^{(0,n)}. \end{aligned} \tag{77.}$$

Durch Substitution dieser Werthe (77.) gewinnen die Formeln (Seite 69) für $P$, $\delta$, $\mu$ folgende Gestalt:

$$\left\{ \begin{aligned} P_a &= \sqrt{2\pi}\, \Sigma A^{(0,n)} Z_a^{(n)}, \\ 1 = P_s &= \sqrt{2\pi}\, \Sigma A^{(0,n)} Z_s^{(n)}, \\ 1 = P_i &= \sqrt{2\pi}\, \Sigma A^{(0,n)} Z_i^{(n)}; \end{aligned} \right. \tag{78.}$$

ferner:

$$\delta_\sigma = \sqrt{2\pi}\, (\psi_\sigma)^{-1} \Sigma A^{(0,n)} Y_\sigma^{(n)}, \tag{79.}$$

endlich:

(80.) $$\mu = \int \delta_\sigma d\sigma = 2\pi A^{(0,0)} ;$$

woraus z. B. folgt, dass die der Curve $\sigma$ eigenthümliche Constante $\Gamma$ (vgl. Seite 47) den Werth hat:

(81.) $$\Gamma = \frac{P_i}{\mu} = \frac{1}{\mu} = \frac{1}{2\pi A^{(0,0)}} ;$$

vgl. die Note auf Seite 69.

## § 18.

## Nachträgliche Bemerkungen.

*I.* Eine längs irgend welcher Curve $\sigma$ gegebene Function ist in diesem Aufsatz als *abtheilungsweise stetig* bezeichnet, sobald man jene Curve $\sigma$ in eine endliche Anzahl von Strecken in solcher Weise zu zerlegen vermag, dass die Function längs jeder *einzelnen* Strecke stetig bleibt.

*II.* So unsicher die Betrachtungen des § 16 auch sein mögen, *so dürften dieselben dennoch,* wie ein genauerer Hinblick auf die Formeln ($o.$), ($p.$), ($q.$) Seite 86 erkennen lässt, *zur vorläufigen Orientirung in diesen unbekannten Regionen von einigem Nutzen sein.* Denn man bemerkt, dass jene Formeln ($o.$), ($p.$), ($q.$) vollkommen analog sind mit denjenigen, welche unter Anwendung der trigonometrischen Functionen für *Kreis* oder *Ellipse*, und ebenso auch mit denjenigen, welche unter Anwendung der Kugelfunctionen für *Kugel* oder *Rotationsellipsoid* sich ergeben.

---

## Inhaltsübersicht.

**W. Hankel**, *über eine eigenthümliche Funkenentladung am sogenannten negativen Pole eines Inductionsapparates.**)

Wenn an demjenigen Ende der Inductionsspirale eines Ruhmkorff'schen Apparates, welches beim Oeffnen eines in der primären oder inducirenden Spirale vorhandenen elektrischen Stromes den positiven Pol bildet, eine stumpfe Spitze angebracht ist, und dieser eine mit dem negativen Pole verbundene Platte oder etwas grosse Kugel gegenüber gestellt wird, so ist, wie bekannt, die Schlagweite beträchtlich grösser, als wenn umgekehrt die Spitze sich am negativen, die Platte aber (oder die Kugel) am positiven Pole befindet. Es scheint indess noch nicht beobachtet worden zu sein, dass durch den eben erwähnten Unterschied infolge von Oscillationen, welche in der Inductionsspirale entstehen, bei der zuletzt erwähnten Einrichtung (Spitze am negativen Pole) der merkwürdige Vorgang eintreten kann, dass aus der in Bezug auf den Oeffnungsstrom negativen Spitze positive Elektricität in langen Funken zur gegenüberstehenden Platte oder Kuge, übergeht.

Die Erscheinung wird sich am leichtesten an einigen speciellen Fällen erläutern lassen.

An dem für den Oeffnungsstrom positiven Pole eines von Ruhmkorff construirten sehr grossen Inductionsapparates war eine stumpfe Spitze angebracht; ihr gegenüber stand eine 200 mm im Durchmesser haltende Messingscheibe, welche, ebenso wie der andere, jetzt negative Pol der Inductionsspirale durch Kupferdrähte mit den Gasröhren des Hauses verbunden, also zur Erde abgeleitet war.

Wenn nun der elektrische Strom in der inducirenden Spirale durch vier kleine mit mässig concentrirter Salpetersäure gefüllte Grove'sche Elemente erzeugt wurde, so schlugen, wenn der dem Apparate beigegebene Unterbrecher in Thätigkeit gesetzt

*) Vorgetragen und zum Druck übergeben in der Sitzung am 14. November 1878.

wurde, bei 240 mm Abstand der Spitze von der Platte zickzackförmige Funken über, während bei grösseren Abständen an der Spitze nur mit einem gewissen Geräusche in strahlenden Büscheln ausströmende Entladungen erschienen.

Wurde durch Umlegen des Commutators die elektrische Beschaffenheit der beiden Enden der Spiralen umgekehrt, so dass also jetzt die Spitze mit dem negativen, die Platte aber mit dem positiven Pole der Inductionsspirale verbunden war, so traten bei gleich starkem primären Strome die Funken erst bei 96 mm Abstand ein; war die Spitze weiter von der Platte entfernt, so zeigten sich nur Ausstrahlungen. Die bei 96 mm Abstand erscheinenden Funken waren zickzackförmig, dünn und wenig schallend, und behielten bei Annäherung der Spitze an die Platte diesen Charakter bei, bis der Abstand auf 56 mm verringert war. Jetzt änderte der Funke seine Beschaffenheit; er wurde geradlinig, massiger und erzeugte einen intensiveren Schall.

Das eigenthümliche Aussehen der in dem Intervall von 96 bis 56 mm erscheinenden Funken erregte die Vermuthung, dass sie, obwohl sie aus dem sogenannten negativen Pole kamen, doch positive Elektricität aus diesem zur Platte überführen dürften. Und in der That liess sich diese Vermuthung als thatsächlich begründet leicht nachweisen.

Bei derselben Einrichtung, wie sie zuvor beschrieben, wurde in die Ableitung der Platte zu den Gasröhren eine zweischenklige Holtz'sche Trichterröhre eingeschaltet. Da bekanntlich der positive Strom leichter in der Richtung von der engen Oeffnung nach der weiteren Mündung der Trichter die Röhre durchdringt, so liess sich durch das in diesen Trichterröhren erscheinende Licht die Art der durch die Funkenentladung übergeführten Elektricität erkennen.

Wenn nun der Commutator am Unterbrecher wieder so gestellt wurde, dass die stumpfe Spitze am positiven Pole lag, und in einem Abstand von mehr als 240 mm [1] der Platte gegenübergestellt war, so dass nur die mit einigem Geräusch verbundenen büschelförmigen Ausstrahlungen entstanden, so zeigten

1) Wenn auch infolge einer geringen Abnahme in der Intensität des angewandten Stromes und kleiner Abweichungen im Apparate die Grenzen der Schlagweiten um einige Millimeter schwankten, so behalte ich doch der leichtern Uebersicht wegen die oben angegebenen Zahlen bei, da ja die absolute Grösse derselben keine wesentliche Bedeutung hat.

beide Schenkel der Trichterröhre ein schwaches Licht; es traten also, jedenfalls nach einander, in der Richtung abwechselnde Ströme in der von der Platte nach der Erde führenden Leitung auf. Bei geringeren Abständen als 240 mm, wo also die Elektricität in zickzackförmigen Funken überging, erschien die eine Röhre, und zwar diejenige, in welcher die von der Spitze zur Platte übergegangene Elektricität durch die Spitzen in die Trichter eintrat, stark leuchtend, während sich in der anderen nur ein schwaches Licht, wie solches bei den grösseren Abständen beobachtet worden, zeigte.

Wurde sodann der Commutator umgelegt und die mit dem negativen Pole verbundene Spitze der durch die Trichterröhren zur Erde abgeleiteten Platte in einem grösseren Abstande als 96 mm gegenübergestellt (wobei also an der Spitze nur Ausstrahlungen auftraten), so leuchteten beide Schenkel der Trichterröhre schwach. Dagegen leuchtete bei einem Abstande zwischen 96 und 56 mm, wo also die dünnen, zickzackförmigen, wenig schallenden Funken übergingen, die eine Röhre stark, und zwar genau dieselbe, welche zuvor, als die Spitze mit dem positiven Pole verbunden war, starkes Licht gegeben hatte, während in der anderen nur das schwache Leuchten sich zeigte. Es war dies also ein deutlicher Beweis, dass aus der am negativen Pole angebrachten Spitze jetzt positive Elektricität in Funken zur gegenüberstehenden Platte überging. Näherte ich die Spitze weiter, so dass ihr Abstand von der Platte geringer als 56 mm wurde, die Funken also geradlinig, massiger und lauter schallend auftraten, so erschien das starke Licht in der anderen Röhre, ein Beweis, dass bei diesen kleineren Entfernungen negative Elektricität von der Spitze zur Platte übergeführt worden.

Als zur Erzeugung des primären Stromes anstatt vier, nur drei Grove'sche Elemente verwendet wurden, betrug, wenn die Spitze am positiven Pole angebracht war, die Maximaldistanz, in welcher Funken entstanden, 209 mm; befand sich dagegen die Spitze am negativen Pole, so erschienen Funken zuerst bei einem Abstande von 84 mm, und zwar dünne, zickzackförmige, wenig schallende, in welchen positive Elektricität aus der Spitze zur Platte überging; negative Funken aber, welche geradlinig, massiger und lauter waren, traten erst auf, als die Spitze der Platte bis auf 48 mm genähert wurde.

Die vorstehenden Versuche wurden wiederholt und bestä-

tigt, nachdem an Stelle der zweischenkligen Trichterröhre eine etwas weite vor den Polen eines starken Hufeisenmagnets liegende Geissler'sche Röhre in die Leitung von der Platte zu den Gasröhren des Hauses eingeschaltet worden. Aus der Ablenkung des elektrischen Lichtes in der Röhre liess sich ebenfalls die Art der von der Spitze zur Platte gehenden Elektricität erkennen.

Die Versuche wurden ferner noch in der Weise abgeändert. dass die Platte mit dem inneren Belege einer Batterie aus 6 bis 18 grossen Leydener Flaschen verbunden wurde, während das äussere Beleg durch die Gasröhren des Hauses abgeleitet war.

Bei dieser Einrichtung konnte die auf die Batterie übergeführte Elektricität mittelst einer Probekugel und eines Elektrometers bestimmt, und so auf einem ganz directen Wege die Richtigkeit der früheren Beobachtungen nachgewiesen werden.

Wurde bei derselben Einrichtung das innere Beleg noch mittelst der zweischenkligen Trichterröhre mit den Gasröhren verbunden, so blieben die Lichterscheinungen in diesen Röhren im Allgemeinen dieselben, wie sie ohne Hinzufügung der Batterie beobachtet worden; nur erschien, wenn Funken überschlugen, blos das helle Licht in der einen Röhre, während die andere dunkel blieb; es trat also der Unterschied in der Art der übergeführten Elektricität, wenn die Spitze sich am negativen Pole befand, noch deutlicher hervor. Durch die Einschaltung der Batterie war die Entladung so verlangsamt worden, dass das schwache Licht nicht mehr sichtbar wurde.

Wenn bei dieser letzten Anordnung der Strom der magnetisirenden Spirale nur durch zwei Grove'sche Elemente gebildet wurde, so traten, wenn die Spitze am negativen Pole stand und die Platte mit einer Batterie von 6 Flaschen verbunden war, die positiven dünnen Funken nur innerhalb eines Abstandes von 40 bis 37 mm auf, aber die Trichterröhre zeigte sich, eben wegen der Verlangsamung der Entladung durch die Batterie, nicht leuchtend; das Licht trat aber sofort in der entsprechenden Röhre auf, als die Batterie ausgeschlossen und also die Platte direct durch die Trichterröhre mit den Gasröhren des Hauses verbunden wurde.

Bisher war der eine Pol des Inductionsapparates stets mit den Gasröhren verbunden und also zur Erde abgeleitet gewesen. Es mögen daher schliesslich noch einige Angaben folgen über

die Entladungsfunken, wenn die Spitze sowohl als die Platte mit den isolirten Enden der Inductionsspirale in Verbindung stehen.

Der Strom zum Magnetisiren des Eisenkernes wurde von 4 Grove'schen Elementen geliefert, die Schliessung und Unterbrechung desselben aber nicht wie früher durch den kleinen Elektromagnet des Ruhmkorff'schen Unterbrechers vollzogen, sondern einfach durch die Bewegung des die Platinspitze tragenden Armes mittelst der Hand, und zwar wurde absichtlich die Dauer der Schliessung etwas gross genommen.

Befand sich die stumpfe Spitze am positiven, die Platte oder Scheibe von 200 mm Durchmesser aber am negativen Pole, so war die grösste Weite, in welcher die Funken erschienen, 335 mm.

Schon Callan[1]) führt an, dass die Funken schwächer und weniger schallend werden, wenn die positive Spitze der Platte immer mehr genähert wird. Dies zeigte sich auch bei meinen Versuchen, indem bei grossen Abständen die zickzackförmigen Funken hell erschienen und laut schallten, bei Annäherung der Spitze an die Platte aber sich mit einer röthlichen Hülle umgaben, weniger hell leuchteten und einen schwächeren Schall erzeugten.

War die Spitze mit dem negativen Pole, die Platte aber mit dem positiven Pole verbunden, so schlugen bei 220 mm Abstand die zickzackförmigen Funken von der Spitze zum Rande, oder vielleicht angemessener gesagt von dem Rande der Platte zur Spitze; der Schall hatte etwas Hohles, was wahrscheinlich durch die Erschütterung der Platte bewirkt wurde; bei 65 mm Abstand erschienen aber gerade von der Spitze zur Mitte der Platte gehende Funken, welche eine gelbrothe Hülle besassen, und deren hellerer innerer Theil in der Nähe der Platte unterbrochen war. An dieser Unterbrechungsstelle bestand nur das rothgelbe Licht; je nach dem Abstande der Spitze und Platte war das auf der Platte stehende Stück des helleren inneren Theiles etwas länger oder kürzer. Bei einer Funkenlänge von 40 mm war das

---

1) The Lond., Edinb. and Dubl. Philosoph. Magaz. and Journ. of Science. 4 Ser. Bd. 25. 1863. S. 415. The sparks from a positive point to a negative plate grow weaker and less loud as the point is made to approach the plate. But when a negative point is brought within two or three inches from a positive plate, the sparks become as loud as if the plate were charged, or as if they were produced by a small Leyden jar whose opposite contings were connected with the ends of the coil.

leuchtende auf der Platte stehende Stückchen sehr kurz, verlängerte sich aber etwas, wenn die Schlagweiten vergrössert wurden.

Diese geradlinigen Funken geben einen lauten Schall, und wahrscheinlich auch den stärksten, bei der grössten Schlagweite, in welcher sie noch entstehen [1]; wenigstens nimmt derselbe ab, wenn die Spitze der Platte mehr genähert wird. Bei gleichem Abstande der Spitze von der Platte (innerhalb des Intervalles, in welchem von der negativen Spitze geradlinige Funken zur Platte gehen) schien der Schall lauter zu sein, wenn die Spitze negativ, als wenn sie positiv war.

Wenn die Spitze mit dem negativen Ende der Inductionsspirale verbunden und ungefähr 75 mm von der Platte entfernt war, so schlugen gewöhnlich, wie schon bemerkt, die zickzackförmigen Funken zwischen Spitze und Rand über. Es gelang jedoch auch, zickzackförmige Funken zwischen der Spitze und dem mittleren Theile der Platte zu erhalten, welche röthlicher waren als die ersteren und auch weniger laut schallten. Als nun zwischen die Platte und den positiven Pol der Inductionsspirale die Trichterröhre eingeschaltet wurde, liess sich erkennen, dass die positive Elektricität bei den Funken zwischen Spitze und Rand von der Platte zur Spitze, bei den schwächeren Funken zwischen der Spitze und den mittleren Theilen der Platte aber von der Spitze zu der Platte ging. Die stärkern Funken vom Rande zur Spitze konnten bei der angegebenen Schlagweite durch eine längere, die andern schwächeren durch eine sehr kurze Schliessung des primären Stromes erhalten werden; im ersteren Falle reichte also die am Rande der Platte erzeugte Spannung zum Hervorbrechen des Funkens hin, dagegen nicht im zweiten Falle, wo die positive Elektricität dann aus der Spitze zu den näheren mittleren Theilen der Platte überging.

Auf die Entstehung der positiven Funken aus der mit dem negativen Pole verbundenen Spitze scheint die Art der Unterbrechung des Stromes in der magnetisirenden Spirale von Einfluss zu sein. Die Erscheinung zeigte sich stets, wenn in den

---

1) Wie die in der vorhergehenden Anmerkung stehenden Worte Callan's beweisen, sagt er nicht, dass die Funken aus der negativen Spitze mit der Annäherung der Spitze an die Platte stärker und lauter werden, wie dies wohl angeführt wird, sondern nur, dass der Schall bei kurzen Funken (2—3 Zoll) sehr laut ist.

Ruhmkorff'schen Unterbrecher frisch gereinigtes Quecksilber und noch nicht benutzter absoluter Alkohol eingefüllt waren, während bei einem Versuche mit längere Zeit benutztem und dann auch mehrere Tage in dem Apparate gestandenem Quecksilber und Alkohol die positiven Funken aus der negativen Spitze nicht erhalten werden konnten.

Der eigenthümliche Vorgang des Austretens positiver Elektricität aus der am sogenannten negativen Pole befindlichen Spitze findet seine Erklärung in den Oscillationen, welche im nicht geschlossenen Inductionsdrahte nach der Oeffnung des Stromes in der primären Spirale stattfinden. Ich will mich bei seiner Erläuterung an die zuerst mitgetheilten Versuche anschliessen.

Die Oeffnung des Stromes in der primären Spirale führt gegen die am sogenannten negativen Pole befindliche Spitze zuerst negative Elektricität. Ist nun der Abstand dieser Spitze von der ihr gegenüberstehenden Platte grösser als 96 mm, so vermag die negative Elektricität nicht in Funken überzugehen; aber auch die unmittelbar darauf im Inductionsdrahte entstehende Oscillation, welche zu der eben zuvor negativen Spitze jetzt positive Elektricität führt, hat nicht Kraft genug, diese positive Elektricität in Funken zu entladen, weil die durch diese Rückschwingung bewirkte Spannung schwächer ist, als wie sie der erste directe Antrieb des Oeffnungsstromes bewirkt; (dieser vermochte eine Strecke von 240 mm zu durchbrechen). Wird die am negativen Pole befindliche Spitze der Platte bis auf einen zwischen 96 und 56 mm liegenden Abstand genähert, so kann zwar auch jetzt die durch die Oeffnung des primären Stromes in die Spitze getriebene negative Elektricität noch nicht in Funken übergehen, wohl aber vermag dies die in der unmittelbar darauf folgenden Oscillation zu der Spitze gelangende positive. Da jedoch, wie schon zuvor bemerkt, die durch sie erzeugte Spannung geringer ist als die durch die directe Wirkung aus der Oeffnung hervorgebrachte, so ist der Funke dünner und weniger kräftig[1], als wenn bei demselben Abstande durch Umwechseln der Richtung des primären Stromes die Spitze zum positiven Pole gemacht wird. Nähert man nun die negative Spitze noch weiter der Platte, bis zu einem weniger als 56 mm betragenden

1) Es wird von Wichtigkeit sein, die Menge der bei den verschiedenen Funken übergeführten Elektricitätsmengen zu bestimmen.

Abstande, so vermag jetzt die durch die Oeffnung des primären Stromes ihr zugeführte negative Elektricität in Funken überzugehen. Durch diese Entladung ist dann aber die folgende Oscillation so geschwächt, dass sie die entsprechende Trichterröhre gar nicht oder nur sehr schwach zum Leuchten bringt.

Im Vorstehenden habe ich den meines Erachtens hinreichendes Interesse darbietenden Vorgang in einigen speciellen Fällen beschrieben; die genauere Untersuchung, welche längere Zeit erfordern wird, muss ich einer späteren Arbeit vorbehalten.

---

**C. Bruhns,** *über die Mondfinsterniss im Jahre 33 nach Christi Geburt am 3. April.**)

Herr Professor Lutterbeck in Giessen wandte sich im Juli 1878 an mich mit einigen Fragen über die Zeit, Dauer und Grösse der Mondfinsterniss im Jahre 33 am 3. April und besonders über die Sichtbarkeit in Jerusalem. Eine vorläufige Rechnung sowohl nach Largeteau's, wie nach Hansen's ekliptischen Tafeln zeigte mir, wie auch in verschiedenen chronologischen Werken aufgezeichnet ist, dass die Finsterniss wirklich stattgefunden habe und dass die vorläufigen Daten über die Opposition zwischen Sonne und Mond, welche Herr Lutterbeck der Güte des Professors Förster verdankte, nach den Tafeln von Largeteau berechnet waren. Eine genauere Berechnung nahm ich nach Burckhardt's und Lalande's Mondtafeln vor und theilte meine Resultate damals Herrn Lutterbeck mit, und um überhaupt zu sehen, wie die verschiedenen Mondtafeln diese Finsterniss angeben, habe ich auch nachträglich nach Hansen's Mondtafeln [1]) gerechnet, bei welcher Arbeit der zweite Observator der Sternwarte, Herr Dr. Peter, mich unterstützte, sodass alle Rechnungen doppelt ausgeführt sind.

Die Sonnenlängen nach den Tafeln von Lalande, Carlini, Hansen und Olufsen, und Leverrier stimmen für diese Zeit in-

---

*) Vorgetragen in der Sitzung am 4. Nov. 1878.

1) Die Mondörter aus Hansen's Tafeln hat auch Herr F. Anton in Wien gerechnet und mir mitgetheilt.

nerhalb 2 Minuten überein, ich führe deshalb hier nur die Werthe nach Lalande's und Leverrier's Tafeln auf.

Länge der Sonne

| 33 n. Chr. | nach Lalande | nach Leverrier |
|---|---|---|
| April 3 $2^h$ mittl. Par. Zt. | 11° 28′ 49″ | 11° 27′ 9″ |
| 4 „ „ „ | 33 39 | 31 59 |
| 6 „ „ „ | 38 30 | 36 49 |

Die Mondörter für dieselben Zeiten sind:

Länge des Mondes

| 33 n. Chr. | nach Lalande | nach Burckhardt | nach Hansen |
|---|---|---|---|
| April 3 $2^h$ | 190° 51′ 5″ | 190° 24′ 6″ | 191° 2′ 18″ |
| 4 | 191 51 32 | 191 24 23 | 192 2 50 |
| 6 | 192 52 3 | 192 24 46 | 193 3 27 |

Breite des Mondes

| 33 n. Chr. | nach Lalande | nach Burckhardt | nach Hansen |
|---|---|---|---|
| April 3 $2^h$ | — 0° 32′ 35″ | — 0° 31′ 46″ | — 0° 33′ 29″ |
| 4 | 0 38 7 | 0 37 17 | 0 39 2 |
| 6 | 0 43 39 | 0 42 49 | 0 44 36 |

Den scheinbaren Sonnenhalbmesser nehme ich in den folgenden Rechnungen nach Leverrier's Tafeln zu 15′ 52″, die Aequatorialhorizontalparallaxe zu 9″, dieselben Grössen für den Mond zu 14′ 51″ und zu 54′ 40″, 42″, 44″ an.

Es findet sich damit die Zeit des Vollmondes nach den verschiedenen Mondtafeln und den Leverrier'schen Sonnentafeln

| 33 n. Chr. | April 3 |
|---|---|
| Lalande's Mondtafeln | $3^h$ $17^m.8$ mittl. Par. Zt. |
| Burckhardt's „ | 4 16.4 „ „ „ |
| Hansen's „ | 2 53.6 „ „ „ |

Die ekliptischen Tafeln von Hansen geben $2^h$ $56^m.6$, also so nahe übereinstimmend, als man nur erwarten kann.

Herr Newcomb hat jüngst in einem besondern Werke: »Researches of the motion of the moon« Washington 1878, die Genauigkeit der Hansen'schen Mondtafeln untersucht und ist der Ansicht, dass die von Hansen angenommene säculare Beschleunigung der Mondbewegung nicht richtig ist, und findet, dass an die aus Hansen's Tafeln gerechneten Längen für die Zeit

— 189 — 20′ ± 3′
+ 134 — 16′ ± 4′ als Correction anzubringen ist.

Für die Zeit 33 n. Chr. würde also die Verbesserung

— 18′

betragen und dann würde die Zeit des Vollmondes nicht $2^h\ 54^m$ sondern $3^h\ 33^m$ sein, also zwischen den Werthen nach Lalande und Burckhardt liegen.

Nachdem die Opposition des Mondes zur Sonne abgeleitet, ist es leicht, Anfang und Ende und Grösse der Finsterniss in Monddurchmesser, sowie die Grenzen der Sichtbarkeit zu berechnen. Ich gebe die Daten nach Jerusalemer Zeit, wobei ich Jerusalem zu $2^h\ 11^m\ 32^s$ östlich von Paris und in $+31^0\ 47'$ Breite annehme.

Es findet sich, wenn man die Vergrösserung des Erdschattens durch die Atmosphäre zu $^1/_{60}$ annimmt:

| | Anfang der Finsterniss | Ende der Finsterniss | Grösse | Mond stand im Zenith Anfang λ | Anfang φ | Ende λ | Ende φ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Mondtafeln von Lalande | $3^h\ 54^m$ | $6^h\ 19^m$ | 0,63 | 133° | — 5° | 111° | — 5° |
| „ „ Burckhardt | 4 56 | 7 44 | 0,57 | 118 | — 5 | 98 | — 5 |
| „ „ Hansen | 3 29 | 6 25 | 0,63 | 139 | — 5 | 118 | — 5 |
| „ „ Hansen mit der Correction von Newcomb | 4 11 | 7 0 | 0,62 | 129 | — 5 | 108 | — 5 |

λ ist die Länge östlich von Paris, φ die Breite.

Der Mond ging in Jerusalem nahe um $6^h\ 15^m$ auf und ging daher nach allen Mondtafeln verfinstert auf. Die Finsterniss erreichte ihr Ende, als in Jerusalem die Höhe des Mondes nach Hansen's Tafeln circa 2°,

„ „ „ mit Newcomb's Correction circa 9°,

„ Lalande's Tafeln circa 7°,

„ Burckhardt's Tafeln circa 18° betrug.

Herr Professor Lutterbeck hat diese Finsterniss am 3. April, einem Freitage, mit der in der Bibel angegebenen Finsterniss bei dem Tode Christi in Verbindung gebracht, welcher Hypothese ich ganz fern stehe.

Druck von Breitkopf & Härtel in Leipzig.

# Jahresbericht

der

# Fürstlich Jablonowski'schen Gesellschaft.

---

Leipzig, im März 1879.

Von den zwei Preisfragen, welche die Gesellschaft für das Jahr 1878 gestellt, sind nur auf die eine, welche »eine Zusammenstellung der deutlich nachweisbaren slawischen Namen für Ortschaften des jetzigen deutschen Reiches« hervorzurufen wünschte, Bewerbungsschriften eingegangen, und zwar fünf an Zahl.

Eine dieser Abhandlungen, die unter dem Motto »Et pius est patriae facta referre labor« eingesendet wurde, behandelt »die Niederlassungen der Sorben oder Wenden auf dem linken Ufer der Saale«, also ein besonders interessantes Gebiet. Doch zeigt der Verfasser auf dem historischen wie auf dem linguistischen Felde zu wenig selbständige Forschung und Sicherheit. Auch hätte man bei dem kleinen Umfange des Locals eine Bereicherung des Ortsnamensverzeichnisses durch Flurnamen und ähnliches erwartet.

Eine zweite Schrift mit dem Motto »Patriae amans« bespricht »die slawischen Ortsnamen im nordthüringischen Hassengau«. Dieser Verfasser erwies sich zwar auf dem kleinen Gaugebiete, das er erwählt, in erfreulicher Weise bekannt: er hat aus Flurbüchern und Flurkarten, freilich unter Hintanstellung des chronistischen Materials, eine grosse Menge von Dorf- und Flurnamen mit ihren urkundlichen Formen gesammelt und in geschickter Anordnung ein klares ethnographisches Bild entworfen, auch Trachten, Sitten und dergleichen zu verwerthen gewusst. Aber die sprachliche Behandlung der Namen zeigte doch deutlich, dass der Verf. nach dieser Seite hin seiner Aufgabe nicht gewachsen war.

Minder noch genügte eine dritte Arbeit mit dem Motto »On ne cueille pas des roses qui soient sans épines« über die slawischen Ortsnamen beider Mecklenburg. Zwar stützte sich

die Sammlung der Namen meist auf die vortrefflichen Register zum Mecklenburgischen Urkundenbuche, aber sie war trotzdem nicht sorgsam durchgeführt, und es wurden Namensformen aus bedenklichen Quellen miteingemischt. Auch bei der sprachlichen Bearbeitung der Namen erschien der von Miklosich entlehnte Weg für den vorliegenden Zweck nicht praktisch.

Eine vierte Abhandlung, die unter dem Motto »Auxiliis veris uti sobrie ac commode« eingesendet wurde, führt den Titel »Ueber slawische Ortsnamen in deutschen Gebieten«, behandelt aber nur Oberschlesien, Neuvorpommern mit Rügen und Mecklenburg. Derjenige Theil dieser sehr umfangreichen und fleissigen Schrift, der Oberschlesien betrifft, zeigt zwar die grosse Vertrautheit des Verf. mit dieser Region, doch konnte der Natur der Sache nach aus den oberschlesischen Ortsnamen der Wissenschaft ein erheblicher Nutzen nicht erwachsen. Der Verf. erscheint in Allem, was die Ortsnamenbildung angeht, wohl bewandert, und auch seine sprachliche Behandlung der Namen würde im ganzen zu loben sein. Leider aber scheint ein systematisches Verfahren auf Grund der älteren und urkundlich zu belegenden Namensformen seiner wissenschaftlichen Natur fern gelegen zu haben, überhaupt wohl das historische Gebiet seinen bisherigen Studien ziemlich fremd geblieben zu sein.

Die mit dem Motto Helmold's »deficientibus sensim Slavis« uns zugegangene fünfte Abhandlung hat »die slawischen Ansiedelungen in der Altmark, im Braunschweigischen und Magdeburgischen« zum Gegenstande. Der Verf. ist offenbar im Besitze der vollen Ausrüstung, die zu einer glücklichen Lösung der Frage nothwendig war, vor allem einer wissenschaftlichen Kenntniss der slawischen Sprachen. Aber er weiss auch die historischen Fragen mit Verständniss und Urtheil zu erwägen. Er ist nicht nur den Ortsnamen, auch sonstigen slawischen Sprachresten, Sitten, der Bauart der Dörfer u. s. w. nachgegangen, um die Siedelung und Ausbreitung der Slawen in jenen Gegenden festzustellen. Er hat das eigentliche Ziel der Preisfrage am richtigsten gefasst und ist zu werthvollen

Resultaten gelangt. Die Gesellschaft trug daher kein Bedenken, ihm den vollen Preis zuzuerkennen. — Bei Eröffnung des versiegelten Zettels fand sich der Name: Dr. Alexander Brückner, Privatdocent für vergleichende Grammatik der slawischen Sprachen in Lemberg (Galizien).

---

Für die Jahre 1879 bis 1882 sind von der Gesellschaft folgende Preisaufgaben gestellt worden:

## I. Historisch-nationalökonomische Section.

### 1. Für das Jahr 1879.

Bei der grossen und für die jeweilig erreichte Entwickelungsstufe der ganzen Volkswirthschaft charakteristischen Bedeutung, welche die Handelsmessen besitzen, wünscht die Gesellschaft

eine quellenmässige Geschichte der Messen in einem der drei grossen deutschen Messplätze (Leipzig, Frankfurt a/M. oder Frankfurt a/O.), und zwar von der Mitte des 17. Jahrhunderts an bis zur Gegenwart.

Preis 700 Mark.

### 2. Für das Jahr 1880.

In richtiger Erkenntniss der culturhistorischen Schlüsse, welche sich aus der Uebertragung griechischer Wörter in das Lateinische ziehen lassen, sind verschiedene Versuche gemacht, diese Wörter zu sammeln und zu verwerthen. Da aber alles in dieser Beziehung Geleistete für unvollständig und blos vorbereitend gelten muss, wünscht die Gesellschaft

ein mit sorgfältigen Nachweisen versehenes alphabetisches Verzeichniss sämmtlicher, aus sicheren Kriterien erkennbarer griechischen Wörter der lateinischen Sprache und im Anschluss daran eine sach-

lich geordnete, die Zeiten wohl unterscheidende Darstellung der sich daraus ergebenden Einflüsse griechischer Cultur auf die römische.

Preis 700 Mark.

3. Für das Jahr 1881.

Im Andenken an die Wünsche und Bestrebungen ihres erlauchten Stifters und in Erinnerung an die vortreffliche Lösung, die einst die Preisaufgabe über die polnische Geschichtschreibung des Mittelalters durch Herrn Professor Heinrich von Zeissberg gefunden, wünscht die Gesellschaft,

Regesten der polnischen Könige von der Krönung Przemyslaws II. (1295) bis zum Tode König Alexanders (1506),

als eine unentbehrliche Grundlage für die Bearbeitung der polnischen Reichsgeschichte dieses Zeitraumes, hervorzurufen, indem sie sich die Regesten der beiden Sigismunde für den Fall einer glücklichen Lösung der vorliegenden Aufgabe als Thema für eine, vielleicht später zu stellende vorbehält. Die Art der Bearbeitung der Regesten wird sich allerdings nach der Natur des Stoffes richten müssen. Doch verlangt die Gesellschaft, dass die Ansprüche der heutigen Wissenschaft in Beziehung auf die einleitungsweise Besprechung der Kanzleiverhältnisse, auf die Angabe des Inhalts der einzelnen Urkunden, auf die Heranziehung der Schriftsteller u. s. w. *mutatis mutandis* in ähnlicher Weise erfüllt werden, wie dies etwa in der Bearbeitung der Regesten Kaiser Karls IV. durch Huber geschehen ist. Erforderlich ist vor Allem die Sammlung und Sichtung des gedruckten Materials, so erwünscht der Gesellschaft die Herbeiziehung neuen Stoffes aus Archiven auch sein würde. Am zweckmässigsten erscheint der Gesellschaft der Gebrauch der lateinischen Sprache; doch soll auch der der deutschen Sprache nicht ausgeschlossen sein, in welchem Falle die Gesellschaft ihr Eigenthumsrecht durch Vorbehalt aller Rechte zu schützen suchen würde. Preis 700 Mark.

### 4. Für das Jahr 1882.

In der vergleichenden Grammatik der indogermanischen Sprachen treten gegenwärtig die Untersuchungen über den Vocalismus besonders hervor und haben bereits wichtige Resultate geliefert. Dabei sind die einzelnen Familien des indogermanischen Sprachstammes nicht gleichmässig herangezogen worden, namentlich vermisst man eine systematische Behandlung der litauischen und slawischen Sprachen in dieser Beziehung, die Gesellschaft wünscht daher eine

vergleichende Darstellung des litauischen und slawischen Vocalismus,

und erwartet von einer solchen Arbeit zunächst, dass sie das Verhältniss des litauischen zum slawischen Vocalismus, das noch in vielen Punkten unklar ist, festzustellen suche, dann aber auch, dass sie den litauisch-slawischen Vocalismus in Beziehung setze zu den Theorien und Problemen, die in den neueren Arbeiten über den indogermanischen Vocalismus überhaupt niedergelegt sind. Preis 700 Mark.

## II. Mathematisch-naturwissenschaftliche Section.

### 1. Für das Jahr 1879.

Durch die in den Abhandlungen der Kgl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften von W. Hankel veröffentlichten Untersuchungen ist nachgewiesen worden, dass die Thermoelektricität nicht nur auf den hemimorphen Krystallen auftritt, sondern eine an allen Krystallen wahrzunehmende Eigenschaft ist, soweit deren krystallinische Structur und materielle Beschaffenheit überhaupt ein Entstehen und Anhäufen der Elektricität bis zu einer durch unsere Instrumente nachweisbaren Stärke gestatten. Die erwähnten Abhandlungen umfassen ausser den hemimorphen Krystallen des Boracites und Quarzes die symmetrisch gebildeten Krystalle des Idokrases, Apophyllits, Kalkspathes, Berylls, Topases,

Schwerspathes, Aragonites, Gypses, Diopsids, Orthoklases, Albits und Periklins, und lehren nicht nur die Vertheilung der Elektricität auf den in den verschiedenen Formen vollkommen ausgebildeten, sondern auch auf den durch Anwachsen und sonstige Hindernisse in ihrer Entwickelung gehemmten Individuen, sowie auf den durch Bruch oder Anschlagen der Durchgänge künstlich erzeugten Begrenzungsflächen kennen. Es scheinen nun unter allen zwischen der Wärme und der Elektricität beobachteten Beziehungen die thermoelektrischen Erscheinungen am geeignetsten, eine nähere Kenntniss des Zusammenhanges zwischen den genannten beiden Agentien zu ermöglichen, und es wird daher von der Fürstlich Jablonowski'schen Gesellschaft für das Jahr 1879 als Preisaufgabe gestellt:

> Auf streng physikalische Versuche gestützter Nachweis der Entstehung der auf Krystallen bei steigender und sinkender Temperatur hervortretenden Elektricität (Thermoelektricität, Pyroelektricität, Krystallelektricität) und der durch Bildungshemmnisse oder äussere Verletzungen derselben in der normalen Vertheilung entstehenden Aenderungen.

Preis 700 Mark.

### 2. Ebenfalls für das Jahr 1879.

Die hinterlassene Abhandlung Hansen's »Ueber die Störungen der grossen Planeten, insbesondere des Jupiter«, abgedruckt im XI. Bande der Abhandlungen der mathematisch-physischen Classe der Kgl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften, enthält als Anwendung der daselbst gelehrten Methode zur Entwickelung der planetaren Störungen die numerische Berechnung derjenigen Störungsglieder in der Bewegung des Jupiter, welche unter der Berücksichtigung der ersten Glieder ihrer analytischen Entwickelung abgeleitet werden können. Für die Berechnung der durch den Saturn bewirkten Störungen

der Länge und des Radiusvectors dagegen erscheint die angeführte Methode nicht geeignet, und Hansen verweist in dieser Beziehung auf seine früheren Arbeiten aus der Störungstheorie, welche die erforderlichen Vorschriften enthalten. Ein grosser Theil der numerischen Rechnungen findet sich bereits in der im Jahre 1830 von der Berliner Akademie gekrönten Preisschrift »Ueber die gegenseitigen Störungen des Jupiters und Saturns« ausgeführt. Es ist jedoch der Theil der Rechnung, welcher die Glieder höherer Ordnung in Bezug auf die Massen betrifft, nicht vollendet worden. Sofern diese Glieder von Einfluss werden können auf die vollständige Berechnung der Säcularänderungen, sowohl in Bezug auf die Länge und den Radiusvector, als in Bezug auf die Breite, sind auch die in der nachgelassenen Abhandlung Hansen's enthaltenen Werthe dieser Säcularglieder nicht als definitiv anzusehen.

In den letzten Jahren ist die Theorie der Jupitersbewegung durch die umfangreichen Arbeiten von Leverrier ihrem Abschlusse entgegengeführt worden. Da jedoch der berühmte französische Astronom sich wesentlich anderer Methoden, wie Hansen, bedient hat, so bleibt es dringend wünschenswerth und von hohem wissenschaftlichen Interesse, dass die vollständige Berechnung der Jupitersstörungen auf Grund der Hansen'schen Theorie zu Ende geführt werde. Die Gesellschaft stellt daher

> die ergänzende Berechnung der vollständigen Jupitersstörungen nach den von Hansen angegebenen Methoden

als Preisaufgabe für den Termin des 30. November 1879. Preis 700 Mark.

### 3. Für das Jahr 1880.

Nachdem durch die embryologischen Untersuchungen der letzten Jahre der Nachweis erbracht ist, dass der Körper sämmtlicher Thiere — mit Ausschluss der sog. Protozoen — in ähnlicher Weise aus einigen wenigen Keimblättern sich aufbaut, entsteht die Frage, ob der Antheil, welchen diese Blätter an

der Entwickelung der einzelnen Organe und Gewebe nehmen, überall genau der gleiche ist oder nicht; eine Frage, die dann naturgemäss weiter zu der Untersuchung führt, ob dieser Antheil durch die specifischen Eigenschaften der Keimblätter oder durch gewisse secundäre Momente (etwa die Lagenverhältnisse der späteren Organe) bedingt sei. In Anbetracht der grossen Bedeutung, welche die Entscheidung dieser Fragen für die Auffassung der thierischen Organisation hat, wünscht die Gesellschaft

eine auf eigene Untersuchungen gegründete Kritik der Lehre von der Homologie der Keimblätter.

Preis 700 Mark.

4. Für das Jahr 1881

wird die, ursprünglich für 1877 gestellte, in diesem Jahr aber nicht beantwortete Preisfrage wiederholt.

Der nach Encke benannte und von diesem Astronomen während des Zeitraumes von 1819—1848 sorgfältig untersuchte Comet I, 1819, hat in seiner Bewegung Anomalien gezeigt, welche zu ihrer Erklärung auf die Hypothese eines widerstehenden Mittels geführt haben. Da indessen eine genauere Untersuchung der Bahn nur über einen beschränkten Theil des Zeitraums vorliegt, über welchen die Beobachtungen (seit 1786) sich erstrecken, und die von Asten'schen Untersuchungen, wenigstens so weit dieselben bekannt geworden sind, noch zu keinem definitiven Resultate geführt haben, so ist eine vollständige Neubearbeitung der Bahn des Encke'schen Cometen um so mehr wünschenswerth, als die bisher untersuchten Bewegungen anderer periodischen Cometen keinen analogen widerstehenden Einfluss verrathen haben. Die Gesellschaft wünscht eine solche vollständige Neubearbeitung herbeizuführen, und stellt deshalb die Aufgabe:

die Bewegung des Encke'schen Cometen mit Berücksichtigung aller störenden Kräfte, welche von Einfluss sein können,

vorläufig wenigstens innerhalb des seit dem Jahre 1848 verflossenen Zeitraums zu untersuchen.

Die ergänzende Bearbeitung für die frühere Zeit behält sich die Gesellschaft vor, eventuell zum Gegenstand einer spätern Preisbewerbung zu machen. Preis 700 Mark.

5. Für das Jahr 1882.

Für manche weniger erforschte Gebiete der Krystallographie hat sich das Studium der durch Einwirkung von Lösungs- und Corrosionsmitteln auf den Krystallflächen erzeugten sog. Aetzfiguren in hohem Grade erspriesslich erwiesen. Einerseits ist es wünschenswerth, die zahlreichen, in dieser Hinsicht an Mineralien und künstlichen Krystallen gemachten, und in sehr verschiedenen Zeitschriften seit einer langen Reihe von Jahren mitgetheilten, nur lose unter einander zusammenhängenden Untersuchungen kritisch zu sammeln und von einem bestimmten wissenschaftlichen Gesichtspunkt aus zur einheitlichen Darstellung zu bringen, insbesondere aber auch die bisherigen Ermittelungen durch weitere neue zu vermehren und zu ergänzen, wobei noch die früher weniger erörterten Fragen Berücksichtigung verdienen, in welcher Weise die Form der Aetzeindrücke von der Natur des Aetzmittels und von der Verschiedenartigkeit der Krystallflächen abhängig ist, ferner, wie sich die Aetzeindrücke bei isomorphen Substanzen verhalten. Andererseits ist es aber von noch höherer Bedeutung, wenn solche älteren und selbständigen neuen Untersuchungen dazu verwerthet werden, durch Entwickelung neuer allgemein gültiger und berechtigter Sätze unsere Kenntnisse von den Cohäsions- und Structurverhältnissen der Krystalle zu erweitern und die Frage zu lösen, ob die Aetzfiguren die Form der den Krystall aufbauenden Molecüle wiedergeben.

Die Gesellschaft wünscht daher

eine Zusammenstellung unserer bisherigen Kenntnisse und der durch selbständige Untersuchungen nach den angegebe-

nen Richtungen hin neugewonnenen Erfahrungen über die Aetzfiguren der Krystalle, ferner eine daraus sich ergebende Ableitung allgemeiner Sätze, welche für die Auffassung der Cohäsions- und Structurverhältnisse, sowie der Molecularbeschaffenheit der Krystalle von Wichtigkeit sind.

Preis 700 Mark.

---

Die anonym einzureichenden Bewerbungsschriften sind, wo nicht die Gesellschaft im besondern Falle ausdrücklich den Gebrauch einer andern Sprache gestattet, in deutscher, lateinischer oder französischer Sprache zu verfassen, müssen deutlich geschrieben und paginirt, ferner mit einem Motto versehen und von einem versiegelten Couvert begleitet sein, das auf der Aussenseite das Motto der Arbeit trägt, inwendig den Namen und Wohnort des Verfassers angiebt. Die Zeit der Einsendung endet mit dem 30. November des angegebenen Jahres, und die Zusendung ist an den Secretär der Gesellschaft (für das Jahr 1879 Prof. der deutschen Sprache und Literatur Dr. Friedrich Zarncke zu richten. Die Resultate der Prüfung der eingegangenen Schriften werden durch die Leipziger Zeitung im März oder April des folgenden Jahres bekannt gemacht.

Die gekrönten Bewerbungsschriften werden Eigenthum der Gesellschaft.

Druck von Breitkopf und Härtel in Leipzig.

# BERICHTE

ÜBER DIE

# VERHANDLUNGEN

DER KÖNIGLICH SÄCHSISCHEN

# GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN

ZU LEIPZIG.

## MATHEMATISCH-PHYSISCHE CLASSE.

EINUNDDREISSIGSTER BAND.

1879.

LEIPZIG

BEI S. HIRZEL.

# INHALT.

Von Abhandlungen der math.-phys. Classe sind im Jahre 1879 erschienen:

W. Scheibner, Zur Reduction elliptischer Integrale in reeller Form.

W. G. Hankel, Elektrische Untersuchungen. Vierzehnte Abhandlung. Über die photo- und thermoelektrischen Eigenschaften des Flussspathes. Mit 3 Tafeln.

Protector der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften

SEINE MAJESTÄT DER KÖNIG.

---

## Ehrenmitglieder.

Seine Excellenz der Minister des Königlichen Hauses, Freiherr *Johann Paul von Falkenstein.*

Seine Excellenz der Staatsminister des Cultus und öffentlichen Unterrichts, Herr *Carl Friedrich von Gerber.*

---

## Ordentliche einheimische Mitglieder der philologisch-historischen Classe.

Herr Geheimer Hofrath *Heinrich Leberecht Fleischer* in Leipzig, Secretär der philol.-histor. Classe.
- Professor *Friedrich Zarncke* in Leipzig, stellvertretender Secretär der philol.-histor. Classe.
- Geheimer Hofrath *Georg Curtius* in Leipzig.
- Professor *Georg Ebers* in Leipzig.
- —— *Adolf Ebert* in Leipzig.
- —— *Alfred Fleckeisen* in Dresden.
- —— *Gustav Hartenstein* in Jena.
- Hofrath *Max Heinze* in Leipzig.

Herr Professor und Universitäts-Oberbibliothekar *Christoph Ludolf Ehrenfried Krehl* in Leipzig.
- Professor *Ludwig Lange* in Leipzig.
- —— *August Leskien* in Leipzig.
- Oberschulrath *Carl Joachim Marquardt* in Gotha.
- Professor *Johannes Adolph Overbeck* in Leipzig.
- Geheimer Hofrath *Otto Ribbeck* in Leipzig.
- Geheimer Rath *Wilhelm Roscher* in Leipzig.
- Professor *Anton Springer* in Leipzig.
- —— *Johann Ernst Otto Stobbe* in Leipzig.
- —— *Georg Voigt* in Leipzig.
- —— *Moritz Voigt* in Leipzig.

Se. Exc. Herr Wirkl. Geheimer Rath *Karl Georg von Waechter* in Leipzig.

---

## Ordentliche auswärtige Mitglieder der philologisch-historischen Classe.

Herr Professor *Conrad Bursian* in München.
- —— *Johann Gustav Droysen* in Berlin.
- —— *Hermann Alfred von Gutschmid* in Tübingen.
- Geheimer Justiz- und Oberappellationsgerichtsrath *Andreas Ludwig Jacob Michelsen* in Schleswig.
- Professor *Theodor Mommsen* in Berlin.
- Geheimer Regierungsrath *Hermann Sauppe* in Göttingen.
- Kirchenrath *Eberhard Schrader* in Berlin.
- Professor *Gustav Seyffarth* in New-York.

---

## Ordentliche einheimische Mitglieder der mathematisch-physischen Classe.

Herr Geheimer Hofrath *Wilhelm Gottlieb Hankel* in Leipzig, Secretär der mathem.-phys. Classe.
- Professor *Wilhelm Scheibner* in Leipzig, stellvertretender Secretär der mathem.-phys. Classe.

Herr Geheimer Hofrath *Carl Bruhns* in Leipzig.
- Geheimer Rath *Moritz Wilhelm Drobisch* in Leipzig.
- Professor *Gustav Theodor Fechner* in Leipzig.
- —— *Wilhelm His* in Leipzig.
- —— *Johann August Ludwig Wilhelm Knop* in Leipzig.
- Geheimer Hofrath *Hermann Kolbe* in Leipzig.
- Professor *Adalbert Krüger* in Gotha.
- Geheimer Hofrath *Rudolph Leuckart* in Leipzig.
- —— —— *Carl Friedrich Wilhelm Ludwig* in Leipzig.
- Professor *Adolph Mayer* in Leipzig.
- —— *Carl Neumann* in Leipzig.
- Oberbergrath *Ferdinand Reich* in Freiberg.
- Hofrath *August Schenk* in Leipzig.
- Geheimer Hofrath *Oskar Schlömilch* in Dresden.
- Hofrath *Gustav Wiedemann* in Leipzig.
- Professor *Ferdinand Zirkel* in Leipzig.
- —— *Johann Carl Friedrich Zöllner* in Leipzig.

---

## Ordentliche auswärtige Mitglieder der mathematisch-physischen Classe.

Herr Professor *Heinrich Richard Baltzer* in Giessen.
- Geheimer Hofrath *Carl Gegenbaur* in Heidelberg.
- Staatsrath *Mathias Jacob Schleiden* in Wiesbaden.
- Regierungsrath *Samuel Friedrich Nathanael v. Stein* in Prag.
- Geheimer Hofrath *Wilhelm Weber* in Göttingen.

# Verzeichniss

der bei der Königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften im Jahre 1879 eingegangenen Schriften.

## Von gelehrten Gesellschaften, Universitäten und öffentlichen Behörden herausgegebene und periodische Schriften.

Abhandlungen der Kgl. Akademie d. Wissensch. zu Berlin. Aus d. J. 1878. Berlin 1879.

Monatsberichte der Kgl. Preuss. Akad. d. Wissensch. zu Berlin. 1878, Sept. — Dec. 1879, Jan. — Aug.

Politische Correspondenz Friedrichs d. Gr. Bd. 1—3. Berlin 1879.

Denkschriften der Kaiserl. Akad. d. Wissensch. Mathem.-naturwiss. Cl. Bd. 35. 38. Wien 1878. Bd. 39. Wien 1879.

Denkschriften der Kaiserl. Akad. d. Wissensch. Philos.-histor. Cl. Bd. 27. 28. Wien 1878. Bd. 29. Wien 1879.

Sitzungsberichte der Kaiserl. Akad. d. Wissensch. Philos.-histor. Cl. Bd. 88 (1877), Heft 1—3. Bd. 89 (1878), Heft 1. 2. Bd. 90 (1878), Heft 1—3. Bd. 91 (1878), Heft 1. 2. Bd. 92 (1878), Heft 1—3. Bd. 93 (1879), Heft 1—4. Register VIII, zu Bd. 71—80. Register IX, zu Bd. 81—90. Wien 1878. 79.

Sitzungsberichte der Kaiserl. Akad. d.Wiss. Mathem.-naturwiss. Cl. Bd. 76 (1877), Abth. I, Heft 1—5. Abth. II, Heft 2—5. Abth. III, Heft 1—5. Bd. 77 (1878), Abth. I, Heft 1—5. Abth. II, Heft 1—5. Abth. III, Heft 1—5. Bd. 78 (1878), Abth. I, Heft 1—5. Abth. II, Heft 1—5. Abth. III, Heft 1—5. Bd. 79 (1879), Abth. II, Heft 1—3. Abth. III, Heft 1—5. Register VIII, zu Bd. 65—75. Wien 1878. 79.

Anzeiger der Kaiserl. Akad. d. Wissensch. in Wien. Math.-phys. Cl. Jahrg. 1879, No. 1. 3. 5—8. 10—26.

Almanach d. Kaiserl. Akad. d. Wiss. Jahrg. 28 (1878). 29 (1879). Wien 1878. 79.

Archiv für österreich. Geschichte. Herausg. v. der zur Pflege vaterländ. Geschichte aufgestellten Commission der Kaiserl. Akad. d. Wissensch. Bd. 56, 2. Hälfte. Bd. 57, 1. u. 2. Hälfte. Wien 1878. Bd. 58, 1. u. 2. Hälfte. Wien 1879.

Fontes rerum Austriacarum. Oesterreich. Geschichtsquellen, herausg. von der histor. Commission der Kaiserl. Akad. d. Wissensch. Abth. II. Diplomata et Acta. Bd. 41, 1. u. 2. Hälfte. Wien 1879.

Verhandlungen der k. k. geologischen Reichsanstalt. Jahrgang 1878, No. 14—18. Jahrg. 1879, No. 1—13.

Jahrbuch d. k. k. geologischen Reichsanstalt. Jahrg. 1878. Bd. XXVIII, No. 4. Wien 1878. Jahrg. 1879. Bd. XXIX, No. 1—3. Wien 1879.

Abhandlungen der k. k. geologischen Reichsanstalt. Bd. VII, Heft 5. Bd. XII, Heft 1. Wien 1879.

Mittheilungen der k. k. geographischen Gesellschaft in Wien. 1878. Bd. 21 (N. F. Bd. 11). Wien 1878.

Verhandlungen der k. k. zoologisch-botanischen Gesellschaft in Wien. Jahrg. 1877 (Bd. 27). 1878 (Bd. 28). Wien 1878. 79.

Brunner von Wattenwyl, C., Monographie der Phaneropteriden. Herausg. von der k. k. zoologisch-botanischen Gesellschaft in Wien. Wien 1878.

Jahresbericht der königl. böhmischen Gesellschaft d. Wissenschaften in Prag, ausgegeben am 9. Mai 1877, am 10. Mai 1878. Prag 1877. 78.

Sitzungsberichte der königl. böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften in Prag. Jahrg. 1878. Prag 1879.

Abhandlungen der königl. böhmischen Gesellschaft d. Wissenschaften in Prag. 5. Folge, Bd. XV. Prag 1866-75. 6. Folge, Bd. IX. Prag 1878.

Astronomische, magnetische und meteorologische Beobachtungen an der k. k. Sternwarte zu Prag im J. 1878. Jahrg. 39. Hrsg. von L. Hornstein. Prag 1879.

Jahresbericht des naturhistorischen Vereins Lotos für 1878. (Jahrg. 28 der Zeitschrift »Lotos«.) Prag 1878.

Mittheilungen des histor. Vereines für Steiermark. Heft 27. Graz 1879.

Beiträge zur Kunde steiermärkischer Geschichtsquellen. Herausgeg. vom histor. Vereine für Steiermark. Jahrg. 16. Graz 1879.

Berichte des naturwiss.-medizin. Vereines in Innsbruck. Jahrg. 7 (1876), Heft 1—3. Jahrg. 8 (1877), Heft 1—3. Innsbruck 1877. 79.

Zeitschrift des Ferdinandeums für Tirol u. Vorarlberg. 3. Folge. Heft 22. Innsbruck 1878.

Viestnik Hrvatskoga arkeologičkago Družtva. Godina I, Br. 1—4. U Zagrebu 1879.

Erdélyi Muzeum. Az Erd. Muzeum egylet tört. szakosztályának közlönye. Szerkesti Finály Henr. VI. évf. (1879), sz. 8—10. Kolozsvárt d. J.

Abhandlungen der philosoph.-philolog. Cl. der k. bayer. Akad. d. Wissensch. Bd. 14 (in d. Reihe d. Denkschriften d. XLIX. Bd.), Abth. 3. München 1878. Bd. 15 (in d. Reihe d. Denkschriften d. LII. Bd.), Abth. 1. München 1879.

Abhandlungen der histor. Cl. der k. bayer. Akad. d. Wissensch. Bd. 14 (in d. Reihe d. Denkschr. d. LI. Bd.), Abth. 2. 3. München 1878. 79.

Abhandlungen d. mathemat.-physikal. Cl. der k. bayer. Akad. d. Wissensch. Bd. 13 (in d. Reihe d. Denkschriften d. XLV. Bd.), Abth. 2. München 1879.

Baeyer, Adolf, Ueber die chemische Synthese. Festrede gehalten in der öffentl. Sitzung der k. bayer. Akad. der Wissensch. am 25. Juli 1878. München 1878.

Meyer, Wilh., Ueber Calderons Sibylle des Orients. Festrede gehalten in der öffentl. Sitzung der k. bayer. Akad. d. Wissensch. zur Feier ihres 120. Stiftungstages am 28. März 1879. München 1879.

Sitzungsberichte der philos.-philol. u. histor. Cl. der k. bayer. Akad. d. Wissensch. zu München. 1878, Bd. 2, Heft 1—3. 1879, Heft 1—4. München 1878. 79.

Sitzungsberichte der mathem.-physikal. Cl. der k. bayer. Akad. d. Wiss. zu München. 1878, Heft 4 1879, Heft 1. 2. München 1878. 79.

Zwanzigste Plenar-Versammlung der histor. Commission bei der k. bayer. Akad. d. Wiss. Bericht des Secretariats. München im Oct. 1879.

Catalogus codicum manuscr. Bibliothecae Regiae Monacensis. T. IV, P. 3 (Catalogus codicum lat., T. II, P. 3). T. VIII, P. 1 (Maier, Jul. Jos., Die musikal. Handschriften der k. Hof- u. Staatsbibliothek in München. Th. 1) München 1878. 79.

Meteorologische und magnetische Beobachtungen der k. Sternwarte bei München. Jahrg. 1878. München 1879.

Abhandlungen der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Bd. XXIII, v. J. 1878. Bd. XXIV, vom J. 1879. Göttingen 1878. 79.

Nachrichten von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften und der Georg-Augusts-Universität aus d. J. 1878. Göttingen 1878.

Neues Lausitzisches Magazin. Im Auftrag d. Oberlausitz. Gesellsch. d. Wissensch. herausgeg. von Prof. Dr. Schönwälder. Bd. 54, Heft 1. 2. Bd. 55, Heft 1. Görlitz 1878.

Zeitschrift des k. sächsischen statistischen Bureau's. Redig v. V. Böhmert. Jahrg. XXIV (1878), Heft 3. 4. Jahrg. XXV (1879), Heft 1. 2. Dresden 1879.

Vierteljahrsschrift der astronom. Gesellschaft. Jahrg. XIII, Heft 3. 4. Jahrg. XIV, Heft 1—3. Leipzig 1878. 79.

Auwers, A., Fundamental-Catalog für die Zonen-Beobachtungen am nördlichen Himmel. Hrsg. im Auftrag d. Zonen-Commission der Astronomischen Gesellschaft. Publication der Astronom. Gesellschaft XIV. Leipzig 1879.

Hartwig, Ernst, Untersuchungen über die Durchmesser der Planeten Venus und Mars, nach Heliometermessungen auf der provisor. Sternwarte zu Strassburg. Publication der Astronom. Gesellschaft XV. Leipzig 1879.

Codex diplomaticus Saxoniae Regiae. Im Auftrag der kgl. Sächs. Staatsregierung herausg. von O. Posse und H. Ermisch. II. Haupttheil, Bd. 6 (Urkundenbuch der Stadt Chemnitz und ihrer Klöster. Herausg. von H. Ermisch). Bd. 11 (Urkundenbuch der Universität Leipzig von 1409—1555. Herausg. von B. Stübel). Leipzig 1879.

Kgl. Sächs. Polytechnicum zu Dresden. Ergänzung zum Programm f. d. Studienjahr, bezieh. Wintersemester 1878/79, enthalt. d. Verzeichniss d. Vorlesungen f. d. Sommersem. 1879. — Programm f. d. Studienjahr, bezieh. Wintersemester 1879/80. — Prüfungsordnung f. Candidaten des höh. Lehramtes d. technischen u. mathem.-physik. Richtung am kgl. Polytechnicum Dresden. Dresden 1879.

Jahresbericht der Gesellschaft für Natur- u. Heilkunde in Dresden. Sept. 1877 — Aug. 1878. Leipz. 1879. Sept. 1878 — Mai 1879. Dresden 1879.

Zuwachs der Grossherzogl. Bibliothek zu Weimar in d. Jahren 1877 u. 1878. Weimar 1879.

Zeitschrift f. d. gesammten Naturwissenschaften, redig. von C. G. Giebel. Dritte Folge. 1878. Bd. 3. Berlin 1878.

Berichte der deutschen chemischen Gesellschaft zu Berlin. Jahrg. XI, No. 16—18. Jahrg. XII, No. 1—18. Berlin 1878. 79.

Robert, Carl, Thanatos. XXXIX. Programm z. Winckelmannsfeste der archaeologischen Gesellschaft zu Berlin. Berlin 1879.

Sechsundfünfzigster Jahresbericht der Schlesischen Gesellschaft für vaterländische Cultur. Enthält den Generalbericht über die Arbeiten und Veränderungen der Gesellschaft im J. 1878. Breslau 1879.

Statut der Schlesischen Gesellschaft für vaterländische Cultur. Breslau 1879.

General-Sachregister der in den Schriften der Schles. Gesellsch. f. vaterländ. Cultur von 1804—1876 incl. enthaltenen Aufsätze, geordnet in alphabet. Folge. Breslau 1878.

Abhandlungen der naturforschenden Gesellschaft zu Halle. Bd. XIV, Heft 1—3. Halle 1878. 79.

Festschrift zur Feier des 100jährigen Bestehens der Naturforschenden Gesellschaft zu Halle. Halle 1879.

Bericht über die Sitzungen der Naturforschenden Gesellschaft zu Halle i. J. 1877. 1878. Halle 1878. 79.

Leopoldina. Amtliches Organ der kais.-leopoldinisch-carolinisch-deutschen Akademie der Naturforscher. Heft XIV, No. 9—24. Heft XV, No. 1—8. 13—24. Dresden, Halle 1878. 79.

Schriften der Universität zu Kiel aus d. J. 1878. Bd. XXV. Kiel 1879.

Ergebnisse der Beobachtungsstationen an den deutschen Küsten über die physikalischen Eigenschaften der Ostsee u. Nordsee u. die Fischerei. Jahrg. 1878, Heft 2—12. Jahrg. 1879, Heft 1—7. Berlin 1878. 79.

Mittheilungen aus der Kommission zur wissenschaftlichen Untersuchung der deutschen Meere in Kiel. I. (Meyer, H. A., Biologische Beobachtungen bei künstlicher Aufzucht des Herings der westl. Ostsee). Berlin 1878.

Verhandlungen des Vereins für naturwissenschaftliche Unterhaltung zu Hamburg. 1876. Bd. 3. Hamburg 1878.

Jahresbericht der naturhistorischen Gesellschaft zu Hannover. 25 (für d. Geschäftsjahr 1874—75). 26 (für d. Geschäftsj. 1875—76). 27. 28 (für die Geschäftsj. 1876—78). Hannover 1876—78.

Jahresbericht des physikal. Vereins zu Frankfurt a. M. für das Rechnungsjahr 1877—1878. Frankfurt a. M. 1879.

Sitzungsberichte der physikal.-medicinischen Societät in Erlangen. Heft 10 (Nov. 1877 — Aug. 1878). Erlangen 1878.

Anzeiger für Kunde der deutschen Vorzeit. Organ des Germanischen Museums. N. F. Bd. 1—21. 23. 25. Nürnberg 1858—78.

Katalog der im Germanischen Museum befindlichen Bautheile u. Baumaterialien aus älterer Zeit. Nürnberg 1868.

Katalog der im Germanischen Museum befindlichen Gewebe u. Stickereien, Nadelarbeiten u. Spitzenen aus älterer Zeit. Nürnberg 1869.

Katalog der im Germanischen Museum befindlichen kirchlichen Einrichtungsgegenstände und Geräthschaften (Originale). Nürnberg 1871.

Verhandlungen der physikal.-medicin. Gesellsch. in Würzburg. Neue Folge. Bd. XIII, Heft 1—4. Würzburg 1879.

XXXIII., XXXIV. u. XXXV. Jahresbericht der Pollichia, eines naturwissenschaftl. Vereins der Rheinpfalz. Dürkheim a. d. Haardt 1875. 77.

Vierteljahrshefte für Württembergische Geschichte u. Alterthumskunde. Herausg. von d. Kgl. Statist.-topogr. Bureau. Jahrg. 1878, Heft 1—4. Stuttg. 1878.

Verhandlungen des naturhistor.-medicin. Vereins zu Heidelberg. Neue Folge. Bd. II, Heft 3. 4. Heidelberg 1879.

Astronomische Beobachtungen auf der Grossherz. Sternwarte zu Mannheim, angestellt u. herausg. von W. Valentiner. Abth. 3. Micrometrische Ausmessung von Sternhaufen. Karlsruhe 1879.

R. Barry's Fixsternbeobachtungen auf der Grossherz. Sternwarte zu Mannheim, berechnet u. herausg. von W. Valentiner. I. Beobachtungen am Passageninstrument im J. 1805. (Sep.-Abdr. aus d. 41. 42. u. 43. Jahresbericht des Mannheimer Vereins für Naturkunde.) Mannheim 1878.

Achtzehnter Bericht der Oberhessischen Gesellschaft für Natur- und Heilkunde. Giessen 1879.

Verhandlungen der Schweizerischen naturforschenden Gesellschaft in Bex. 60. Jahresversammlung. Lausanne 1878.

Schönberg, Gust., Finanzverhältnisse der Stadt Basel im XIV. u. XV. Jahrhundert. Tübingen 1879.

Mittheilungen der naturforschenden Gesellschaft in Bern aus d. J. 1877. No. 923—936. Bern 1878.

Vierteljahrsschrift der naturforschenden Gesellschaft in Zürich. Jahrg. XXIII, Heft 1—4. Zürich 1878.

Jahresbericht der naturforschenden Gesellschaft Graubündens. Neue F. Jahrg. XXI (Vereinsjahr 1876—77). Chur 1878.

Congrès périodique international des sciences médicales. 6. Session, 1879. Amsterdam, du 7. au 13. sept. (Programm).

Verhandelingen d. Kon. Akad. v. Wetenschappen. Afdeel. Natuurkunde. Deel XVIII. Amsterdam 1879.

Verslagen en Mededeelingen der Kon. Akad. v. Wetensch. Afdeel. Letterkunde. II. Reeks. Deel 7. Amsterdam 1878. — Afd Natuurkunde. II. Reeks. Deel 12. 13. Amsterdam 1878.

Jaarboek van de Kon. Akad. v. Wetensch. gevestigd te Amsterdam, voor 1877. Amsterdam 1877.

Processen-Verbaal van de gewone Vergaderingen d. Kon. Akad. v. Wetensch. te Amsterdam. Afd. Natuurkunde. Mei 1877—April 1878.

Pavesi, Fr., De Insubrum agricolarum in transatlanticas regiones demigratione idyllia, praemio ornata Hoeufftiano. Accedunt duo carmina laudata. Amstelod. 1878.

Programma certaminis poetici ab Academia Regia disciplinarum Neerlandica ex legato Hoeufftiano indicti in annum 1879.

Verslag van den staat der Sterrenwacht te Leiden, uitgebr. door H. G. van de Sande Bakhuyzen. Amsterdam 1879.

Nederlandsch Kruidkundig Archief. Verslagen en Mededeel. d. Nederl. Botanische Vereeniging. Tweede Serie. Deel III, Stuk 1. 2. Nijmegen 1877. 79.

Onderzoekingen gedaan in het physiologisch Laboratorium der Utrechtsche Hoogeschool. Uitgeg. door F. C. Donders en Th. W. Engelmann. Derde Reeks. V, Afl. 2. Utrecht 1878.

Questions mises au concours par la Société des arts et des sciences établie à Utrecht. 1879.

Dornbusch, J. B., Abhandlung über das sogen. »Flandrische Steingut« des XVI. u. XVII. Jahrh. Eine von d. Utrecht. Gesellsch. f. Kunst u. Wissensch. gekrönte Preisschrift. Utrecht 1878.

Miller, Sam. Henry, Prize Essay on Evaporation. Publ. by the Utrecht Soc. for arts and sciences. Utrecht 1878.

Enklaar, J. E., Verhandeling over de verdamping van water van onderscheidene gronden onder verschillende omstandigheden. Uitg. door het Utrechtsche Genootsch. van kunsten en wetensch. Utrecht 1878.

Aanteekeningen van het verhandelde in de sectie-vergaderingen van het Provinc. Utrechtsche Genootsch. v. kunsten en wet., ter gelegenheid van de algem. vergadering gehouden in het jaar 1877. 1878. Utrecht 1877. 78.

Verslag van het verhandelde in de algem. vergaderingen van het Provinc. Utrechtsche Genootsch. v. kunsten en wet., gehouden d. 26. juni 1877, d. 25. juni 1878. Utrecht 1877. 78.

19. jaarlijksch Verslag betrekkelijk de verpleging en het onderwijs in het Nederlandsch Gasthuis voor ooglieders, uitgebracht in mei 1878 door F. C. Donders. Met het 15. nummer der wetenschappel. bijbladen Utrecht 1878.

Nederlandsch meteorologisch Jaarboek voor 1872 (Jaarg. XXIV), Deel 2. 1873 (Jaarg. XXV), Deel 2. 1876 (Jaarg. XXVIII), Deel 1. 1877 (Jaarg. XXIX), Deel 1. Utrecht 1877. 78.

Natuurkundige Verhandelingen van de Hollandsche Maatschappij der wetenschappen, te Haarlem. 3. Verzameling. Deel III. Haarlem 1878.

Archives néerlandaises des sciences exactes et naturelles, publiées par la Société Hollandaise des sciences à Harlem. T. XIII, livr. 4. 5. T. XIV. livr. 1. 2. Harlem 1878. 79.

Snellen, Le téléméteorographe d'Olland. (Extr. d. Archives néerland., T. XIV). Harlem 1879.

Programme de la Société Hollandaise des sciences, à Haarlem. Année 1879.

Archives du Musée Teyler. Vol. IV, fasc. 2—4. Harlem 1878.

Publications de l'Institut R. Grand-Ducal de Luxembourg. Section des sciences naturelles. T. XVII. Luxembourg 1879.

Congrès international des Américanistes. 3. Session. Bruxelles du 23. au 26. sept. 1879. (Programm).

Annuaire de l'Académie des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique. 1877 (Année XLIII). 1878 (Année XLIV). Bruxelles 1877. 78.

Bulletins de l'Académie R. des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique. Année XLV (1876). 2. Sér. T. 41. 42. Année XLVI (1877). 2. Sér. T. 43. 44. Année XLVII (1878). 2. Sér. T. 45. Bruxelles 1876—78.

Mémoires de l'Académie R. des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique. T. 42. Bruxelles 1878.

Mémoires couronnés et autres Mémoires publ. p. l'Académie R. des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique. Collection in-8°. T. 27. 28. Bruxelles 1877. 78.

Mémoires couronnés et Mémoires des savants étrangers, publ. p. l'Académie R. des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique. T. 40. Bruxelles 1876. T. 41. 42. Bruxelles 1878.

Namur, A., Tables de logarithmes à 12 décimales jusqu'à 434 milliards, précéd. d'une introduction théorique p. P. Mansion. Publ. p. l'Académie R. de Belgique. Bruxelles 1877.

Annuaire de l'Observatoire Royal de Bruxelles. 1878 (Année XLV). 1879 (Année XLVI). Bruxelles 1877. 78.

Annales de l'Observatoire Royal de Bruxelles. Nouv. Série. Astron. T. I. Bruxelles 1878. Annales astronomiques, T. II. Bruxelles 1879.

Catalogue des ouvrages d'astronomie et de météorologie qui se trouvent dans les principales bibliothèques de la Belgique. Bruxelles 1878.

Observations météorologiques faites aux stations internat. de la Belgique et des Pays-Bas, sous la direction de J. C. Houzeau et C. H. D. Buiys-Ballot. Année I (1877). Bruxelles 1878.

Annales de la Société entomologique de Belgique. T. XXI. Bruxelles 1878.

Comptes-rendus de la Société entomologique de Belgique. Sér. II. No. 58—68.

Annales de l'Académie d'archéologie de Belgique. T. XXI—XXX (=2. Sér., T. I—X). Anvers 1865—74. T. XXXI—XXXIV (=3. Sér. T. I—IV). Anvers 1875—78.

Académie d'archéologie de Belgique. Bulletin I (2. Sér. des Annales), Fasc. 1—12. Anvers 1868—77. Bulletin II (3. Sér. des Annales), Fasc. 1—3. Anvers 1875—77. Bulletin (3. Sér. des Annales), Seconde Partie, I. Anvers 1879.

Academie d'archéologie de Belgique. Programme du Concours de 1878. 1879. 80.

Grandgaignage, Edm., Histoire du péage de l'Escaut (Extr. d. Annales de l'Acad. d'archéol. de Belgique). Anvers 1868.

Bullettino dell' Instituto di corrispondenza archeologica per l'anno 1878, No. 12 (und Elenco de' participanti alla fine dell' anno 1878). 1879, No. 1—11. Roma 1879.

Rossi, Giov. Batt. de', Piante iconografiche e prospettiche di Roma anteriori al secolo XVI., raccolte e dichiarate. (Text und Tafeln). Roma 1879.

Atti della R. Accademia dei Lincei. Anno CCLXXV (1877—78). Serie III. Memorie della classe di scienze fisiche, matem. e naturali, Vol. 2, Disp. 1. 2. Roma 1878. — Memorie della classe di scienze morali, storiche e filologiche. Vol. 2. Roma 1878. — Anno CCLXXVI (1878—79). Ser. III. Transunti. Vol. 3, Fasc. 1—7. Roma 1879.

Memorie del R. Istituto Lombardo di scienze e lettere. Classe di lettere e scienze morali e politiche. Vol. XIII (Ser. III, Vol. IV), Fasc. 4. Milano 1878. — Classe di scienze matematiche e naturali. Vol. XIV. (Serie III, Vol. V), Fasc. 2. Milano 1879.

R. Istituto Lombardo di scienze e lettere. Rendiconti. Serie II. Vol. XI. Milano 1878.

Statuta communitatis Novariae anno MCCLXXVII lata. Collegit et notis auxit Ant. Ceruti. Novariae 1879.

Atti dell' Accademia R. delle scienze di Torino. Vol. XIV, Disp. 1—7. Torino 1878. 79.

Memorie della R. Accademia delle scienze di Torino. Serie II. T. XXX. XXXI. Torino 1878. 79.

Bollettino meteorologico ed astronomico dell' Osservatorio della Reg. Università di Torino. Anno XIII (1878), Parte meteorologica. Torino 1879.

Bullettino della Società di scienze naturali ed economiche di Palermo. No. 9—14. (1879).

Giornale di scienze naturali ed economiche, pubbl. p. cura della Società di scienze naturali ed econom. di Palermo. Anno 1878 (Vol. XIII). Anno 1879 (Vol. XIV). Palermo 1878. 79.

Atti della Società Toscana di scienze naturali residente in Pisa. Vol. IV, Fasc. 1. Pisa 1879.

Processi verbali della Società Toscana di scienze naturali. Adunanza del 10. nov. 1878, 12. genn., 9. marzo, 11. maggio, 6. giuglio, 9. nov. 1879.

Philosophical Transactions of the R. Society of London. For the year 1877. Vol. 167, P. 2. London 1878. Vol. 168 (Extra Volume). London 1879. For the year 1878. Vol. 169, P. 1. 2. London 1878. 79. — The R. Society. 30th Nov. 1878 (London 1879).

Proceedings of the R. Society of London. Vol. XXVI, No. 184. XXVII, No. 185—189. XXVIII, No. 190—195. XXIX, No. 196. London 1878. 79.

Catalogue of scientific papers (1864—73). Compiled by the R. Society of London. Vol. VIII. London 1879.

Proceedings of the R. Institution of Great Britain. Vol. VIII, P. V. No. 68. P. VI. No. 69. London 1878. 79.

Journal of the R. Microscopical Society, containing its Transactions and Proceedings. Vol. II, No. 2—7. London and Edinburgh 1879.

A Catalogue of the Greek coins in the British Museum. Macedonia etc. by Barclay V. Head. Edited by Reg. Stuart Poole. With map. London 1879.

Proceedings of the Cambridge Philosophical Society. Vol. III, P. 3—6. Cambridge 1878. 79.

Transactions of the Cambridge Philosophical Society. Vol. XII, P. 3. Cambridge 1879.

Proceedings of the R. Society of Edinburgh. Session 1878—79. Vol. IX, No. 100.

Transactions of the R. Society of Edinburgh. Vol. XXVIII, P. 2. For the session 1877—78.

Proceedings of the Literary and Philosophical Society of Liverpool during the 67th session, 1877—78. No. 32. London and Liverpool 1878.

Proceedings of the R. Irish Academy. Ser. II. Vol. I, No. 12. 13. Vol. II, No. 7. Vol. III, No. 1—3. Dublin 1877—79.

The Transactions of the R. Irish Academy. Vol. XXVI. Science. No. 6—21. Dublin 1876—79. Vol. XXVII. Polite liter. and antiquities. No. 1—3. Dublin 1877. 79.

Journal of the R. Geological Society of Ireland. Vol. XV (N. S. Vol. V), P. 1. 1877—78. P. 2. 1878—79. London, Dublin, Edinburgh 1878. 79.

Nouvelles Archives du Muséum d'histoire naturelle. II. Série. T. I, Fasc. 1. 2. Paris 1878.

Muséum d'histoire naturelle. Rapports annuels de MM. les professeurs et chefs de service. 1878. Paris 1879.

Comité international des poids et mesures. Procès-verbaux des séances de 1878. Paris 1879.

Mémoires de la Société des sciences physiques et naturelles de Bordeaux. II. Série. T. III, Cah. 1. 2. Paris 1878. 79.

Mémoires de la Société Nationale des sciences naturelles de Cherbourg. T. XXI (III. Série. T. I). Paris et Cherbourg 1877—78.

Catalogue de la bibliothèque de la Société Nationale des sciences naturelles de Cherbourg, red. p. A. Le Jolis. II. Partie, Livr. 2. Cherbourg 1878.

Académie des sciences et lettres de Montpellier. Mémoires de la section des lettres. T. VI (Année 1877), Fasc. 3. Montpellier 1878. — — Mémoires de la section des sciences. Tome IX (Années 1877/78), Fasc. 2. Montpellier 1879.

Oversigt over det Kong. Danske Videnskabernes Selskabs Forhandlinger og dets Medlemmers Arbejder i aaret 1878, No. 1. 1879, No. 1. 2. Kjøbenhavn.

Det Kong. Danske Videnskabernes Selskabs Skrifter. 5. Række. Naturvid. og mathemat. Afd. Bd. XI, No. 5. Bd. XII, No. 3. 4. Kjøbenhavn 1878. 79.

Jacobsen, J. C., et T. Rothe, Description des serres du Jardin botanique de l'Université de Copenhague. Publ. à l'occasion du IV. centenaire de l'Université en juin 1879. Copenhague 1879.

Aperçu sur l'organisation de l'Université de Copenhague. Copenhague 1878.

Matzen, Henn., Kjøbenhavns Universitets Retshistorie 1479—1879. Efter Konsistoriums opfordering udarbeitet. Del 1. 2. Kjøbenhavn 1879.

Bulletin météorologique mensuel de l'Observatoire de l'Université d'Upsal. Vol. X (1878). XI (1879), No. 1—6. Upsal 1878. 79.

Acta Universitatis Lundensis. Lunds Universitets Års-Skrift. Tom. XII (1875—76), Afd. 1. 2. T. XIII (1876—77), Afd. 1—3. T. XIV (1877—78), Afd. 1. 2. Lund 1875—78.

Lunds Universitets-Biblioteks Accessions-Katalog. 1876. 77. 78. Lund 1877—79.

Commentationes quas in memoriam sollennium secularium ante d. III. Non. Oct. MDCCCLXXVIII edidit Societas Physiographorum Lundensis. Lund 1878.

Jensen, Olaf S., Turbellaria ad litora Norvegiae occidentalia. Turbellarier ved Norges vestkyst. Tilkjendt Bergens Prisbelønning. Bergen 1878.

Forhandlinger i Videnskabs-Selskabet i Christiania. Aar 1876. 77. 78. Christiania 1877—79.

Register til Christiania Videnskabsselskabs Forhandlinger 1868—77. Christiania 1879.

Fortegnelse over Separat-aftryk af Christiania Vedenskabs-Selskabs Forhandlinger. Christiania 1878.

Det Kongelige Norske Frederiks Universitets Aarsberetning for aaret 1876. 1877. Christiania 1877. 78.

Festskrift til det Kong. Universitet ved dets Jubilaeum i Sept. 1877 fra det Kong. Fredriks Universitet i Christiania. Christiania 1877.

Unger, C. R., Heilagra Manna Sögur. Fortællinger og legender om hellige mænd og kvinder. II. (Univers.-Program for I. semester 1877.) Christiania 1877.

Sars, G. O., Bidrag til kundskaben om Norges arktiske Fauna. I. Mollusca regionis arcticae Norvegiae. Oversigt over de i Norges arktiske region forekommende Bløddyr. (Univers.-Program for I. halvaar 1878.) Christiania 1878.

Holst, Elling, Om Poncelets betydning for geometrien. (Udg. som Univers.-Program for I. halvaar 1879 ved Sophus Lie.) Christiania 1878.

Beretning om Bodsfængslets virksomhed i aaret 1876 77. Christiania 1877. 78.

Nyt Magazin for naturvidenskaberne. Udg. ved Th. Kjerulf, D. C. Danielssen etc. Bind 23 (= II. R., Bind 3), Heft 1—4. Bind 24, Heft 1—4. Christiania 1877. 78.

Norske Rigsregistranter, tildeels i uddrag. Bind 6, Hefte 2 (1631—34). Bind 7, Hefte 1 (1635—37). Christiania 1877.

Tromsø Museums Aarshefter. I. Tromsø 1878.

Mémoires de l'Académie Impériale des sciences de St.-Pétersbourg. VII$^{e}$ Série. T. XXV, No. 5—9. T. XXVI, No. 1—11. St.-Pétersbourg 1877—79.

Bulletin de l'Acad. Impér. des sciences de St.-Pétersbourg. T. XXV, No. 3—5. St.-Pétersbourg 1879.

Compte-rendu de la Commission Impériale Archéologique pour l'année 1876. Avec un atlas. St.-Pétersbourg 1879.

Acta Horti Petropolitani. T. V, Fasc. 2. T. VI, Fasc. 1. St.-Petersburg 1878. 79.

Annalen d. physikalischen Centralobservatoriums, herausgeg. von H. Wild. Jahrg. 1877. St.-Petersburg 1878.

Jahresbericht am 20. Mai 1878 dem Comité der Nicolai-Hauptsternwarte abgestattet vom Director der Sternwarte. (Aus d. Russ. übersetzt.) St.-Petersburg 1878.

Repertorium für Meteorologie, herausg. v. der Kais. Akademie der Wissenschaften. Redig. v. H. Wild. Bd. VI, Heft 1. 2. St.-Petersburg 1878. 79.

Annales de l'Observatoire de Moscou. Vol. IV, Livr. 1. 2. Vol. V, Livr. 1. 2. Moscou 1878. 79.

Bulletin de la Société Impér. des Naturalistes de Moscou. Année 1877, No. 4. 1878, No. 2. 3. 4. Année 1879, No. 1. Moscou 1877—79.

Nouveaux Mémoires de la Société Impér. des Naturalistes de Moscou. T. XIV (= T. XX de la collection), Livr. 1. Moscou 1879.

Struve, Otto, Mesures micrométriques corrigées des étoiles doubles. (Supplément au Vol. IX. des Observations de Poulkova.) St.-Pétersbourg 1879.

Struve, Otto, Tabulae quantitatum Besselianarum pro annis 1880 ad 1884 computatae. Petropoli 1879.

Izvěstija i učenyja zapiski Imper. Kazanskago Universiteta. God 45 (1878), No. 1—6 (= T. XIV). Kazan 1878. 79.

Öfversigt af Finska Vetenskaps-Societetens Förhandlingar. XIX (1876—77). XX (1877—78). Helsingfors 1878.

Hjelt, Otto E. A., Carl von Linné som läkare och hans betydelse för den medicinska vetenskapen i Sverige. (Helsningsskrift etc.) Helsingfors 1877.

Observations météorologiques publ. p. la Société des sciences de Finlande. Année 1875. 76. Helsingfors 1878.

Bidrag till kännedom af Finlands natur och folk, utg. af Finska Vetenskaps-Societet. Häftet 27—31. Helsingfors 1878. 79.

Proceedings of the American Philosophical Society, held at Philadelphia, for promoting useful knowledge. Vol. XVII, July—Dec. 1878 (No. 102). Vol. XVIII, Jan.—June 1879 (No. 103).

Dudley Observatory. Annual Report of the director for 1878. Albany N. Y.

Zweiunddreissigster Jahresbericht der Staats-Ackerbaubehörde von Ohio. Columbus, Ohio 1878.

Memoirs of the Boston Society of Natural History. Vol. III, P. I, No. 1. 2. Boston 1878. 79.

Proceedings of the Boston Society of Natural History. Vol. XIX, Part 3. 4. Vol. XX, P. 1. Boston 1878. 79.

Proceedings of the American Academy of Arts and Sciences. New Series. Vol. VI (Whole Series Vol. XIV). From May 1878 to May 1879. Selected from the Records. Boston 1879.

Bulletin of the Museum of comparative Zoölogy, at Harvard College, Cambridge Mass. Vol. V, No. 8—14. Cambridge Mass. 1878. 79.

Memoirs of the Museum of comparative Zoölogy, at Harvard College, Cambridge Mass. Vol. VI, No. 1 (1st Part). Cambridge Mass. 1879.

Jahresbericht des naturhistorischen Vereins von Wisconsin für d. J. 1878—79. Milwaukee 1879.

Annals of the Lyceum of Natural History of New York. Vol. XI, No. 9—12. New York 1876.

Annals of the New York Academy of Sciences (late Lyceum of Natural History). Vol. I, No. 1—8. New York 1877. 78.

Bulletin of the American Geographical Society. 1878, No. 3—6. 1879, No. 1. 2. New York 1878. 79.

Journal of the American Geographical Society of New York. Vol. VII (1875). VIII (1876). New York 1878. Vol. IX (1877). Albany 1879.

Proceedings of the Academy of Natural Sciences of Philadelphia. 1878, P. 1. 2. 3. Philadelphia 1878. 79.

Tenth annual Report of the U. S. geological and geographical Survey of the Territories, embracing Colorado and parts of adjacent Territories, for the year 1876. Washington 1878.

Bulletin of the U. S. geological and geographical Survey of the Territories. Vol. IV, No. 4. Vol. V, No. 1. Washington 1878. 79.

Department of the Interior. U. S. geological Survey of the Territories. Miscellaneous Publications. No. 10. 11. Washington 1878.

Hayden, F. V., Catalogue of the publications of the U. S. geological and geographical Survey of the Territories. 3d edit. Washington 1879.

Astronomical and meteorological Observations made during the year 1875 at the U. S. Naval Observatory. Meteorological Observations made during the year 1876. Washington 1878. 79.

Washington Observations for 1868, App. 1. 1869, App. 2. 1870, App. 1. 3. 4. 1871, App. 1. 1872, App. 1. 2. 1873, App. 1. 1874, App. 2. Washington 1870—76.

Newcomb, Sim., Researches on the motion of the moon, made at the U. S. Naval Observatory, Washington. P. I. Washington 1878.

Zones of stars, observed at the National Observatory, Washington, approved by G. A. Magruder. Vol. I, P. 1, containing the zones observed with the meridian circle in 1846. Washington 1860.

Report of the Commission on site for Naval Observatory. Washington 1879.

Report of the Superintendent of the U. S. Coast Survey, showing the progress of the Survey during the year 1874. 1875. Washington 1877. 78.

Report of the Commissioner of agriculture for the year 1877. Washington 1878.

Annual Report of the Board of Regents of the Smithsonian Institution for the year 1877. Washington 1878.

Smithsonian Miscellaneous Collections. Vol. XIII—XV. Washington 1878.

Anales de la Sociedad cientifica Argentina. T. VI, Entrega 6. T. VII, Entr. 5. Buenos Aires 1878. 79.

Verhandelingen van het Bataviaasch Genootschap van kunsten en wetenschappen. Deel 40. Batavia 1879.

Notulen van de algemeene en bestuurs-vergaderingen van het Bataviaasch Genootschap van kunsten en wetensch. Deel XVI (1878), No. 1—4. XVII (1879), No. 1. Batavia 1878. 79.

Het Bataviaasch Genootschap van kunsten en wetenschappen gedurende de eerste eeuw van zijn bestaan 1778—1878. Gedenkboek, zamengesteld door den Voorzitter van het Genootschap T. H. der Kinderen. Deel I. Batavia.

Tijdschrift voor Indische taal-, land- en volkenkunde, uitgeg. door het Batav. Genootsch. van kunsten en wetensch. Deel XXV, Afl. 1—3. Batavia 1878. 79.

Observations made at the Magnetical and Meteorological Observatory at Batavia. Publ. by order of the Government of Netherlands India. Vol. II. III. Batavia 1878.

Bergsma, P. A., & L. Backer Overbeck, Bijdrage tot de kennis der weergesteldheid ter kuste van Atjeh. Uitgeg. door de Nederland. Ind. Regering. Batavia 1877.

Die Triangulation von Java, ausgeführt vom Personal des geograph. Dienstes in Niederländisch Ost-Indien. Abth. II. Die Basismessung bei Simplak, von J. A. C. Oudemans, E. Metzger u. C. Woldringh. Im Haag 1878.

Transactions and Proceedings of the R. Society of Victoria. Vol. XIII. XIV. XV. Melbourne 1878. 79.

---

## Einzelne Schriften.

Henry, James, Aeneidea, or critical, exegetical and aesthetical remarks on the Aeneis. Vol. I, 1—3. Vol. II, 1. 2. Dublin 1873—79.

Boss, Lewis, Remarks on the Dudley Observatory observations of the transit of Mercury, May 1878. (Ausschnitt). o. O. u. J.

Radlkofer, L., Ueber die Sapindaceen Holländisch-Indiens. (Extr. des »Actes du Congrès international de botanistes, tenu à Amsterdam en 1877«). o. O. u. J.

Winkler, Clem., Die Untersuchung des Eisenmeteorits von Rittersgrün. (Nova Acta Acad. Caes. Leopold. Carol. nat. curios. T. XL, N. 8.). Halle 1878.

Stein, Friedr. Ritter von, Der Organismus der Infusionsthiere, nach eigenen Forschungen in systemat. Reihenfolge bearbeitet. Abth. III. Die Naturgeschichte der Flagellaten oder Geisselinfusorien. 1. Hälfte. Leipzig 1878.

Scheffler, Herm., Wärme und Elektrizität. Suppl. zum II. Th. der Naturgesetze (= Lief. 5). Leipzig 1879.

Schell, Wilh., Theorie der Bewegung und der Kräfte. Ein Lehrbuch d. theoret. Mechanik. 2. umgearb. Aufl. Bd. 1. Leipzig 1879.

(Schlötel, W.,) Doctor Nobiling und seine Lehrmeister. Stuttgart o. J.

Perels, Martin, Vorträge über Sinnesempfindungen u. Sinnestäuschungen, Mondsucht, Traum u. s. w. 2. Ausg. München 1876.

Pertsch, Wilh., Die arabischen Handschriften der Herzogl. Bibliothek zu Gotha. Bd. 2, Heft 1. Gotha 1879.

Welch, L. B., and J. M. Richardson, An illustrated Description of pre-historic Relics found near Wilmington, Ohio. Wilmington 1879.

Eastmann, J. R., Discussion of West India Cyclone of Oct. 29 and 30, 1867. Washington 1868.

**W. Knop**, *Beiträge zur Kenntniss der Eiweisskörper.*[1])

In der öffentlichen Sitzung vom 3. April 1874 machte ich der Gesellschaft einige Mittheilungen über Verbindungen, in welche die Eiweisskörper durch Einwirkung von Brom zerlegt werden. Die Lösung von Brom in Salzsäure oder Bromwasserstoffsäure wirkt schon bei gewöhnlicher Temperatur auf Eiweiss, Casein und alle Abkömmlinge vom Eiweiss ein. Bei Siedehitze werden dieselben vollständig in dieser Flüssigkeit gelöst und unter Austritt eines bestimmten Quantums von Kohlenstoff und Stickstoff und unter Aufnahme von Sauerstoff in bromhaltige Verbindungen verwandelt, welche nach dem Absättigen mit Zink Zinksalze von constanter Zusammensetzung liefern.

Ich habe die Untersuchungen über diese Producte fortgesetzt, und berichte heute über eine Reihe neuer Verbindungen, welche bei der Behandlung der Eiweisskörper mit Bromlösung bei gewöhnlicher Temperatur entstehen. Die Bildung dieser Körper geht der der vorigen voraus, wenn dieselben nach der von mir angegebenen Vorschrift dargestellt werden, die Kenntniss der Zusammensetzung derselben musste daher weitere Aufschlüsse über den Verlauf der Veränderungen in Aussicht stellen, welche dieselben Substanzen bei höherer Temperatur erleiden.

Ich habe dieser Körper in meinen früheren Mittheilungen bereits Erwähnung gethan. Dass ich dieselben erst später als die bei höherer Temperatur bromirten untersucht habe, hat seinen Grund in Schwierigkeiten, die sich anfangs darboten, dieselben von constanter Zusammensetzung zu erhalten. Diese Schwierigkeiten hoben sich später bei etwas besserer Kenntniss der Eigenschaften dieser kalt bromirten Körper. Es ergab sich, dass sie nach dem Bromiren durch Alkohol, vielleicht auch durch

1) Vorgetragen und zum Druck übergeben in der Sitzung vom 27. Januar 1879.

Aether, Veränderungen erleiden. Man muss daher alle Substanzen, welche auf diesem Wege bromirt werden sollen, vorher mit Aether vollständig entfetten und nach dem Bromiren keinerlei weingeistige Flüssigkeiten zum Waschen mehr anwenden. Man erhält dann auch diese Körper so weit von constanter Zusammensetzung, dass sie nach wiederholten Darstellungen bei der Analyse übereinstimmende Gehalte an Kohlenstoff, Wasserstoff, Stickstoff, Brom und Sauerstoff ausweisen.

Bevor ich zu den Resultaten dieser Untersuchungen übergehe, will ich nicht unterlassen, über den Zweck derselben mich auszusprechen. Es ist nicht meine Absicht, die chemische Constitution und die Stellung dieser Körper im Systeme der Chemie festzustellen; meine Arbeit hat rein physiologische Ziele und ist durch Betrachtungen der Bildung und des Verhaltens der Stickstoffverbindungen in der Pflanze angeregt.

In einer Lösung der vier Salze: Salpeter, salpetersaurer Kalk, Bittersalz, phosphorsaures Kali, der man noch eine geringe Menge phosphorsaures Eisenoxyd hinzugesetzt hat, wächst und gedeiht jede grüne Pflanze. Die mit Chlorophyll versehene Zelle vermag also das complicirte Molekül der Eiweisskörper aus Kohlensäure, Salpetersäure, Schwefelsäure, Phosphorsäure und Wasser zusammenzusetzen.

Dagegen beobachten wir, wie überall wo Neubildungen eintreten, zuerst Eiweisssubstanz sich anhäuft, verbraucht wird und andere stickstoffhaltige und stickstofflose Körper auftreten. Wenn ich auch nicht im Geringsten bezweifle, dass bei der Bildung und Thätigkeit des Chlorophylls eine directe Erzeugung von Kohlehydraten durch Reduction von Kohlensäure und Wasser und ein Wiederverbrauch der Kohlehydrate stattfindet, so ist es für die Beurtheilung der Vorgänge in der Pflanzenzelle von Wichtigkeit, zu wissen, welche stickstofffreie Substanzen durch Zerklüftung der Eiweisskörper in der Zelle hervorgebracht werden können, während es selbstverständlich ist, dass die stickstoffhaltigen Körper von denselben abstammen.

Ich erinnere hier nur daran, dass das Leucin (von Gorup-Besanez) in keimenden Wickenpflanzen aufgefunden ist, und an die bemerkenswerthen Beziehungen des Asparagins zur Glucose, welche Pfeffer nachgewiesen hat, zugleich aber auch daran, dass mit der Bildung des Asparagins aus einer Eiweisssubstanz auch die

Möglichkeit der Bildung der stickstofffreien Aepfelsäure aus Eiweiss gegeben ist.

Es ist von rein chemischem Standpunkte aus denkbar, dass die Oxalsäure, in denjenigen Pflanzen wenigstens, welche sie reichlich enthalten, wie die Species der Gattungen Rumex und Oxalis, direct durch Reduction von Kohlensäure und Wasser erzeugt wird, aber auch möglich, dass sie nur aus Eiweisskörpern hervorgeht, oder dass beide Processe in der Pflanze thätig sind, um Oxalsäure zu bilden.

Denn dass durch Oxydation mittels Salpetersäure aus Eiweisskörpern Oxalsäure erzeugt wird, ist eine lange bekannte Thatsache. Wenn ich nach dem unten unter B. angegebenen Verfahren Eiweiss bei 100° vollständig ausbromirte, so konnte ich unter dem bromirten stickstoffhaltigen Hauptproduct stets einige Centigramme Oxalsäure nachweisen und Schützenberger erhielt unter den Spaltungsproducten, die er durch Kochen des Eiweisses mit Baryt erzeugte, reichlich Oxalsäure. Das so allgemeine Vorkommen sehr geringer Mengen von Oxalsäure in Form von mikroskopischem, krystallisirtem, oxalsaurem Kalk in Pflanzenzellen, hat daher wohl wahrscheinlicher seinen Ursprung in der Zersetzung von Eiweisskörpern.

Das Brom bewirkt nun, je nachdem man es bei gewöhnlicher Temperatur, bei gelinder Wärme oder bei 100° auf Eiweisssubstanzen einwirken lässt, mannichfache Umsetzungen, ohne dieselben zu zerstören. Leider ist die Untersuchung derselben schwierig, weil die nächsterhaltenen Producte nicht krystallisirbar sind.

Bei alledem glaube ich, dass dieser Weg später zu erheblichen Resultaten führen wird. Denn bei der Gegenwart von Brom in den Zersetzungsproducten der Eiweisskörper lassen sich dieselben sicherlich nach bekannten Methoden, etwa durch Behandeln mit Alkalien, mit metallhaltigen Radicalen und anderen bromentziehenden Agentien, weiter umsetzen.

In neuester Zeit hat Schützenberger unsere Kenntniss von den Eiweisskörpern wesentlich gefördert. Bei der Zersetzung durch Kochen mit Barytlösung erhielt er eine ganze Reihe verschiedener Zersetzungsproducte, welche den Vorzug haben, dass sie krystallisirbar sind oder krystallisirbare Verbindungen geben.

Diese Behandlung lässt sich auch auf die bromirten Eiweisskörper anwenden. Bei einem solchen Versuch hat Dr. Kohn

bereits 1875 in meinem Laboratorio durch Sieden von einer gebromten Caseinsubstanz Ammoniak und Bromoxyleucinbaryt erhalten. Aetzammoniak wirkt auch auf die gebromten Substanzen ein.

Aus diesem Grunde habe ich im Verlauf des vorigen Jahres auch die bei gewöhnlicher Temperatur gebildeten gebromten Eiweisskörper analysirt, obschon sie amorphe Substanzen und die meisten gewiss von vornherein Gemenge von mehreren Verbindungen sind. Wenn damit auch noch nicht viel gewonnen ist, so ist jedenfalls das Studium der weiteren Zersetzungsproducte, beispielsweise derjenigen, in welche sie beim Kochen mit Barytlösung zerfallen, sehr erleichtert.

Es bleibt mir noch übrig, über die Formeln, die ich unten aufstelle, einige Bemerkungen vorauszuschicken.

Alle die Formeln, von welchen ich unten Gebrauch mache, gebe ich nicht als Ausdrücke für die wahre Zusammensetzung der Substanzen, um die es sich handelt. Ich bin selbst überzeugt, dass sie alle noch weiter vervielfacht werden müssen, wenn auch die relativen Verhältnisse von C : H : N : O absolut richtig wären, worüber sich bis jetzt auch kein sicheres Urtheil fällen lässt. Denn wenn man beispielsweise die unten für Eiweiss aufgestellte Formel $C_{64}H_{100}N_{16}O_{20}$ noch mehr vervielfältigt, so ist ersichtlich, dass jedes einzelne Element noch um ein oder zwei Atome vermehrt oder vermindert werden kann, ohne dass die procentische Zusammensetzung so weit sich ändert, dass die analytisch gefundenen Mengen aller einzelnen Bestandtheile von diesen Aenderungen alterirt würden.

Nimmt man, wie es meistens geschieht, an, der Schwefelgehalt der Eiweisskörper entspreche einer chemischen Proportion, so wird das Molekül so gross, dass man einfache Schwefelverbindungen, wie Schwefelcyan, Sulphocarbamid etc. in diese Formel einführen kann, ohne gegen die berechnete procentische Zusammensetzung wesentlich zu verstossen. Man wird sicherlich es nicht eher unternehmen können, die Grösse der Formeln sämmtlicher Eiweisskörper festzustellen, bevor es gelungen ist, dieselben in eine Summe einfacherer Verbindungen zu zerlegen, deren Elemente zusammenaddirt, vollständig die Zusammensetzung des Eiweisskörpers wiedergeben, und unter welchen sich dann auch ein schwefelhaltiges Spaltungsproduct vorfinden muss, wenn nicht etwa alle diese Körper einfacherweise Oxy-

sulphurete, d. h. Verbindungen sind, in welchen ein geringes Quantum Sauerstoff durch Schwefel in nicht einmal bestimmten Proportionen ersetzt ist.

Die Formeln, welche ich unten berechnet habe, sollen nichts weiter als Vergleichungsformeln sein, welche den Zusammenhang erkennen lassen, in welchem die bromirten Körper zu einander und zu den natürlichen Substanzen stehen, aus welchen sie dargestellt worden sind, und rechtfertigen sich allein damit, dass sich ein solcher Zusammenhang aus den Procentzahlen nicht erkennen lässt.

Untersucht habe ich neuerdings diejenigen gebromten Körper, welche bei gewöhnlicher Temperatur aus Eiweisskörpern entstehen, wenn dieselben einige Tage mit einer geeigneten Bromlösung übergossen stehen gelassen werden. Ich habe deren zwölf bromirt und analysirt, nämlich:

1) Eiweiss, Casein, Nackenband (Ligamentum nuchae vom Rind);
2) Fischbein, Hausenblase, Rinderblase, Rindfleisch, Federkiele;
3) Seide, Leim;
4) Horn, Rosshaar.

In Folgendem habe ich die Methode der Darstellung und die Analysen dieser neuen kalt bromirten Körper vorangestellt und daran noch einige Bemerkungen über zwei Reihen heiss bromirter Eiweisskörper angeknüpft, von welchen die erste die schon früher von mir beschriebenen gebromten Körper umfasst.

### A. Bei gewöhnlicher Temperatur bromirte Körper.

Die Behandlung der verschiedenen Substanzen, welche bei diesen Versuchen in Anwendung gekommen sind, war folgende.

Alle wurden durch vielfach wiederholte Digestion mit Aether vollständig entfettet und an der Luft getrocknet. Darauf wurden 10 Grm. der zerkleinerten Substanzen mit einer Lösung von 10 C.C. Brom in 100 C.C. Salzsäure oder Bromwasserstoffsäure von 25 p. C. Gehalt an HCl oder HBr übergossen und damit 3—4 Tage bei gewöhnlicher Temperatur in Berührung gelassen.

Leim, Hausenblase und Rinderblase wurden mit der Lösung von Brom in Bromwasserstoffsäure behandelt, weil

sie in der anderen Lösung mehr in einen teigartigen Zustand übergingen.

Das Casein ist auf beiderlei Weise behandelt und hat dabei verschiedene Producte geliefert. Bei der Behandlung mit der Lösung des Broms in Chlorwasserstoffsäure ist mehr Brom und weniger Sauerstoff (bei Annahme der unten gegebenen Formel $Br_4$ statt $Br_{3,5}$ und $O_{20}$ statt $O_{24}$) aufgenommen.

Die Seide ist acht Tage lang mit der Lösung von Brom in Salzsäure behandelt, dann über Aetzkalk getrocknet, fein gerieben und nochmals vier Tage lang ebenso behandelt.

Nach dem Bromiren wurden die Substanzen in ein grösseres Quantum Wasser geworfen und darin mehrere Stunden liegen gelassen.

Dieses Wasser färbt sich stark braun. Filtrirt und mit Chlorbarium versetzt, scheidet sich nach Verlauf mehrerer Tage keine Spur von schwefelsaurem Baryt darin aus, was einiges Licht auf die Natur der Schwefelverbindung der Eiweisskörper wirft. Sie ist also der Art, dass der darin enthaltene Schwefel bei gewöhnlicher Temperatur nicht oxydirt wird, und vollständig in der bromirten Substanz erhalten bleibt, was nicht der Fall ist, wenn man das Bromiren bei Siedehitze vornimmt, und Alkohol zur Lösung der bromirten Substanz anwendet. Hierbei wird aller Schwefel zu Schwefelsäure oxydirt.

Nach dem Abgiessen der ersten sauren Lauge wiederholt man das Ausziehen mit grösseren Mengen Wasser noch mehrmals. Alle kalt bromirten Substanzen lösen sich etwas in Wasser, so dass dieses ohne Aufhören sich brombraun färbt.

Daher kann man das Gewicht, um welches die bromirte Substanz zunimmt, nicht richtig ermitteln.

Alle die Substanzen, welche ich analysirt habe, sind vorher 3—4 Monate lang über Aetzkalk bei gewöhnlicher Temperatur getrocknet. Sie stossen dabei lange Zeit Bromdampf aus, der den Kalk braun färbt.

Bei einzelnen, die sich leichter waschen lassen, mag die Gewichtszunahme annähernd richtig bestimmt werden können. So geben Horn, Fischbein, Eiweiss ungefähr das gleiche Gewicht bromirter Substanz, wie die angewandten, was zeigt, dass beim Eintritt des Broms eine Gruppe von der organischen Substanz austritt. Dieses war auch bei den bei 100° bromirten Körpern der Fall, und es bleibt noch zu ermitteln, welcher Natur die aus-

tretenden Glieder sind und wo sie zu suchen sind. Bis jetzt habe ich nur nachweisen können, dass kein Gas und keine Cyanverbindung austritt.

Im feuchten Zustande gewogen, bekommt man nahezu das Doppelte der angewandten Körper. Alle enthalten noch etwas Asche, die unten bei der Berechnung unter den Verlust mit fällt, der als Sauerstoff in Rechnung gebracht wird. Die Menge ist so gering, dass die übrigen Zahlen kaum durch die Vernachlässigung ihrer Bestimmungen berührt werden.

Auf Grund der Natur der bromirten Körper lassen sich die einzelnen Substanzen in vier Gruppen ordnen.

1) Eiweiss, Casein und Nackenband. Die beiden letzteren stehen in einem einfachen Zusammenhang mit dem Eiweiss. Sie sind analytisch verschieden von den übrigen durch den höchsten Kohlenstoffgehalt von 42 bis 50 p. C., bei einem Gehalt von 10 bis 14 p. C. Stickstoff, 8 bis 20 p. C. Brom und 5 bis 6 p. C. Wasserstoff.

2) Fischbein, Hausenblase, Rindfleisch, Federkiele. Die kalt gebromten Körper aller dieser Materialien enthalten alle nahezu 40 p. C. Kohlenstoff, 5 bis 6 p. C. Wasserstoff, 10 bis 12 p. C. Stickstoff und 20 bis 23 p. C. Brom. Ihre Zusammensetzung steht noch in einer gewissen Beziehung zu der des kalt gebromten Eiweisses.

3) Leim und Seide. Die kalt gebromten Abkömmlinge enthalten 40 p. C. Kohlenstoff, 5 bis 6 p. C. Wasserstoff, 22 bis 23 p. C. Brom und nahe an 14 p. C. Stickstoff. Auch die Zusammensetzung dieser Körper lässt sich, wenigstens annähernd, noch aus der des gebromten Eiweisses ableiten.

4) Horn und Rosshaar. Die kaltbromirten Substanzen lassen sich ebenso wenig glatt aus der Zusammensetzung des kalt bromirten Eiweisses ableiten, wie es nach Kohns' Versuchen der Fall war, mit der Ableitung der Zusammensetzung des heiss bromirten Horns aus der des heiss bromirten Eiweisses. Sie enthalten bei 40 p. C. Kohlenstoff 5 bis 6 p. C. Wasserstoff, 15 bis 17 p. C. Brom, nahe an 12 p. C. Stickstoff.

### I. Gruppe: *Eiweiss*, *Casein*, *Nackenband*.

Geben wir unter dem eingangs genommenen Vorbehalt dem natürlichen Eiweiss die Formel $C_{64}H_{100}N_{16}O_{20}$, so zeigen die fol-

genden Analysen des kalt bromirten Eiweisses, dass bei der Aufnahme von $Br_3$, gegen Ausscheidung von $H_3$ als Bromwasserstoff und der Gruppe Cyan oder Oxalsäurenitril $= 2 . C_2N_2$, eine Oxydation um $O_4$ stattgefunden hat.

Aus dem Eiweiss $= C_{64}H_{100}N_{16}O_{20}$
ist geworden bromirtes $= C_{60}(H_{97}Br_3)N_{12}O_{24}$.
Aus dem Casein $= C_{64}H_{100}N_{16}O_{20}$
ist geworden Nro. 1 $= C_{60}(H_{96}Br_4)N_{12}O_{20}$.
Aus dem Casein $= C_{64}H_{100}N_{16}O_{20}$
ist geworden Nro. 2 $= C_{60}(H_{96,5}Br_{3,5})N_{12}O_{24}$.

Das bromirte Eiweiss $= C_{60}(H_{97}Br_3)N_{12}O_{24}$
verhält sich zu brom. Nackenband $= C_{42}(H_{67}Br)\ N_{10}O_{13}$
Differenz $= C_{18}(H_{30}Br_2)N_2\ O_{11}$

Denkt man sich die $Br_2$ in der Differenz wieder durch $H_2$ zurückersetzt, so ist dieselbe:

$$C_{18}H_{32}N_2O_{11} = 2.C_9H_{11}NO_3 \text{ Tyrosin} + 5\ H_2O;$$

die organische Substanz im Nackenband ist also um die Elemente von 2 Mol. Tyrosin + 5 Mol. Wasser von der organischen Substanz des kalt bromirten Eiweisses verschieden.

Brom-Casein Nro. 1 ist das mit der Lösung von Brom in Salzsäure, Brom-Casein (Nro. 2) das mit der analogen Lösung von Brom in Bromwasserstoff bereitete.

Wollte man auf die Vergleichungsformeln weiter Gewicht legen, so müsste man wegen des Bruchtheils der Quantität von $Br_{3,5}$ im Brom-Casein Nro. 2 die Formeln des Eiweisses und des Caseins mindestens verdoppeln.

Die Analysen dieser drei verschiedenen Substanzen sind folgende:

1) Bromirtes Eiweiss, fast weisses, bis schwach gelblich-röthliches Pulver.

1) 0,503 Substanz gaben 0,832 $CO_2$ und 0,290 $H_2O$ oder 0,227 Kohlenstoff und 0,032 Wasserstoff.
2) 0,483 Substanz gaben 0,771 $CO_2$ oder 0,2103 Kohlenstoff.
3) 0,5195 Substanz gaben 0,287 $H_2O$ oder 0,032 Wasserstoff.
4) 0,6295 Substanz gaben 0,516 Pt oder 0,07325 Stickstoff.
5) 0,516 Substanz gaben 0,434 Pt oder 0,0615 Stickstoff.
6) 0,715 Substanz gaben 0,046 AgBr oder 0,1047 Brom.
7) 1,00 Substanz gab 0,115 $SBaO_4$ oder 0,0158 Schwefel.

| | Berechnet | | Gefunden | |
|---|---|---|---|---|
| $C_{60}$ | = 720 | 44,74 | 44,24 | = 43,53 |
| $H_{97}$ | = 97 | 6,02 | 6,18 | 6,23 |
| $Br_3$ | = 240 | 14,92 | 14,65 | — |
| $N_{12}$ | = 168 | 11,12 | 11,65 | 11,80 |
| $O_{24}$ | = 384 | 23,20 | 21,70 | = 23,28 |
| x.S | = — | — | 1,58 | |
| | 1609 | 100,00 | 100,00 | |

2) **Bromirtes Casein** Nro. 1, weisses bis gelbliches Pulver.

1) 0,600 Substanz gaben 0,974 $CO_2$ oder 0,2656 = 44,27 p. C. Kohlenstoff.

2) 0,373 Substanz gaben 0,606 $CO_2$ oder 0,1653 = 44,30 p. C. Kohlenstoff.

3) 0,300 Substanz gaben 0,149 $H_2O$ oder 0,01655 = 5,52 p. C. Wasserstoff.

4) 0,4145 Substanz gaben 0,205 $H_2O$ oder 0,0228 = 5,5 p. C. Wasserstoff.

5) 0,400 Substanz gaben 0,327 Pt oder 0,043 = 10,75 p. C. Stickstoff.

6) 0,505 Substanz gaben 0,2405 AgBr oder 0,1023 = 20,4 p. C. Brom.

7) 1,00 Substanz gab 0,192 $SBaO_4$ oder 0,0267 = 2,67 p. C. Schwefel.

| | Berechnet | | Gefunden |
|---|---|---|---|
| $C_{60}$ | = 720 | 44,33 | 44,30 |
| $H_{96}$ | = 96 | 5,90 | 5,50 |
| $Br_4$ | = 320 | 19,64 | 20,40 |
| $N_{12}$ | = 168 | 10,34 | 10,75 |
| $O_{20}$ | = 320 | 19,79 | 16,38 |
| x.S | = — | ? | 2,67 |
| | 1624 | 100,00 | 100,00 |

3) **Bromirtes Casein** Nro. 2, weisses bis blassgelbliches Pulver.

1) 0,3785 Substanz gaben 0,606 $CO_2$ oder 0,1653 = 43,66 p. C. Kohlenstoff.

2) 0,5115 Substanz gaben 0,822 $CO_2$ oder 0,2243 = 43,85 p. C. Kohlenstoff.

3) 0,331 Substanz gaben 0,190 $H_2O$ oder 0,0211 = 6,37 p. C. Wasserstoff.

4) 0,595 Substanz gaben 0,441 Pt oder 0,0625 = 10,52 p. C. Stickstoff.

5) 0,400 Substanz gaben 0,159 AgBr oder 0,06765 = 16,90 p. C. Brom.

6) Dazu den Schwefelgehalt von oben = 2,67 p. C.

| | | Berechnet | |
|---|---|---|---|
| $C_{60}$ | = 720,0 | 43,66 | 43,66 |
| $H_{96,5}$ | = 96,5 | 5,88 | 6,37 |
| $Br_{3,5}$ | = 280,0 | 16,98 | 16,90 |
| $N_{12}$ | = 168,0 | 10,20 | 10,52 |
| $O_{24}$ | = 384,0 | 23,28 | 19,88 |
| S | = — | — | 2,67 |
| | 1648,5 | | 100,00 |

4) Gebromtes Nackenband vom Rind. Aschgraues Pulver. Vor dem Bromiren war das in Stücke zerschnittene Band gut ausgekocht.

1) 0,697 Substanz gaben 1,258 $CO_2$ oder 0,343 = 49,21 p. C. Kohlenstoff.

2) 0,370 Substanz gaben 0,6845 $CO_2$ oder 0,1867 = 50,45 p. C. Kohlenstoff.

3) 0,757 Substanz gaben 1,425 $CO_2$ und 0,463 $H_2O$ oder 0,388 = 51,25 p. C. Kohlenstoff und 0,0515 = 6,80 p. C. Wasserstoff.

4) 0,569 Substanz gaben 0,565 Pt oder 0,0803 = 14,11 p. C. Stickstoff.

5) 0,5205 = 0,100 AgBr oder 0,04255 = 8,17 p. C. Brom.

6) 1,00 Substanz gab 0,132 $SBaO_4$ oder 0,01782 = 1,782 p. C. Schwefel.

| | | Berechnet | Gefunden | |
|---|---|---|---|---|
| $C_{42}$ | = 504 | 50,40 | 50,45 | |
| $H_{67}$ | = 67 | 6,70 | 6,80 | |
| Br | = 80 | 8,00 | 8,17 | |
| $N_{10}$ | = 140 | 14,00 | 14,11 | |
| $O_{13}$ | = 208 | 20,90 | 18,69 | 20,47 |
| x.S | = — | — | 1,78 | |
| | 999 | 100,00 | 100,00 | |

Das Nackenband ist ein homogenes Gewebe, dem entsprechend führt die Analyse seiner bromirten Substanz auch zu Zahlen, welche eine geregelte Beziehung ihrer Zusammensetzung zu der des bromirten Eiweisses und Caseins erkennen lassen.

## II. Gruppe: *Fischbein*, *Hausenblase*, *Rinderblase*, *Rindfleisch*, *Federn*.

Die Analysen der von diesen Körpern erhaltenen bromirten Substanzen haben Zahlen geliefert, welche nicht so scharf wie

die der vorigen zu einer Vergleichungsformel führen, was seinen Grund darin hat, dass alle diese Abkömmlinge vom Eiweiss von Natur nicht chemisch einfache Verbindungen, sondern Gemenge von verschiedenen Körpern sind.

Bei alledem zeigen die Analysen, dass sich die bromirten Substanzen in ihrer Zusammensetzung einer Substanz nähern, welche vom bromirten Eiweiss um 2 Molek. Tyrosin + 1 Molek. Leucin + 3 At. Sauerstoff verschieden ist. Der Sauerstoff kann durch Zersetzung von Wasser durch Brom, wie bei den heissbromirten Eiweisskörpern geliefert worden sein.

| | |
|---|---|
| Gebromtes Eiweiss | $= C_{60}H_{97}Br_3N_{12}O_{24}$ |
| Gebromte Substanz dieser Gruppe | $= C_{36}H_{62}Br_3N_9\ O_{13}$ |
| Differenz | $= C_{24}H_{35} - N_3O_{11}$ |

Es giebt aber die Summe 1. Leucin $= C_6H_{13}NO_2$

2. Tyrosin $= C_{18}H_{22}N_2O_6$

3. Sauerstoff $= O_3$

$C_{24}H_{35}N_3O_{11}$

5) Gebromtes Fischbein (braunschwarzes). Die gebromte Substanz hat dieselbe Farbe wie das angewandte Fischbein.

1) 0,4365 Substanz gaben 0,675 $CO_2$ und 0,227 $H_2O$ oder 0,184 = 42,15 p. C. Kohlenstoff und 0,0252 = 5,77 p. C. Wasserstoff.

2) 0,343 Substanz gaben 0,518 $CO_2$ und 0,1836 $H_2O$ oder 0,1443 = 41,49 p. C. Kohlenstoff und 0,0204 = 5,94 p. C. Wasserstoff.

3) 0,2767 Substanz gaben 0,1385 AgBr oder 0,0591 = 21,00 p. C. Brom.

4) 0,304 Substanz gaben 0,240 Pt oder 0,0341 = 11,22 p. C. Stickstoff.

5) 1,00 Substanz gab 0,300 $SBaO_4$ oder 0,0413 = 4,13 p. C. Schwefel.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $C_{36}$ = | 40,45 | 41,9 | 42,15 | |
| $H_{62}$ = | 5,80 | 5,94 | 5,77 | |
| $Br_3$ = | 22,44 | | 21,00 | |
| $N_9$ = | 11,79 | | 11,22 | |
| $O_{13}$ = | 19,52 | | 15,73 | 19,86 |
| x.S = | ? | | 4,13 | |
| | | | 100,00 | |

6) Hausenblase, hellgelbes Pulver.

1) 0,286 Substanz gaben 0,424 $CO_2$ und 0,139 $H_2O$ oder 0,1156 = 40,42 p. C. Kohlenstoff und 0,01544 = 5,40 p. C. Wasserstoff.

2) 0,295 Substanz gaben 0,227 Pt oder 0,032254 = 10,92 p. C. Stickstoff.

3) 0,471 Substanz gaben 0,0227 AgBr oder 0,09659 = 20,51 Brom.

4) 1,00 Substanz gab 0,110 $SBaO_4$ oder 0,01515 = 1,515 p. C. Schwefel.

| | | | |
|---|---|---|---|
| $C_{36}$ = 432 | 40,45 | 40,42 | |
| $H_{62}$ = 62 | 5,80 | 5,40 | |
| $Br_3$ = 240 | 22,44 | 20,51 | |
| $N_9$ = 126 | 11,79 | 10,92 | |
| $O_{13}$ = 208 | 19,52 | 11,23 | } 22,75 |
| x.S = — | ? | 11,52 | |
| 1068 | 100,00 | 100,00 | |

7) Rinderblase. Die durchsichtigsten Theile derselben, frei von allen gröberen Gefässen. Weisses bis röthlichgraues Pulver.

1) 0,517 Substanz gaben 0,7645 $CO_2$ und 0,260 $H_2O$ oder 0,2085 = 40,33 p. C. Kohlenstoff und 0,029 = 5,60 p. C. Wasserstoff.

2) 0,5155 Substanz gaben 0,7665 $CO_2$ und 0,260 $H_2O$ oder 0,20904 = 40,55 p. C. Kohlenstoff und 0,029 = 5,62 p. C. Wasserstoff.

3) 0,343 Substanz gaben 0,273 Pt oder 0,0340 = 11,19 p. C. Stickstoff.

4) 0,449 Substanz gaben 0,232 AgBr oder 0,09871 = 21,91 p. C. Brom.

5) 1,00 Substanz gab 0,084 $SBaO_4$ oder 0,0116 = 1,16 p. C. Schwefel.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $C_{36}$ = 432 | 40,45 | 40,33 | 40,55 | |
| $H_{62}$ = 62 | 5,80 | 5,60 | 5,62 | |
| $Br_3$ = 240 | 22,44 | | 21,91 | |
| $N_9$ = 126 | 11,79 | | 11,19 | |
| $O_{13}$ = 208 | 19,52 | | 19,57 | } 20,73 |
| x.S = — | ? | | 1,16 | |
| | | | 100,00 | |

8) Gebromtes Rindfleisch. Lebhaft gelbes Pulver. Die Substanz war vor dem Bromiren und Entfetten längere Zeit mit Wasser ausgekocht.

1) 0,319 Substanz gaben 0,485 $CO_2$ und 0,159 $H_2O$ oder 0,1323 = 41,47 p. C. Kohlenstoff und 0,0177 = 5,55 p. C. Wasserstoff.

2) 0,312 Substanz gaben 0,252 Pt oder 0,0358 = 11,47 p. C. Stickstoff.

3) 0,350 Substanz gaben 0,193 AgBr oder 0,08212 = 23,46 p. C. Brom.

4) 1,00 Substanz gab 0,111 $SBaO_4$ oder 0,0152 = 1,52 p. C. Schwefel.

| | | Gefunden. | |
|---|---|---|---|
| $C_{36}$ = 432 | 40,45 | 41,47 | |
| $H_{62}$ = 62 | 5,80 | 5,55 | |
| $Br_3$ = 240 | 22,44 | 23,46 | |
| $N_9$ = 126 | 11,79 | 11,47 | |
| $O_{13}$ = 208 | 19,52 | 16,53 | } 18,05 |
| x.S = — | ? | 1,52 | |
| | | 100,00 | |

9) Gebromte Federkiele. Der hohle, durchsichtige Theil der Gänseschwungfedern. Gelbweisses Pulver.

1) 0,305 Substanz gaben 0,448 $CO_2$ und 0,132 $H_2O$ oder 0,1222 = 40,06 p. C. Kohlenstoff und 0,0146 = 4,80 p. C. Wasserstoff.

2) 0,474 Substanz gaben 0,706 $CO_2$ und 0,238 $H_2O$ oder 0,1925 = 40,60 p. C. Kohlenstoff und 5,58 p. C. Wasserstoff.

3) 0,2325 Substanz gaben 0,1125 AgBr oder 0,04787 = 20,59 p. C. Brom.

4) 0,3025 Substanz gaben 0,252 Pt oder 0,03579 = 11,83 p. C. Stickstoff.

5) 1,00 Substanz gab 0,191 $SBaO_4$ oder 0,0262 = 2,62 p. C. Schwefel.

| | | | Gefunden. | |
|---|---|---|---|---|
| $C_{36}$ | = 432 | 40,45 | 40,06 | 40,60 |
| $H_{62}$ | = 62 | 5,80 | 4,80 | 5,58 |
| $Br_3$ | = 240 | 22,44 | 20,59 | |
| $N_9$ | = 126 | 11,79 | 11,83 | |
| $O_{13}$ | = 208 | 19,52 | 20,10 | |
| x.S | = — | ? | 2,62 | |
| | 1068 | | 100,00 | |

## III. Gruppe. *Leim und Seide.*

Für die Producte, welche beim Bromiren von Leim bei gewöhnlicher Temperatur aus diesen Körpern entstehen, lässt sich noch eine Formel ableiten, welche um die Summe von 3 Mol. Wasser, 3 Mol. Tyrosin, 1 Mol. Leucin differirt von der Zusammensetzung des kalt bromirten Eiweisses. Indessen enthält die Formel bereits etwas Wasserstoff mehr, als der procentischen Zusammensetzung entspricht.

Die Formel für diese Producte ist annäherungsweise:

$$C_{27}H_{46}Br_2N_8O_{10}Sx.$$

Zieht man dieselbe von der des kalt bromirten Eiweisses ab:

$$C_{60}(H_{97}Br_3)N_{12}O_{24}$$
$$C_{27}(H_{46}Br_2)N_8O_{10}$$
so bleiben $C_{33}(H_{51}Br)N_4O_{14}$

Ersetzt man in diesem Rest Br wieder durch H, so ist die Formel $C_{33}H_{52}N_4O_{14}$ gleich folgender Summe:

| | | |
|---|---|---|
| 3 Mol. Wasser | = | $H_6O_3$ |
| 3 Mol. Tyrosin | = | $C_{27}H_{33}N_3O_9$ |
| 1 Mol. Leucin | = | $C_6H_{13}NO_2$ |
| | | $C_{33}H_{52}N_4O_{14}$ |

Die Analysen haben nämlich folgende Zahlen gegeben, unter welchen man bemerkt, dass der Wasserstoff ein wenig niedriger gefunden ist, als der berechnete.

10) Gebromte Seide. Fast rein weisses Pulver.

1) 0,340 Substanz gaben 0,5005 $CO_2$ oder 0,137 = 40,30 p. C. Kohlenstoff.

2) 0,348 Substanz gaben 0,521 $CO_2$ oder 0,142 = 40,80 p. C. Kohlenstoff.

3) 0,462 Substanz gaben 0,213 $H_2O$ oder 0,0236 = 5,13 p. C. Wasserstoff.

4) 0,400 Substanz gaben 0,405 Pt oder 0,05754 = 14,36 p. C. Stickstoff.

5) 0,430 Substanz gaben 0,432 Pt oder 0,06137 = 14,24 p. C. Stickstoff.

6) 0,400 Substanz gaben 0,197 Ag Br oder 0,0888 = 20,95 p. C. Brom.

7) 1,00 Substanz gab 0,220 S Ba $O_4$ oder 0,0303 = 3,03 p. C. Schwefel.

| | | Berechnet. | Gefunden. | |
|---|---|---|---|---|
| $C_{27}$ | = 324 | 40,40 | 40,55 | |
| $H_{16}$ | = 46 | 5,73 | 5,13 | |
| $Br_2$ | = 160 | 20,00 | 20,95 | |
| $N_8$ | = 112 | 13,96 | 14,36 | |
| $O_{10}$ | = 160 | 19,91 | 15,98 | 19,01 |
| S | = — | ? | 3,03 | |
| | 802 | 100,00 | 100,00 | |

11) Gebromter Leim. Lebhaft gelbes Pulver.

1) 0,457 Substanz gaben 0,670 $CO_2$ und 0,191 $H_2O$ oder 0,1830 = 40,04 p. C. Kohlenstoff und 0,0242 = 5,64 p. C. Wasserstoff.

2) 0,300 Substanz gaben 0,28 Pt = 0,0398 = 13,26 p. C. Stickstoff.

3) 0,5035 Substanz gaben 0,276 Ag Br oder 0,1152 = 22,94 p C. Brom.

4) 1,00 Substanz gab 0,110 S Ba $O_4$ oder 0,01515 = 1,52 p. C. Schwefel.

| | | Berechnet. | Gefunden. | |
|---|---|---|---|---|
| $C_{27}$ | = 324 | 40,40 | 40.04 | |
| $H_{16}$ | = 46 | 5,73 | 5,64 | |
| $Br_2$ | = 160 | 20,00 | 22,94 | |
| $N_8$ | = 112 | 13,96 | 13,26 | |
| $O_{10}$ | = 160 | 19,91 | 16,60 | 18,12 |
| S | = — | ? | 1,52 | |
| | | 100,00 | 100,00 | |

## IV. Gruppe. *Horn, Rosshaar.*

Versucht man es, aus den Analysen dieser Körper eine Formel abzuleiten, so giebt dieselbe bei der Subtraction derselben von der des kalt bromirten Eiweisses keinen solchen Rest,

der gerade auf die Summe von Wasser, Tyrosin, Leucin und durch Oxydation hinzugetretenen Sauerstoffs wäre. Die Formel, welche der procentischen Zusammensetzung des kalt bromirten Horns am nächsten kommt, ist $C_{36}H_{60}Br_2N_9O_{18}$. Dagegen steht sie zur Formel der Säure, welche Kohn (1875) aus Horn nach demselben Verfahren, welches ich zum Bromiren der Eiweisskörper bei 100° angewandt habe, in einer Beziehung, wie sie der Bildung der Säure aus Horn durch tieferes Bromiren wohl entspricht. Vervierfacht man auch die von Kohn gefundene einfachste Relation für die wasserfrei berechnete Säure, so ist deren Formel $= C_{36}H_{68}Br_4N_8O_{28}$.

Wie man ersieht, ist beim Bromiren in der Hitze mehr Wasserstoff und Stickstoff aus dem Horn herausgenommen, die doppelte Menge Brom eingetreten und der Rest ansehnlich höher oxydirt und gewässert, als es bei gewöhnlicher Temperatur und ohne Mitwirkung von Alkohol geschieht.

12) Gebromtes Horn, bereitet von hellbraunen Horndrehspänen. Hat dieselbe Farbe wie das Horn.

1) 0,814 Substanz gaben 1,153 $CO_2$ und 0,424 $H_2O$ oder 0,3148 = 38,70 p. C. Kohlenstoff und 0,047 = 5,77 p. C. Wasserstoff.

2) 0,605 Substanz gaben 0,920 $CO_2$ oder 0,251 = 41,48 p. C. Kohlenstoff.

3) 0,756 Substanz gaben 0,270 AgBr oder 0,1144 = 15,20 p. C. Brom.

4) 0,459 Substanz gaben 0,382 Pt oder 0,0543 = 11,83 p. C. Stickstoff.

5) 0,484 Substanz gaben 0,712 $CO_2$ und 0,232 $H_2O$ oder 0,1936 = 40,00 p. C. Kohlenstoff und 0,0258 = 5,33 p. C. Wasserstoff.

6) 1,00 Substanz gab 0,192 $SBaO_4$ oder 0,0262 = 2,62 p. C. Schwefel.

| | Berechnet. | Gefunden. | |
|---|---|---|---|
| $C_{36}$ | = 40,34 | 40,00 | |
| $H_{60}$ | = 5,53 | 5,33 | |
| $Br_2$ | = 15,01 | 15,20 | |
| $N_9$ | = 11,82 | 11,83 | |
| $O_{18}$ | = 27,30 | 25,02 | 27,64 |
| S | = — | 2,62 | |
| | 100,00 | 100,00 | |

13) Gebromtes schwarzbraunes Rosshaar. Hat nach dem Bromiren getrocknet fast dieselbe Farbe wie die natürliche Substanz.

1) 0,3375 Substanz gaben 0,497 $CO_2$ und 0,178 $H_2O$ oder 0,1356 = 40,17 p. C. Kohlenstoff und 0,0198 = 5,86 p. C. Wasserstoff.

2) 0,3690 Substanz gaben 0,324 Pt oder 0,046 = 12,44 p. C. Stickstoff.
3) 0,310 Substanz gaben 0,130 AgBr oder 0,0553 = 17,84 p. C. Brom.
4) 1,00 Substanz gab 0,182 $SBaO_4$ oder 0,0242 = 2,48 p. C. Schwefel.

| | |
|---|---|
| C | 40,17 |
| H | 5,86 |
| Br | 17,84 |
| N | 12,44 |
| O | 21,31 |
| S | 2,48 |
| | 100,00 |

**B. Die heiss bromirten Eiweisskörper, nach dem Bromiren, mit Alkohol und darnach mit platinirtem Zink behandelt.**

Ueber diese Körper habe ich bereits im chemischen Centralblatt 1875, S. 355 und Folge etwas Ausführlicheres veröffentlicht.

Das Verfahren, nach welchem die Substanzen bei höherer Temperatur bromirt wurden, bestand darin, dass man lufttrocknes Eiweiss, Casein, Horn etc. mit der Lösung von Brom in Bromwasserstoffsäure in der Retorte etwa zwölf Stunden bei gewöhnlicher Temperatur oder in gelinder Wärme von 30—40° zusammen stehen lässt, darauf im Wasserbade der Destillation unterwirft, bis keine Bromdämpfe mehr übergehen. Hiernach mischt man absoluten Alkohol hinzu und destillirt weiter, so lange als noch Bromäthyl übergeht. Auf diesem Wege entfernt man die letzten Reste von frei gebliebenem Brom und den grössten Theil der Bromwasserstoffsäure.

Die Flüssigkeit in der Retorte nimmt, nachdem diese Beimengungen entfernt sind, eine hellgelbe Farbe an. Bei der Destillation entweicht keine Kohlensäure, kein Bromcyan, kein Stickstoff, im Rückstand aber finden sich constant einige Centigramme Oxalsäure unter dem bromirten Hauptproduct.

Den Inhalt der Retorte verdünnt man bei Anwendung von 100 Grm. Eiweisskörper mit 1 Liter Wasser, lässt gegen 12 Stunden stehen und filtrirt die blassgelbliche Flüssigkeit von einer geringen Menge, etwa 1 Grm., eines braunen, halbflüssigen Rückstandes, der zumeist wohl in den bromirten Fetten der

Substanz besteht, ab und sättigt die Flüssigkeit bei gelinder Wärme durch platinirtes Zink, so lange bis sich einige Milligramme Oxyleucinzink als leichtes weisses Pulver ausscheiden.

Man filtrirt, dunstet die fast völlig farblose Lösung des Zinksalzes bei 80° im Wasserbade ein, und fällt das Zinksalz bei Anwendung von 100 Grm. Eiweisskörper mit 1,5 Liter vorher zum Sieden erhitztem absoluten Alkohol, sammelt den Niederschlag auf dem Filter, und presst denselben, sobald der Alkohol abgelaufen, sofort unter starkem Druck zwischen Fliesspapier aus. Der Niederschlag ist äusserst zerfliesslich, der Presskuchen muss deshalb sogleich unter den Exsiccator gebracht werden. Nachdem derselbe ausgetrocknet ist, löst man ihn von neuem in möglichst wenig Wasser und fällt das Zinksalz von neuem durch Alkohol. Diese Operation wiederholt man, bis das Zinksalz von Bromammonium und einer bromhaltigen Kohlenstoffverbindung, in welcher auch von dem Alkohol ein Quantum eingetreten ist, frei ist.

Diese letztere Verbindung enthält ein Quantum Kohlenstoff, welches die Eiweisssubstanz abgegeben hat; sie ist das Zinksalz einer sauern Aetherart. Die Hauptmasse ist in dem Alkohol enthalten, mit welchem das Zinksalz zuerst ausgefällt wurde. Um diese Verbindung rein zu erhalten, wurde das Zinksalz in Kalksalz umgesetzt, das in zolllangen Nadeln und bei sehr langsamem Eindunsten seiner Lösung über Schwefelsäure in grossen Krystallen erhalten wird. Dieses Kalksalz hat die Zusammensetzung:

$C_5H_{14}Br_2Ca_2O_6 = 2 \, . \, (C_2H_6O \text{ Alkohol}) + H_2Br_2 + 2 \, . \, CaO + CO_2$.

Weiter als das Zinksalz des bromirten Eiweisskörpers, welches das Hauptproduct der Operation ist, einigen Grammen des Zinksalzes dieses sauren Aethers und Bromammonium, hat unter den Spaltungsproducten der Eiweisskörper bei dieser Art des Bromirens bis jetzt nichts aufgefunden werden können. Die Mengenverhältnisse, in welchen Brom und Bromwasserstoff von 25 bis 50 p. C. Gehalt an HBr zweckmässig angewandt werden, sind gegen 100 Grm. Trockensubstanz in dem angewandten lufttrocknen Eiweisskörper, dessen Wassergehalt man vorher bestimmen muss, um das erforderliche Quantum der lufttrocknen Substanz berechnen zu können:

100 Grm. Eiweiss (trocken berechnet) 50 Cub.-Centim. Brom gelöst in 200 C.C. Bromwasserstoffsäure, nachher 200 C.C. Alkohol.

100 Grm. Casein 40 Cub.-Centim. Brom, gelöst in 200 C.C. Bromwasserstoffsäure, nachher 200 C.C. Alkohol.

100 Grm. Hornspäne erfordern, wie Dr. Kohn später in meinem Laboratorio gefunden hat, die kleinere Menge Brom von 40 C.C. Brom, ebenso wie das Casein.

Unter Ausscheidung von der in dem krystallisirbaren Zinksalz des sauren Aethers enthaltenen Kohlensäure, ferner vom Ammoniak, haben sich bei diesem Verfahren bromirte, äusserst zerfliessliche Zinksalze gebildet, aus denen die entsprechenden Kalksalze dargestellt wurden. Ihre Analyse führte zu den Formeln:

| | |
|---|---|
| Zinksalz aus Hühnereiweiss, Kp: | $C_{15}H_{27}Br_2N_3Zn_2O_{10}$ |
| „ „ Bluteiweiss, Kohn: | $C_{15}H_{27}Br_2N_3Zn_2O_{10}$ |
| „ „ Casein, Kohn: | $C_{15}H_{27}Br_2N_3Zn_2O_9$ |
| „ „ Horn, Kohn: | $C_9\ H_{17}Br\ N_2Zn\ O_8$ |
| Kalksalz aus Hühnereiweiss, Kp: | $C_{15}H_{27}Br_2N_3Ca_2O_{10}$ |
| „ „ Bluteiweiss, Kohn: | $C_{15}H_{27}Br_2N_3Ca_2O_{10}$ |
| „ „ Horn, Kohn: | $C_9\ H_{17}Br\ N_2Ca\ O_8$. |

Die wasserfrei berechneten bromirten Säuren haben diesen Formeln nach die Zusammensetzung:

| | |
|---|---|
| Säuren aus Hühnereiweiss | $C_{15}H_{27}Br_2N_3O_8$ |
| „ Bluteiweiss | $C_{15}H_{27}Br_2N_3O_8$ |
| „ Casein | $C_{15}H_{27}Br_2N_3O_7$ |
| „ Horn | $C_9\ H_{17}Br\ N_2O_7$. |

Selbstverständlich drücken diese Formeln nur die einfachsten atomistischen Relationen der Bestandtheile zu einander aus. Schon zur Vergleichung mit der Zusammensetzung der kalt bromirten Eiweisskörper müssen diese Formeln vervielfacht werden.

Sie müssen mindestens schon vervierfacht werden, wenn man auf die Zusammensetzung des Caseins und Eiweisses aus der Zusammensetzung dieser heiss bromirten Substanzen einen

Schluss ziehen will, und wollte man den Formeln für die kalt bromirten einen weiteren Werth, als den von Vergleichungsformeln, beilegen, so müssten dieselben wegen des Vorkommens von gebrochenen Bromatomen in einigen mindestens achtmal so gross genommen werden. Stellt man sie zur Vergleichung der Entstehung der bei 100° bromirten Substanzen mit den kalt bromirten viermal so gross, als sie hier vorstehend gegeben sind, so ist die Differenz in der Zusammensetzung dieser beiden Reihen:

| | |
|---|---|
| Heiss bromirtes Eiweiss | $= C_{60}(H_{108}Br_8)N_{12}O_{32}$ |
| kalt bromirtes Eiweiss | $= C_{60}(H_{97}\ Br_3)N_{12}O_{24}$ |
| Differenz | $= (H+Br)_{16}\quad O_8$ |
| Heiss bromirtes Casein | $= C_{60}\ (H_{108}Br_8)\ N_{12}\ O_{28}$ |
| kalt bromirtes Nro. 2 | $= C_{60}(H_{96,5}Br_{3,5})N_{12}O_{24}$ |
| | $(H+Br)_{16}\quad O_4$ |
| Heiss bromirtes Horn | $= C_{36}\ H_{68}\ Br_4\ N_8\ O_{28}$ |
| kalt bromirtes Horn | $= C_{36}\ H_{60}\ Br_2\ N_9\ O_{18}$ |
| | $(H+Br)_{10}N_{-1}O_{10}$ |

Diese Formeln lassen den Vorgang der Bildung der bromirten Substanzen aus Eiweiss erkennen. Mag nun die Zusammensetzung des schwefelfrei berechneten Eiweisses einst gefunden werden wie sie wirklich ist, jedenfalls kann sie nicht viel abweichen von irgend einem Vielfachen der folgenden Relationen $C_{16}H_{25}N_4O_5$, denn die gefundene procentische Zusammensetzung stimmt mit der nach der Formel berechneten sehr scharf überein:

Schwefelfreies Eiweiss

| | | Berechnet. | Gefunden. | Vervierfacht. |
|---|---|---|---|---|
| $C_{16}$ = | 192 | 54,30 | 54,37 | $C_{64}$ |
| $H_{25}$ = | 25 | 7,08 | 7,12 | $H_{100}$ |
| $N_4$ = | 56 | 15,86 | 15,75 | $N_{16}$ |
| $O_5$ = | 80 | 22,76 | 22,67 | $O_{20}$ |
| | 353 | 100,00 | 100,00 | |

Vergleicht man mit dieser Zusammensetzung des schwefelfrei berechneten Eiweisses die der bromirten Spaltungsproducte des Eiweisses, so sieht man, dass dieselbe einer Gruppirung der

Elemente im Eiweiss zu Oxalsäurenitril oder Cyan, Imid, Leucin und Tyrosin entspricht, welche beim Bromiren Wasser, Ammoniak, Bromdioxyleucin und Bromtyrosin, oder wenn man ein At. Sauerstoff auf das Bromtyrosin wirft, Bromoxyleucin und Bromoxytyrosin geben, wie folgt.

| Eiweiss, schwefelfrei berechnet | Wasserfreie bromirte Säure |
|---|---|
| CN Cyan oder Oxalsäurenitril | Wasser $H_2O$ |
| HN Imid | Ammoniak $H_3N$ |
| $C_6H_{13}NO_2$ Leucin | Bromoxyleucin $C_6H_{12}BrNO_3$ |
| $C_9H_{11}NO_3$ Tyrosin | Bromoxytyrosin $C_9H_{10}BrNO_4$ |
| $C_{16}H_{25}N_4O_5$ | $C_{15}H_{27}Br_2N_3O_8$ |

Für schwefelfreies Casein gestaltet sich der Zusammenhang zwischen der natürlichen und bromirten Substanz ganz ähnlich, nur enthält die bromirte Säure 1 At. Sauerstoff weniger. In der bromirten aus Horn dargestellten Säure fehlt, wie Kohn gefunden hat, relativ zu den aus Eiweiss und Casein dargestellten Säuren die Leucingruppe, wie folgt:

| Casein | Horn |
|---|---|
| $H_2O$ Wasser | $H_4O_2$ Wasser |
| $H_3N$ Ammoniak | $H_3N$ Ammoniak |
| $C_6H_{12}BrNO_3$ Bromoxyleucin | — |
| $C_9H_{10}BrNO_3$ Bromtyrosin | $C_9H_{10}BrNO_3+O_2$ Bromoxytyrosin |
| $C_{15}H_{27}Br_2N_3O_7$ gebromte Säure | $C_9H_{17}BrN_2O_7$ gebromte Säure. |

Bei der Bildung der gebromten Säuren aus Casein und Horn entsteht ebenso wie beim Eiweiss stets eine geringe Menge des Zinksalzes, dessen entsprechendes Kalksalz die Formel:

$C_5H_{14}Br_2Ca_2O_6 = (C_2H_6O)_2 + H_2Br_2 + 2.CaO + CO_2$ hat.

Das Oxyleucin, das in obigen Formeln figurirt, ist aus dem vom Eiweiss und Casein erhaltenen Zinksalz der bromirten Säure thatsächlich dargestellt worden. Behandelt man die mit Zink abgesättigte Lösung, so wie sie nach dem Abdestilliren des Bromäthyls nach der oben gegebenen Vorschrift durch Verdünnen der alkoholischen Flüssigkeit mit einem reichlichen Quantum Wasser erhalten wird, weiter mit platinirtem Zink, so erhält man einen voluminösen Niederschlag von Oxyleucin-Zinkoxyd: $C_6H_{13}NO_3 + ZnO$. Es ist ein luftbeständiges, amorphes, vollkommen weisses Pulver.

Indem Kohn das vom Casein bereitete Zinksalz der gebromten Säure $C_{15}H_{27}Br_2N_3Zn_2O_9$ mit Baryt kochte, erhielt derselbe die Verbindung von Bromoxyleucin mit Baryt: $C_6H_{12}BrNO_3 + BaO$. Diese Verbindung wurde aus der Flüssigkeit, nachdem dieselbe vom ausgeschiedenen Zinkoxyd abfiltrirt und durch Einleiten von Kohlensäure vom überschüssigen Baryt befreit, darauf zur Syrupsdicke eingedampft worden, durch absoluten Alkohol aus der wässerigen Lösung als flockiger Niederschlag erhalten.

Bei dieser Zersetzung der bromirten Säure wird Ammoniak frei, und zwar stimmte dessen Menge nach einem Versuch von Kohn mit derjenigen überein, die sich nach dem oben gegebenen Schema: $C_{15}H_{27}Br_2N_3O_7 = H_2O + NH_3 + C_6H_{12}BrNO_3 + C_9H_{10}BrNO_4$ berechnet.

Fügt man zu dem Inhalte der Retorte, nachdem man den Eiweisskörper in der Siedehitze in der Mischung von Brom mit Bromwasserstoff vollständig gelöst und so lange im Wasserbade erhitzt hat, bis der leere Theil der Retorte farblos geworden, d. h. bis alles überschüssige Brom entfernt ist, Alkohol hinzu und nachher kein Wasser, und dunstet diese Lösung ab, so erhält man eine Reihe anderer Bromverbindungen, die ich noch nicht weiter in Angriff genommen habe.

Ebenso erhält man andere Bromverbindungen, wenn man nach dem Abdestilliren des Broms von der wässerigen, sauren Lösung keinen Alkohol hinzusetzt, sondern mit Wasser verdünnt. Die Producte, die hierbei entstehen, habe ich gleichfalls noch nicht näher untersucht.

### C. Die bei 100° bromirten Eiweisskörper zuerst mit platinirtem Blei, darnach mit platinirtem Zink behandelt.

Ich habe später gefunden, dass die Bromwasserstoffsäure beim Erwärmen mit platinirter Bleifolie unter lebhafter Wasserstoffentwicklung zersetzt wird, indem sich Bromblei bildet. Bei der geringen Löslichkeit dieses Salzes in Wasser musste diese Eigenschaft sich benutzen lassen, um die bei der Bereitung der unter B. beschriebenen gebromten Körper in Anwendung

kommenden Ueberschüsse von Brom und Bromwasserstoff zu entfernen. Dieses ist nun allerdings der Fall, aber die Körper, die hierbei entstehen, sind nicht dieselben, wie die unter B. beschriebenen.

Ich habe zuerst ein Quantum Eiweiss, von 100 Grm. Trockensubstanz, mit der Lösung von 50 C.C. Brom in 200 Bromwasserstoffsäure von 30 p. C. Gehalt an HBr in der Retorte digerirt, darauf, ebenso wie oben angegeben, das Brom abdestillirt, darauf 200 C.C. Alkohol hinzugesetzt und so lange fortdestillirt, als merklich noch Bromäthyl überging. Dann wurde die Flüssigkeit mit 1,5 Liter Wasser verdünnt, bis zum Klären hingestellt, filtrirt und darauf mit platinirter Bleifolie auf dem Wasserbade einige Tage erhitzt und schliesslich bis zur Syrupdicke eingedunstet.

Auch durch die Behandlung der sauren gelben Flüssigkeit mit platinirtem Blei wird die Lösung nach und nach immer farbloser. Zuerst setzen sich in der verdünnten Lösung Krystalle von Bromblei auf dem Blei an. In dem Masse, als sie beim Eindunsten concentrirter wird, verschwinden die Krystalle wieder, und nachdem man die Flüssigkeit etwa 4 bis 5 Tage lang mit dem platinirten Blei behandelt hat, enthält die bis zum Syrup abgedunstete Flüssigkeit das ganze Bromblei in Lösung, wahrscheinlich in loser Verbindung mit der entstandenen bromirten Eiweissverbindung; denn, wenn man dieselbe nun mit Wasser verdünnt, so schwillt die Masse zuerst blumenkohlähnlich auf, bald darauf, namentlich wenn man noch mehr Wasser hinzusetzt, setzt sich rasch pulverförmiges Bromblei ab, worauf die Lösung wieder dünnflüssig erscheint. Durch mehrmaliges Eindunsten und Lösen in Wasser entfernt man das Bromblei schon sehr vollständig. Dunstet man nach der Abscheidung des Brombleis wieder zum Syrup ein, so fällt absoluter Alkohol ein blendend weisses sehr zerfliessliches Bleisalz, das Herr F. J. Berwerth aus Siebenbürgen kürzlich in meinem Laboratorio analysirt hat. Die Analyse hat gegeben:

| | | Berechnet. | Gefunden. | Gefunden. |
|---|---|---|---|---|
| $C_{11}$ | = 132 | 16,52 | 16,65 | 16,44 |
| $H_{14}$ | = 14 | 1,76 | 1,81 | 1,82 |
| $Br_3$ | = 240 | 30,27 | 30,67 | 30,67 |
| $N_4$ | = 56 | 7,06 | 6,60 | 6,58 |
| Pb | = 207 | 26,10 | 26,15 | 26,14 |
| $O_9$ | = 144 | 18,29 | 18,12 | 18,45 |
| | 793 | 100,00 | 100,00 | 100,00 |

Verdoppelt man diese Formel zur Vergleichung mit den folgenden Analysen, so erhält man $C_{22}H_{28}Br_6N_8Pb_2O_{18}$.

Bei einem zweiten Versuche habe ich 60 Grm. lufttrocknes Eiweiss, = 50 Grm. trocknem, mit 25 Cub.-Centim. Brom, gelöst in 100 Cub.-Centim. Bromwasserstoffsäure, und nachher mit 50 Cub.-Centim. Alkohol in der oben angegebenen Weise behandelt.

Nach dem Abdestilliren des Broms und Bromäthyls wurde die Flüssigkeit acht Tage lang mit platinirtem Blei behandelt. Um zu sehen, wie viel Blei darnach in Lösung bleibt, als Bromblei und als Base der erzeugten sauren Substanz, von welcher vorstehende Analyse gemacht worden, digerirte ich die Lösung nachher zwei Tage lang mit n i c h t platinirtem Zinkblech, welches die bromirte Eiweisssubstanz nicht angreift. Es wurden im Ganzen nur 1,5 Grm. Blei ausgefällt, das selbstverständlich in der Lösung durch das Aequivalent Zink ersetzt worden ist.

Bei diesem zweiten Versuche wurde diese Menge Zinksalz aber nicht durch Alkohol ausgeschieden, die ganze Flüssigkeit vielmehr jedesmal vier Tage lang mit stark platinirtem Zinkblech behandelt, darauf mit Wasser stark verdünnt. Es fällt jedesmal ein weisser äusserst voluminöser Niederschlag, der aber nicht die Zusammensetzung des Oxyleucinzinks hat, wie der Niederschlag, der auf gleiche Weise bei der unter B. beschriebenen Behandlung gewonnen wurde, sondern, wie die von Herrn B e r w e r t h fortgesetzte Untersuchung ausgewiesen hat, ein ausnehmend hoch oxydirter Körper ist. Ich habe die Behandlung dieser Quantität einen Monat lang fortgesetzt, wobei das Zinkblech nach vier- bis fünftägigem Gebrauch stets neu

platinirt wurde. Der Niederschlag fällt später immer reiner und weisser aus, und zuletzt ist alle organische Substanz aus der Lösung entfernt, es bleibt nichts als eine geringe Menge Bromzink übrig. Ob sich darin wesentlich Ammoniak vorfindet, ist noch nicht ermittelt.

Die Untersuchung dieser Körper ist erst kürzlich in meinem Laboratorio von Herrn Berwerth begonnen. Ich gebe deshalb über dieselben Folgendes nur als vorläufige Notiz.

Herr Berwerth hat Eiweiss, Horn und Fischbein in derselben Weise, wie es bei diesem zweiten Versuche geschehen, behandelt. Die Producte, welche diese Substanzen nach der Behandlung mit platinirtem Blei und der folgenden mit platinirtem Zink liefern, sind äusserlich alle gleich, luftbeständige, weisse Pulver.

Aus Eiweiss dargestellt:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $C_{21}$ | = 252 | 17,52 | 17,39 | 17,57 |
| $H_{33}$ | = 33 | 2,30 | 2,11 | 2,35 |
| Br | = 80 | 5,56 | 5,12 | 5,62 |
| $N_3$ | = 42 | 2,92 | 3,33 | 2,35 |
| $Zn_7$ | = 455 | 31,63 | 31,78 | 31,90 |
| $O_{36}$ | = 576 | 40,07 | 40,27 | 40,21 |
| | 1357 | 100,00 | 100,00 | 100,00 |

Vergleicht man diese Zusammensetzung mit der des vorstehenden Bleisalzes = $C_{22}H_{28}Br_6N_8Pb_2O_{18}$ und nimmt man an, beide Substanzen hätten in völlig reinem Zustande einen gleichen Gehalt an Kohlenstoff, und denkt sich im Bleisalz das Blei durch Zink substituirt, so ist

$$C_{22}H_{28}Br_6N_8Zn_2O_{18}$$
$$-\ C_{22}H_{33}Br\ N_3Zn_7O_{36}$$

die Differenz $-\ H_5 + Br_5 + N_5 - Zn_5 - O_{18}$.

Das Bleisalz war vor der Behandlung mit platinirtem Zink durch Alkohol gefällt. Man erkennt, dass bis dahin die Eiweisssubstanz viel höher bromirt ist, und wie das platinirte Zink nachher Brom herausnimmt und durch gleiche Aequivalente Wasserstoff ersetzt. Denn die Atome $(H_{28} + Br_6) = 34$ stimmen in der Summe überein mit $(H_{33} + Br) = 34$ Atomen. Mit der weiteren Einwirkung des platinirten Zinks aber treten noch

5 At. Stickstoff aus und 5 At. Zink dafür ein, während die Anzahl der Sauerstoffatome auf das Doppelte getrieben ist. Diese Oxydation, durch platinirtes Zink, ist gewiss sehr merkwürdig, weil man in Rücksicht auf alle Erfahrung erwarten müsste, dass hierbei reducirte Verbindungen erhalten werden.

Es kommt bei diesen und den folgenden Körpern darauf an, ob es in Zukunft gelingt, dieselben in verschiedene Producte zu zerlegen, indem man die Niederschläge, welche das platinirte Zink nach und nach liefert, nicht vereinigt, dieselben vielmehr nach jedesmal viertägiger Behandlung der Lösung mit dem Zink für sich sammelt und analysirt. Aller Wahrscheinlichkeit nach sind alle die bis jetzt zur Orientirung analysirten Körper Gemenge.

Die aus Horn dargestellte Zinkverbindung hat folgende Zahlen bei der Analyse gegeben, die sich augenblicklich auch noch nicht deuten lassen. Die Analysen von Herrn Berwerth haben dafür ergeben:

| | Berechnet. | Gefunden. | Gefunden. | Gefunden. |
|---|---|---|---|---|
| $C_{18}$ = 216 | 13,58 | 13,10 | 13,66 | 13,44 |
| $H_{42}$ = 42 | 2,64 | 2,77 | 2,65 | 2,84 |
| Br = 80 | 5,00 | 5,72 | 5,02 | 5,64 |
| $N_3$ = 42 | 2,64 | 2,80 | 2,80 | — |
| $Zn_{10}$ = 650 | 40,88 | 40,36 | 40,47 | 40,58 |
| $O_{35}$ = 560 | 35,26 | 35,25 | 35,40 | |
| 1590 | 100,00 | 100,00 | 100,00 | |

Die aus Fischbein dargestellte Zinkverbindung hat zwar eine andere Zusammensetzung als die aus Horn erhaltene, indessen zeigen folgende Zahlen, dass die Verschiedenheit vielleicht lediglich durch Nebenumstände, mehr oder weniger energisch verlaufene Einwirkung des platinirten Bleis und Zinks, auf ein und dieselbe Substanz erfolgt sein kann. Die Analysen gaben nämlich:

| | Berechnet. | Gefunden. | Gefunden. | Gefunden. |
|---|---|---|---|---|
| $C_{18}$ = 216 | 13,91 | 13,49 | 13,82 | 13,27 |
| $H_{40}$ = 40 | 2,58 | 2,08 | 2,52 | 2,62 |
| Br = 80 | 5,15 | 5,24 | 5,11 | 5,07 |
| $N_4$ = 56 | 3,61 | 3,75 | 3,39 | — |
| $Zn_8$ = 520 | 33,50 | 34,04 | 34,09 | 34,00 |
| $O_{40}$ = 640 | 41,25 | 41,40 | 41,07 | — |
| 1552 | 100,00 | 100,00 | 100,00 | |

Wie aus der Zusammenstellung dieser Ergebnisse ersichtlich ist, sind die Producte, welche man beim Bromiren der Eiweisskörper erhält, mannichfaltig. Je nach dem Verfahren des Bromirens schon erhält man andere Spaltungsstücke. Ebendeshalb aber kann die Fortsetzung dieser Untersuchungen in Zukunft ergiebig werden. Die gebromten Körper sind viel leichter durch verschiedene Agentien angreifbar, als die natürlichen Eiweisskörper, und nach der Kenntniss der Zusammensetzung der hiermit beschriebenen Rohproducte wird es leichter sein, dieselben weiter zu spalten, bis man nach tiefer eingreifender Desorganisation auf krystallisirbare Zersetzungsproducte stösst. Diejenigen Producte, welche durch Alkalien aus diesen bromirten Rohproducten hervorgehen werden, müssen an die von Schützenberger in neuerer Zeit erhaltenen sich anschliessen lassen.

---

**O. Schlömilch,** *Ueber den verallgemeinerten Taylor'schen Satz* [1]).

Wie bekannt, hat *L. Crelle* sich s. Z. vielfach mit einer Erweiterung des *Taylor*'schen Satzes beschäftigt, bei welcher im allgemeinen Gliede der Reihe an die Stelle der Potenz eine Factorielle desselben Grades, und an die Stelle des Differentialquotienten ein Differenzenquotient derselben Ordnung zu stehen kam. Das Resultat, zu welchem *Crelle* durch wiederholte Anwendung einer identischen Gleichung gelangte, lautet folgendermassen:

$$\varphi(\zeta + h) - R_n$$
$$= \varphi(\zeta) + \frac{h}{1} \cdot \frac{\Delta \varphi(\zeta)}{\Delta \zeta} + \frac{h(h-\delta)}{1.2} \cdot \frac{\Delta^2 \varphi(\zeta)}{\Delta \zeta^2} + \dots\dots$$
$$\dots + \frac{h(h-\delta)(h-2\delta)\dots(h-\overline{n-1}\,\delta)}{1.2.3\dots\dots n} \cdot \frac{\Delta^n \varphi(\zeta)}{\Delta \zeta^n},$$

worin $\Delta\zeta = \delta$, mithin

$$\frac{\Delta^m \varphi(\zeta)}{\Delta \zeta^m} = \frac{1}{\delta^m}\Big\{(m)_0\,\varphi(\zeta + m\delta) - (m)_1\,\varphi(\zeta + \overline{m-1}\,\delta)$$
$$+ (m)_2\,\varphi(\zeta + \overline{m-2}\,\delta) - \dots\Big\}$$

ist, und $R_n$ den Rest der Reihe bezeichnet. Eine genauere Untersuchung des letzteren verursachte jedoch schon bei reellen $\zeta$ so grosse Weitläufigkeiten, dass die ganze Speculation nie recht in Aufnahme gekommen und jetzt so gut wie verschollen ist. Unter diesen Umständen gewährt es vielleicht einiges Interesse, wenn ich im Folgenden zeige, dass die *Crelle*'sche Gleichung in zwei Zeilen hergeleitet werden kann und dass sich bei etwas veränderter Ansicht der Sache auch die Bedingungen angeben

---

1) Vorgetragen und zum Druck übergeben in der Sitzung vom 16. Juni 1879.

lassen, unter welchen der Rest mit unendlich wachsenden $n$ gegen die Null convergirt.

Es bezeichne $z$ eine complexe Variabele, $\varphi(z)$ eine Function, welche längs und innerhalb eines geschlossenen Contours synektisch bleibt, ferner mögen die Punkte $w$, $w+\delta$, $w+2\delta$, ... $w+m\delta$ innerhalb desselben Contours liegen; wird nun der letztere zum Integrationswege für $z$ genommen, so gelten bekanntlich die Formeln [1])

$$\int\frac{\varphi(z)}{z-w}dz = 2i\pi\varphi(w) ,$$

$$\int\frac{\varphi(z)dz}{(z-w)(z-w-\delta)(z-w-2\delta)\dots(z-w-m\delta)}$$
$$= \frac{2i\pi}{1.2\dots m}\cdot\frac{1}{\delta^m}\Big\{(m)_0\varphi(w+m\delta)-(m)_1\varphi(w+\overline{m-1}\,\delta)$$
$$+(m)_2\varphi(w+\overline{m-2}\,\delta)-\dots\Big\}$$
$$=\frac{2i\pi}{1.2\dots m}\cdot\frac{\Delta^m\varphi(w)}{\Delta w^m}, \qquad (\Delta w=\delta).$$

Andererseits kennt man die identische Gleichung

$$\frac{\alpha}{\alpha-\beta}\left\{1-\frac{\beta(\beta-1)(\beta-2)\dots(\beta-n)}{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n)}\right\}$$
$$=1+\frac{\beta}{\alpha-1}+\frac{\beta(\beta-1)}{(\alpha-1)(\alpha-2)}+\frac{\beta(\beta-1)(\beta-2)}{(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)}+\dots$$
$$\dots\dots+\frac{\beta(\beta-1)(\beta-2)\dots(\beta-\overline{n-1})}{(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)\dots(\alpha-n)};$$

setzt man in dieser $\alpha=\frac{h}{\delta}$; $\beta=\frac{z-\zeta}{\delta}$, multiplicirt beiderseits mit

$$\frac{1}{2i\pi}\cdot\frac{\varphi(z)}{z-\zeta}dz$$

und integrirt nach den vorigen Formeln, so gelangt man unmittelbar zu dem *Crelle*'schen Resultate. Dabei ist

$$R_n=\frac{1}{2i\pi}\int\frac{h(h-\delta)(h-2\delta)\dots(h-n\delta)}{(z-\zeta)(z-\zeta-\delta)\dots(z-\zeta-n\delta)}\cdot\frac{\varphi(z)dz}{z-(\zeta+h)};$$

---

1) Das erste Integral rührt von *Cauchy* her; das zweite ist zuerst vom Verf. entwickelt worden im Comp. d. höh. Anal., Bd. II, S. 72.

der Integrationsweg muss so gewählt werden, dass er die Punkte $\zeta + h, \zeta, \zeta, + \delta, \zeta + 2\delta, \ldots \zeta + n\delta$ umschliesst.

Nimmt man $\zeta = 0$, $\delta = 1$, schreibt $w$ für $h$, $F$ statt $\varphi$ und setzt zur Abkürzung

$$1) \quad \lambda_m = \frac{(m)_0 F(m) - (m)_1 F(m-1) + (m)_2 F(m-2) - \ldots}{1.2..3....m},$$

so wird

$$2) \qquad F(w) - R_n$$
$$= \lambda + \lambda_1 w + \lambda_2 w(w-1) + \lambda_3 w(w-1)(w-2) + \ldots$$
$$\ldots + \lambda_n w(w-1)(w-2)\ldots(w-n-1),$$

$$3) \qquad R_n = \frac{1}{2i\pi}\int \frac{w(w-1)(w-2)\ldots(w-n)}{z(z-1)(z-2)\ldots(z-n)} \cdot \frac{F(z)dz}{z-w},$$

wobei die Punkte $w$, 0, 1, 2, ... $n$ innerhalb des Integrationscontours liegen müssen. Diese Formeln sind weit einfacher als die vorigen, aber gleichwohl nicht specieller; setzt man nämlich zuerst $F(w) = f(w + \gamma)$, dann $w = \frac{h}{\delta}$, $\gamma = \frac{\zeta}{\delta}$ und schliesslich $f(z) = \varphi(z\delta)$, so kommt man auf die ursprünglichen Gleichungen zurück.

Bei unendlich wachsenden $n$ macht es sich wegen der Punkte 1, 2, ... $n$ erforderlich, den Integrationsweg mindestens in der Richtung der $x$ unendlich zu erweitern; hierdurch entsteht eine gewisse Unbestimmtheit, welche man am besten dadurch vermeidet, dass man von Hause aus die Formeln auf einen unendlichen Integrationsweg einrichtet. Diess lässt sich durch folgende, von dem Vorigen ganz unabhängige Betrachtung erreichen.

Die Function $f(z)$ bleibe synektisch innerhalb eines, aus dem Coordinatenanfange mit dem Radius $r$ beschriebenen Halbkreises, dessen Durchmesser auf der $y$-Achse von $-ir$ bis $= +ir$ reicht; innerhalb dieses Halbkreises liege der Punkt $c = a + ib$, für welchen hiernach $a > 0$ und $\sqrt{a^2 + b^2} < r$ ist; der Werth des Integrales

$$\int \frac{f(z)}{c-z}\, dz,$$

worin $c$ einen Ausnahmepunkt bildet, bleibt dann derselbe, wenn einerseits jener Halbkreis nebst seinem Durchmesser als

Integrationsweg genommen, und wenn anderseits der Punkt $c$ in einem ganzen Kreise von hinreichend kleinem Halbmesser $\varrho$ umgangen wird. Mittelst bekannter Substitutionen ist demzufolge

$$i\int_{-r}^{+r}\frac{f(iy)}{c-iy}dy - i\int_{-\frac{1}{2}\pi}^{+\frac{1}{2}\pi}\frac{f(re^{i\theta})}{c-re^{i\theta}}re^{i\theta}d\theta = i\int_{0}^{2\pi}f(c-\varrho e^{-i\vartheta})d\vartheta \;;$$

für $\varrho = 0$, $r = \infty$ und unter der Voraussetzung, dass $f(re^{i\theta})$ bei unendlich wachsenden $r$ und für $-\frac{1}{2}\pi \leqq \theta \leqq +\frac{1}{2}\pi$ verschwindet, ergiebt sich die Formel

$$4)\qquad \int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(iy)}{c-iy}dy = 2\pi f(c)\;, \qquad a > 0\;,$$

von welcher der Specialfall $b = 0$ längst bekannt ist. Für $a = 0$ gilt diese Formel nicht, weil dann der kritische Punkt auf den Integrationsweg zu liegen kommt; umgeht man in diesem Falle den Punkt $ib$ mittelst eines Halbkreises vom Radius $\varrho$, so erhält man

$$\int_{-r}^{b-\varrho}\frac{f(iy)}{b-y}dy - i\int_{-\frac{1}{2}\pi}^{+\frac{1}{2}\pi}f(ib+\varrho e^{i\vartheta})d\vartheta + \int_{b+\varrho}^{+r}\frac{f(iy)}{b-y}dy$$
$$- i\int_{-\frac{1}{2}\pi}^{+\frac{1}{2}\pi}\frac{f(re^{i\theta})}{c-re^{i\theta}}re^{i\theta}d\theta = 0\;,$$

und daraus wird für verschwindende $\varrho$ und $r = \infty$

$$\text{Lim}\left\{\int_{-\infty}^{b-\varrho}\frac{f(iy)}{b-y}dy + \int_{b+\varrho}^{+\infty}\frac{f(iy)}{b-y}dy\right\} = i\pi f(ib)\;.$$

Statt dessen kann man entweder schreiben

$$\text{Hauptwerth von}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(iy)}{b-y}dy = i\pi f(ib)\;,$$

oder auch, wenn im ersten Integrale $b - y = t$, im zweiten $y - b = t$ gesetzt wird,

$$5) \qquad \int_0^\infty \frac{f[i(b-t)] - f[i(b+t)]}{t}\, dt = i\pi f(ib) \ .$$

Ist endlich $a < 0$, so verschwindet das in Nr. 4 verzeichnete Integral, weil dann der kritische Punkt ausserhalb des Integrationsweges liegt.

Nach diesen Vorbereitungen betrachten wir das Integral

$$6) \qquad f(w) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(iy)}{w - iy} dy \ ,$$

worin $w = u + iv$ und $u > 0$ sein möge. Zur Entwickelung desselben benutzen wir die identische Gleichung

$$7) \qquad \frac{1}{\zeta - \gamma} - \frac{1}{\zeta - \gamma} \cdot \frac{\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)\ldots(\gamma+n-1)}{\zeta(\zeta+1)(\zeta+2)\ldots(\zeta+n-1)}$$

$$= \frac{1}{\zeta} + \frac{\gamma}{\zeta(\zeta+1)} + \frac{\gamma(\gamma+1)}{\zeta(\zeta+1)(\zeta+2)} + \ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots + \frac{\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)\ldots(\gamma+n-2)}{\zeta(\zeta+1)(\zeta+2)\ldots(\zeta+n-1)} \ ,$$

die auch für $n = \infty$ gilt, wenn der reelle Theil von $\zeta$, vermindert um den reellen Theil von $\gamma$, einen positiven, die Null übersteigenden Rest giebt, während die imaginären Bestandtheile von $\zeta$ und $\gamma$ willkührlich bleiben [1]. Diesen Bedingungen genügt die Substitution

$$\zeta = 1 - iy \ , \qquad \gamma = 1 - w \ ,$$

wonach aus Nr. 7 wird

$$\frac{1}{w - iy} - \frac{1}{w - iy} \cdot \frac{(1-w)(2-w)\ldots(n-w)}{(1-iy)(2-iy)\ldots(n-iy)}$$

$$= \frac{1}{1-iy} + \frac{1-w}{(1-iy)(2-iy)} + \frac{(1-w)(2-w)}{(1-iy)(2-iy)(3-iy)} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{(1-w)(2-w)\ldots(n-1-w)}{(1-iy)(2-iy)\ldots(n-iy)} \ ;$$

---

1) Sitzungsbericht vom 1. Novbr. 1863, S. 59.

multiplicirt man die vorstehende Gleichung mit

$$\frac{1}{2\pi}f(iy)dy \quad ,$$

integrirt von $y = -\infty$ bis $y = +\infty$ und benutzt die Abkürzungen

$$8) \quad R_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(1-w)(2-w)\dots(n-w)}{(1-iy)(2-iy)\dots(n-iy)}\cdot\frac{f(iy)}{w-iy}dy \ ,$$

$$9) \quad K_m = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(iy)dy}{(1-iy)(2-iy)\dots(m+1-iy)} \ ,$$

so gelangt man zu folgendem Resultate

$$10) \qquad f(w) - R_n$$
$$= K_0 + K_1(1-w) + K_2(1-w)(2-w) + \dots$$
$$\dots + K_{n-1}(1-w)(2-w)\dots(n-1-w) \ .$$

Der Werth von $K_m$ findet sich leicht, wenn man die bekannte Gleichung

$$\frac{1}{t(t+1)(t+2)\dots(t+m)}$$
$$= \frac{1}{1.2\dots m}\left\{\frac{(m)_0}{t} - \frac{(m)_1}{t+1} + \frac{(m)_2}{t+2} - \dots\right\}$$

für $t = 1 - iy$ benutzt und die einzelnen Glieder nach Nr. 4 integrirt; dies giebt

$$K_m = \frac{1}{1.2\dots m}\left\{(m)_0 f(1) - (m)_1 f(2) + (m)_2 f(3) - \dots\right\}$$
$$= \frac{(-1)^m}{1.2\dots m}\left\{(m)_0 f(m+1) - (m)_1 f(m) + \dots\right\} \ .$$

Führt man die Abkürzung ein

$$11) \qquad \varkappa_m = \frac{(m)_0 f(m+1) - (m)_1 f(m) + (m)_2 f(m-1) - \dots}{1.2.3\dots m} \ ,$$

so wird $K_m = (-1)^m \varkappa_m$, und die Gleichung 10 gestattet dann folgende Schreibweise

$$12)\qquad f(w) - R_n$$
$$= \varkappa_0 + \varkappa_1(w-1) + \varkappa_2(w-1)(w-2) + \dots\dots$$
$$\dots + \varkappa_{n-1}(w-1)(w-2)\dots(w-\overline{n-1}) \;.$$

Bei unendlich wachsenden $n$ ist nach den gemachten Voraussetzungen

$$\text{Lim}\,\frac{(1-w)(2-w)\dots(n-w)}{(1-iy)(2-iy)\dots(n-iy)} = 0\;,$$

mithin Lim $R_n = 0$, und die Gleichung 12 wird

$$13)\quad f(w) = \varkappa_0 + \varkappa_1(w-1) + \varkappa_2(w-1)(w-2) + \dots\dots$$

Um schliesslich diejenige Reihenentwickelung zu erhalten, welche der Gleichung 2 für $n=\infty$ entspricht, bedarf es nur der Substitution

$$f(w) = \frac{F(w)-F(0)}{w}\;;$$

wie leicht zu sehen ist, wird dann

$$\varkappa_m = \frac{(m+1)_0 F(m+1) - (m+1)_1 F(m) + (m+1)_2 F(m-1) - \dots}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,\dots\,.\,(m+1)}$$

oder $\varkappa_{m-1} = \lambda_m$, wenn wie in Nr. 1

$$14)\quad \lambda_m = \frac{(m)_0 F(m) - (m)_1 F(m-1) + (m)_2 F(m-2) - \dots}{1\,.\,2\,.\,3\,\dots\,m}$$

ist; das Endresultat lautet hiernach

$$15)\; F(w) = \lambda_0 + \lambda_1 w + \lambda_2 w(w-1) + \lambda_3 w(w-1)(w-2) + \dots$$

Zum Bestehen desselben gehört, dass der Quotient

$$\frac{F(u+iv)-F(0)}{u+iv}$$

für jedes $u > 0$ und beliebige $v$ synektisch bleibt und dass er für $u=\infty$ verschwindet.

Diesen Erörterungen nach kommt der verallgemeinerte Taylor'sche Satz auf die Entwickelung einer Function nach steigenden Facultäten zurück, und damit ist gleichzeitig das Seitenstück zu der früher von mir angegebenen Entwickelung nach absteigenden Facultäten gewonnen.

**A. Mayer**, *Ueber die relative Bewegung eines Systems materieller Puncte um den Schwerpunct.* *)

Die vorliegende Note will in der Hauptsache nur auf eine wichtige Form aufmerksam machen, die man dem *Hamilton*schen Principe für alle diejenigen Probleme aus der Dynamik eines Systems materieller Puncte geben kann, bei denen die absolute Bewegung bekannt ist, sobald man die relative Bewegung um den Schwerpunct kennt.

Der Vortheil dieser Modification des *Hamilton*'schen Princips besteht darin, dass sie die Anzahl der unabhängigen Bestimmungsstücke des Systems von vornherein um drei Einheiten zu erniedrigen gestattet, ohne doch hierdurch die canonische Form der Differentialgleichungen zu zerstören; daher man durch Verbindung des Satzes mit einem bekannten Theorem der *Jacobi*'schen Nova methodus für jedes Problem der Dynamik, auf das er anwendbar ist, sofort zu entscheiden vermag, wie weit man die Aufgabe führen kann, ohne von derselben andere Integrale zu kennen, als diejenigen, welche die allgemeinen Principien liefern. Aus demselben Grunde enthält er auch als speciellen Fall die *Jacobi*'sche Reduction der *Hamilton*'schen partiellen Differentialgleichung für diejenigen Probleme, in welchen das Princip der Erhaltung des Schwerpunctes gilt.

Der Satz ist übrigens insofern nicht eigentlich neu, als in dem speciellen Falle des Problems der drei Körper bereits *Jacobi*[1]) ihn zur Reduction des Problems benutzt hat, ohne denselben jedoch als besondern Satz irgendwie hervorzuheben. Und gewiss werden auch Andere den Satz bemerkt haben,

---

*) Vorgetragen in der Sitzung vom 16. Juni; zum Druck übergeben am 8. Juli 1879.

1) *Crelle*'s J. 26, p. 118.

denn er liegt sozusagen auf der Hand; soviel ich weiss, ist er aber bisher noch nirgends ausgesprochen oder bewiesen worden. —

Wenn auf ein System von $n$ materiellen Puncten mit den Massen $m_1, m_2, \ldots m_n$, in dessen Bedingungsgleichungen nur die relativen Coordinaten der Puncte eingehen, keine äussere Kraft oder nur die Schwere wirkt, so kennt man die absolute Bewegung des Schwerpunctes und braucht nur noch die relative Bewegung des Systems um den Schwerpunct zu bestimmen. Bezogen auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem $\xi\,\eta\,\zeta$ von festen Axenrichtungen, dessen Anfangspunct der Schwerpunct ist, hat man für diese relative Bewegung die $3n$ Differentialgleichungen:

$$1)\quad \begin{cases} m_i \xi_i'' = \dfrac{\partial U}{\partial \xi_i} + \sum\limits_{\varrho=1}^{\varrho=r} \lambda_\varrho \dfrac{\partial \varphi_\varrho}{\partial \xi_i}, \\ m_i \eta_i'' = \dfrac{\partial U}{\partial \eta_i} + \sum\limits_{\varrho=1}^{\varrho=r} \lambda_\varrho \dfrac{\partial \varphi_\varrho}{\partial \eta_i}, \\ m_i \zeta_i'' = \dfrac{\partial U}{\partial \zeta_i} + \sum\limits_{\varrho=1}^{\varrho=r} \lambda_\varrho \dfrac{\partial \varphi_\varrho}{\partial \zeta_i}, \end{cases}$$

in denen $U$ die Kräftefunction der inneren Kräfte des Systems un

$$2)\quad \varphi_1 = 0, \quad \varphi_2 = 0, \ldots \varphi_r = 0$$

seine Bedingungsgleichungen bezeichnen.

Zu diesen $3n + r$ Gleichungen treten überdies noch die drei hinzu:

$$3)\quad \sum_{i=1}^{i=n} m_i \xi_i = 0, \quad \sum_{i=1}^{i=n} m_i \eta_i = 0, \quad \sum_{i=1}^{i=n} m_i \zeta_i = 0,$$

welche nur das Zusammenfallen des Coordinatenanfangs mit dem Schwerpuncte ausdrücken und particuläre Integrale des Systems 1) sind.

Abgesehen von den letzten drei Gleichungen sind die Gleichungen 1) die Differentialgleichungen des *Hamilton*'schen Problems, unter Berücksichtigung der vorgeschriebenen Bedingungsgleichungen 2) die erste Variation des Integrales

$$4)\quad \int_{t_0}^{t_1} (T + U)\, dt$$

zum Verschwinden zu bringen, wo

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{i=n} m_i (\xi_i'^2 + \eta_i'^2 + \zeta_i'^2)$$

die relative lebendige Kraft des Systems um seinen Schwerpunct bezeichnet.

Modificirt man nun dieses Problem dadurch, dass man ihm von vornherein nicht nur die Gleichungen 4), sondern gleichzeitig auch die Gleichungen 3) als Bedingungsgleichungen vorschreibt, so erhält man zunächst zwar an Stelle der Gleichungen 4) andere Differentialgleichungen, nämlich die folgenden:

$$5) \quad \begin{cases} m_i \xi_i'' = \dfrac{\partial U}{\partial \xi_i} + \sum\limits_{\rho=1}^{\rho=r} \lambda_\rho \dfrac{\partial \varphi_\rho}{\partial \xi_i} + \lambda m_i , \\ m_i \eta_i'' = \dfrac{\partial U}{\partial \eta_i} + \sum\limits_{\rho=1}^{\rho=r} \lambda_\rho \dfrac{\partial \varphi_\rho}{\partial \eta_i} + \mu m_i , \\ m_i \zeta_i'' = \dfrac{\partial U}{\partial \zeta_i} + \sum\limits_{\rho=1}^{\rho=r} \lambda_\rho \dfrac{\partial \varphi_\rho}{\partial \zeta_i} + \nu m_i . \end{cases}$$

Wegen der zu Grunde gelegten Annahmen sind aber $U$, $\varphi_1$, $\varphi_2, \ldots \varphi_r$ gemeinsame Lösungen der drei partiellen Differentialgleichungen:

$$\sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi_i} = 0 , \quad \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial \varphi}{\partial \eta_i} = 0 , \quad \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial \varphi}{\partial \zeta_i} = 0 .$$

Addirt man daher von den Gleichungen 5) je die $n$ auf dieselbe Axe sich beziehenden, und berücksichtigt die aus 3) durch zweimalige Differentiation nach $t$ entspringenden Bedingungsgleichungen:

$$\sum_{i=1}^{i=n} m_i \xi_i'' = 0 , \quad \sum_{i=1}^{i=n} m_i \eta_i'' = 0 , \quad \sum_{i=1}^{i=n} m_i \zeta_i'' = 0 ,$$

so erhält man für die Multiplicatoren $\lambda$, $\mu$, $\nu$ den Werth

$$\lambda = \mu = \nu = 0 . ^{1)}$$

---

1) Man leitet die Differentialgleichungen der relativen Bewegung um den Schwerpunct gewöhnlich aus der symbolischen Fundamentalgleichung der Dynamik

$$\sum_{i=1}^{i=n} \left\{ (X_i - m_i x_i'') \delta x_i + (Y_i - m_i y_i'') \delta y_i + (Z_i - m_i z_i'') \delta z_i \right\} = 0$$

Hierdurch verwandeln sich die Gleichungen 5) wieder in die ursprünglichen Gleichungen 1). Das *Hamilton*'sche Princip

$$\delta\int_{t_0}^{t_1}(T+U)\,dt=0$$

ändert also seine Differentialgleichungen nicht, wenn man ihm die Gleichungen 3) als vorgeschriebene Bedingungsgleichungen hinzufügt, oder man kann für die relative Bewegung um den Schwerpunct diesem Principe die Fassung geben:

I. Wenn auf ein System materieller Puncte, das wie ein freier starrer Körper parallel mit sich selbst verschoben werden kann und dessen Positionen zu einer gegebenen Anfangszeit $t_0$ und zu einer gegebenen Endzeit $t_1$ gegeben sind, innere Kräfte von der Kräftefunction $U$ wirken, so bestimmt sich — und zwar gleichgültig, ob nur innere Kräfte wirken, oder ob zu diesen als äussere Kraft noch die Schwere hinzutritt — die relative Bewegung des Systems um seinen Schwerpunct aus der Bedingung, dass, mit Rücksicht nicht nur auf die gegebenen Bedingungsgleichungen des Systems, sondern auch auf die drei Bedingungsgleichungen 3),

$$\delta\int_{t_0}^{t_1}(T+U)\,dt=0$$

---

dadurch ab, dass man für die absoluten Coordinaten $x_i y_i z_i$ der Puncte des Systems setzt:

$$x_i=A+\xi_i\,,\quad y_i=B+\eta_i\,,\quad z_i=C+\zeta_i$$

und dabei, während man die Schwerpunctscoordinaten $A$, $B$, $C$ als gegebene Functionen der Zeit ansieht, die Gleichungen 3) ganz ausser Acht lässt. Dass man auf diese Weise zu richtigen Gleichungen kommt, rührt lediglich davon her, dass auch hier die durch die Bedingungsgleichungen 3) eingeführten Multiplicatoren den Werth Null erhalten. Man würde dagegen zu falschen Gleichungen gelangen, wenn man in derselben Weise die Differentialgleichungen der relativen Bewegung um den Schwerpunct unter Vernachlässigung der Bedingungsgleichungen 3) aus der zweiten *Lagrange*-schen Form der dynamischen Differentialgleichungen ableiten wollte, weil dann, sobald nicht bloss innere Kräfte wirken, jene Multiplicatoren nicht mehr verschwinden.

werden muss, wo

$$T = \tfrac{1}{2} \sum_{i=1}^{i=n} m_i (\xi_i'^2 + \eta_i'^2 + \zeta_i'^2)$$

die relative lebendige Kraft des Systems um den Schwerpunct bezeichnet.

Man kann also, um die Bewegung des Systems zu bestimmen, z. B. so verfahren, dass man mit Hülfe der Gleichungen 3) die Coordinaten eines der $n$ Puncte aus dem Integrale 4) ganz eliminirt und dann diejenigen Differentialgleichungen zu integriren sucht, welche aus der Forderung entspringen, dass die erste Variation des transformirten Integrales verschwinden soll. Und die ohne Schwierigkeit nachweisbare Aequivalenz der letzteren Differentialgleichungen mit denen, die durch dieselbe Elimination direct aus den Gleichungen 1) hervorgehen, liefert einen zweiten, nur etwas umständlicheren Beweis des Satzes.

Der wahre Vortheil, der sich aus diesem Satze ziehen lässt, tritt aber erst dann zu Tage, wenn man ihn mit der bekannten *Jacobi*'schen Zurückführung der Differentialgleichungen des *Hamilton*'schen Princips auf die *Hamilton*'sche partielle Differentialgleichung in Verbindung bringt. Beschränkt man sich auf den einfachsten, aber auch wichtigsten Fall, wo für die Bewegung des betrachteten Systems mit dem obigen Satze zugleich das Princip der Erhaltung der lebendigen Kraft gilt, so erhält man aus dieser Combination sofort die folgende Regel:

II. Hat man auf irgend eine Weise die $3n$ Coordinaten $\xi_i\, \eta_i\, \zeta_i$ der Puncte des Systems durch $\mu = 3n - r - 3$ unabhängige Variable $q_1, q_2, \ldots q_\mu$ so ausgedrückt, dass seine $r$ Bedingungsgleichungen 2), sowie die drei Gleichungen 3) identisch erfüllt werden, und hierauf die Kräftefunction $U$ durch die $q$, die relative lebendige Kraft $T$ des Systems um den Schwerpunct durch die $q$ und ihre Differentialquotienten $q'$ ausgedrückt, so hängt die Bestimmung der Bewegung des Systems nur noch ab von der vollständigen Integration derjenigen partiellen Differentialgleichung erster Ordnung

$$6) \quad f = h',$$

in welche das Integral der lebendigen Kraft

$$T - U = h'$$

übergeht, wenn man die Differentialquotienten $q_1'$, $q_2'$, ... $q_\mu'$ mit Hülfe der $\mu$ Gleichungen

$$7) \quad \frac{\partial T}{\partial q_i'} = \frac{\partial W}{\partial q_i} \equiv p_i$$

aus ihm eliminirt.

Betrachtet man z. B. ein System freier materieller Puncte, deren Coordinaten $\xi_i \eta_i \zeta_i$ also nur den Bedingungsgleichungen 3) unterworfen sind, und erfüllt man diese Gleichungen durch die $3n$ Substitutionen:

$$\xi_i = u_i + \xi_n, \quad \eta_i = v_i + \eta_n, \quad \zeta_i = w_i + \zeta_n,$$

$$\xi_n = -\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{i=n-1} m_i u_i, \qquad \eta_n = -\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{i=n-1} m_i v_i;$$

$$\zeta_n = -\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{i=n-1} m_i w_i,$$

in denen $M = m_1 + m_2 + \ldots + m_n$ ist, so erhält man:

$$2T = \sum_{i=1}^{i=n-1} m_i (u_i'^2 + v_i'^2 + w_i'^2) - \frac{1}{M}\left\{\left(\sum m_i u_i'\right)^2 + \right.$$

$$\left. + \left(\sum m_i v_i'\right)^2 + \left(\sum m_i w_i'\right)^2\right\}.$$

Aus den $3n$ Substitutionen:

$$\frac{\partial T}{\partial u_i'} = \frac{\partial W}{\partial u_i}, \; \ldots .$$

folgt daher:

$$u_i' = \frac{1}{m_i}\frac{\partial W}{\partial u_i} + \frac{1}{m_n}\sum_{h=1}^{h=n-1}\frac{\partial W}{\partial u_h}, \; \ldots .$$

und indem man diese Werthe in die Gleichung der lebendigen Kraft:

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{i=n-1}\left(u_i'\frac{\partial T}{\partial u_i'} + v_i'\frac{\partial T}{\partial v_i'} + w_i'\frac{\partial T}{\partial w_i'}\right) = U + h'$$

einsetzt, erkennt man, dass die Bestimmung eines Systems von $n$ freien materiellen Puncten, auf welches keine äussere Kraft ausser etwa die Schwere wirkt, sich zurückführen lässt auf die vollständige Integration der partiellen Differentialgleichung mit $3n-3$ unabhängigen Variabeln:

$$\sum_{i=1}^{i=n-1} \frac{1}{2m_i}\left\{\left(\frac{\partial W}{\partial u_i}\right)^2+\left(\frac{\partial W}{\partial v_i}\right)^2+\left(\frac{\partial W}{\partial w_i}\right)^2\right\}$$
$$+\frac{1}{2m_n}\left\{\left(\sum\frac{\partial W}{\partial u_i}\right)^2+\left(\sum\frac{\partial W}{\partial v_i}\right)^2+\left(\sum\frac{\partial W}{\partial w_i}\right)^2\right\}$$
$$=U+h'.$$

Das ist aber eben das Resultat, welches *Jacobi* in der 23. Vorlesung über Dynamik durch directe Reduction der *Hamilton*'schen partiellen Differentialgleichung der absoluten Bewegung auf weit umständlicherem Wege abgeleitet hat.

Nimmt man ferner an, dass die $r$ Bedingungsgleichungen des Systems nur die gegenseitigen Entfernungen der Puncte enthalten, so gelten — immer unter den früheren Annahmen — für die relative Bewegung um den Schwerpunct die drei Flächensätze, die, ausgedrückt in den $q$ und $q'$, durch die Gleichungen:

$$F=\text{const.},\quad \Phi=\text{const.},\quad \Psi=\text{const.}$$

repräsentirt werden mögen.

Nennt man nun $H_1$ und $H_2$ diejenigen Functionen von $q_1, \ldots q_\mu, p_1, \ldots p_\mu$, in welche die Ausdrücke:

$$F \text{ und } \Phi\Phi+\Psi\Psi$$
$$(\text{oder } F \text{ und } FF+\Phi\Phi+\Psi\Psi)$$

übergehen, wenn man die $q'$ vermittelst der Gleichungen 7) aus ihnen eliminirt, so hat *Jacobi* (Nova methodus §§ 64, 65) gezeigt, dass die drei partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung:

$$8)\quad f=h',\quad H_1=h_1',\quad H_2=h_2'$$

ein Involutionssystem bilden, d. h., dass identisch ist

$$[fH_1]\equiv[fH_2]\equiv[H_1H_2]\equiv 0.$$

Unter den eingeführten Voraussetzungen hängt daher die vollständige Integration der partiellen Differentialgleichung 6) nur noch ab von der Auffindung einer gemeinsamen vollständigen Lösung der drei partiellen Differentialgleichungen 8). Diese letztere Aufgabe lässt sich aber ihrerseits nach der *Lie*'schen oder

nach meiner Methode [1]) zurückführen auf die vollständige Integration einer einzigen partiellen Differentialgleichung erster Ordnung mit nur noch $\mu-2$ unabhängigen Variabeln, oder auf die Ermittelung je eines Integrales von

$$2(\mu-3),\ 2(\mu-4),\ \ldots\ 4,\ 2$$

canonischen gewöhnlichen Differentialgleichungen und blosse Quadraturen.

Nennt man daher nach *Lie*'s Vorgange die Auffindung eines Integrales von einem System von $m$ gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung kurzweg eine Operation $m$, so kann man sagen:

III. Um die Bestimmung der Bewegung eines Systems von $n$ materiellen Puncten, das durch $r$ Bedingungsgleichungen definirt ist, auf blosse Quadraturen zurückführen zu können, bedarf es, so oft für die relative Bewegung des Systems um seinen Schwerpunct das Princip der Erhaltung der lebendigen Kraft und die drei Flächensätze gelten, nur noch der Operationen:

$$2(3n-r-6),\ 2(3n-r-8),\ \ldots\ 4,\ 2.$$

Aus diesem Satze, der gewissermassen eine Weiterführung des *Jacobi*'schen Satzes Nova methodus § 65 ist, ergiebt sich unmittelbar durch die Annahme $r=3n-6$ das bekannte Resultat, dass die Bewegung eines freien starren Körpers, der nur von der Schwere sollicitirt wird, vermöge blosser Quadraturen bestimmt werden kann.

Setzt man ferner $r=0$, $n=3$, so folgt, dass die vollständige Lösung des Problems der drei Körper, wie man auch die 9 in Bezug auf den Schwerpunct als Anfangspunct genommenen Coordinaten der drei Puncte durch 6 unabhängige Variable ausdrücken mag, immer nur noch die Operationen 6, 4, 2 erfordert.

Betrachtet man endlich die Bewegung dreier schwerer Puncte, von denen zwei mit dem dritten durch starre Gerade verbunden sind [2]), so hat man hier $r=2$, $n=3$; es ist also

1) Math. Annalen V. p. 448, VI. p. 162, VIII. p. 313.

2) Auf dieses Problem kam ich, indem ich nach einfachen Beispielen für die *Ostrogradsky*'sche Theorie der Bewegung eines durch Bedingungs-

zur Bestimmung der Bewegung noch eine Operation 2 nöthig und man kann das Problem ohne Ausführung dieser Operation oder ohne Auffindung eines neuen Integrales seiner Differentialgleichungen nicht lösen.

Dagegen ist dasselbe Problem vollständig lösbar in dem einfachsten Falle, wo die Bewegung der drei schweren Puncte in einer Verticalebene vor sich geht, und auch dies ergiebt sich sofort aus dem Satze II., wenn man ihn mit dem bekannten *Jacobi*schen Satze verbindet, dass sich jedes Problem der Mechanik, welches nur zwei Bestimmungsstücke enthält und für welches ausser dem Integrale der lebendigen Kraft noch ein zweites, von $t$ freies, Integral bekannt ist, auf Quadraturen zurückführen lässt[1].

Nimmt man nämlich diejenige Verticalebene, in der nach Voraussetzung die drei Puncte $m$, $m_1$, $m_2$ bleiben, zur $\xi\eta$-Ebene und nennt $l_1$ und $l_2$ die unveränderlichen Entfernungen des Punctes $m$ von den Puncten $m_1$ und $m_2$, so hat man zwischen den 6 Coordinaten der drei Puncte die 4 Bedingungsgleichungen:

$$\text{A)} \quad \begin{cases} (\xi_1-\xi)^2+(\eta_1-\eta)^2=l_1^2, \\ (\xi_2-\xi)^2+(\eta_2-\eta)^2=l_2^2, \end{cases}$$

$$\text{B)} \quad \begin{cases} m\xi+m_1\xi_1+m_2\xi_2=0, \\ m\eta+m_1\eta_1+m_2\eta_2=0. \end{cases}$$

Es bleiben also von den 6 Coordinaten nur 2 willkürlich. Ueberdies gilt für die relative Bewegung der drei Puncte um ihren Schwerpunct das Integral der lebendigen Kraft und der Flächen-

ungleichungen beschränkten Systems materieller Puncte suchte. Hier bietet sich am natürlichsten die Verbindung der Puncte durch unausdehnbare Fäden und als einfachste Kraft die Schwere dar. Bei zwei schweren Puncten, die durch einen solchen Faden verbunden sind, gestalten sich die Verhältnisse ungemein einfach. Sobald die Anfangsgeschwindigkeiten der beiden Puncte nicht genau dieselben sind, tritt stets nach einer gewissen Zeit Spannung des Fadens ein und von diesem Momente an bleibt der Faden während der ganzen Bewegung gespannt. Das nächstliegende Problem ist nun das der Bewegung dreier schwerer Puncte, von denen zwei mit dem dritten durch unausdehnbare Fäden verbunden sind. Um aber dies Problem zu lösen, müsste man zuerst die Bewegung der drei Puncte unter der Voraussetzung bestimmt haben, dass die beiden Verbindungsfäden durch starre Gerade ersetzt worden seien.

1) Dynamik p. 174.

satz. Man befindet sich also in dem Falle des *Jacobi*'schen Satzes und das Problem ist lösbar.

Die wirkliche Zurückführung des Problems auf Quadraturen geschieht wohl am einfachsten direct durch Satz I. auf folgende Weise.

Erfüllt man die Bedingungen A) durch die Substitutionen:

$$\xi_1 = \xi + l_1 \cos \varphi_1, \quad \eta_1 = \eta + l_1 \sin \varphi_1,$$
$$\xi_2 = \xi + l_2 \cos \varphi_2, \quad \eta_2 = \eta + l_2 \sin \varphi_2,$$

und setzt $m + m_1 + m_2 = M$, so ergeben die Gleichungen B):

$$\xi = -\frac{m_1 l_1 \cos \varphi_1 + m_2 l_2 \cos \varphi_2}{M}, \quad \eta = -\frac{m_1 l_1 \sin \varphi_1 + m_2 l_2 \sin \varphi_2}{M},$$

womit alle 6 Coordinaten durch die beiden Winkel $\varphi_1$ und $\varphi_2$ ausgedrückt sind.

Durch Substitution dieser Werthe erhält man für die relative lebendige Kraft der drei Puncte um ihren Schwerpunct den Ausdruck:

$$T = \frac{1}{2M}\left[a_1 \varphi_1'^2 - 2b \cos(\varphi_1 - \varphi_2)\varphi_1' \varphi_2' + a_2 \varphi_2'^2\right],$$

worin zur Abkürzung:

$$m_1 (m + m_2) l_1^2 = a_1,$$
$$m_1 m_2 l_1 l_2 = b,$$
$$m_2 (m + m_1) l_2^2 = a_2$$

gesetzt worden ist. Setzt man daher noch

$$\varphi_1 = \varphi_2 + \psi,$$

so kommt nach I., da nur die Schwere wirken soll, die Aufgabe zurück auf das Problem:

$$\delta \int F dt = 0,$$

wo:

$$2F = a_1 (\varphi_2' + \psi')^2 - 2b \cos\psi (\varphi_2' + \psi')\varphi_2' + a_2 \varphi_2'^2.$$

Von den Differentialgleichungen dieses Problems kann man aber sofort die beiden Integrale hinschreiben:

$$2F = \alpha^2,$$

$$\frac{\partial F}{\partial \varphi_2'} \equiv a_1 (\varphi_2 + \psi') - b \cos\psi (2\varphi_2' + \psi') + a_2 \varphi_2' = \beta,$$

die nichts anderes sind, als die Gleichung der lebendigen Kraft und der Flächensatz. Das letzte Integral liefert:

$$\text{C)}\quad \varphi_2' = \frac{\beta - (a_1 - b\cos\psi)\,\psi'}{a_1 + a_2 - 2b\cos\psi}$$

und verwandelt somit das erste Integral oder die Gleichung:

$$\varphi_2' \frac{\partial F}{\partial \varphi_2'} + \psi' \frac{\partial F}{\partial \psi'} = \alpha^2$$

in:

$$\beta^2 - (a_1 - b\cos\psi)^2\,\psi'^2 + a_1(a_1 + a_2 - 2b\cos\psi)\,\psi'^2$$
$$= \alpha^2(a_1 + a_2 - 2b\cos\psi).$$

Durch Auflösung nach $\psi'^2$ folgt:

$$\psi'^2 = \frac{\alpha^2(a_1 + a_2 - 2b\cos\psi) - \beta^2}{a_1 a_2 - b^2\cos^2\psi}.$$

Also erhält man zunächst:

$$t - \tau = \int \sqrt{\frac{a_1 a_2 - b^2\cos^2\psi}{\alpha^2(a_1 + a_2 - 2b\cos\psi) - \beta^2}} \cdot d\psi,$$

und weiter nach C):

$$\varphi_2 - c_2 = -\int \frac{a_1 - b\cos\psi}{a_1 + a_2 - 2b\cos\psi} \cdot d\psi$$

$$+ \beta \int \frac{d\psi}{a_1 + a_2 - 2b\cos\psi} \sqrt{\frac{a_1 a_2 - b^2\cos^2\psi}{\alpha^2(a_1 + a_2 - 2b\cos\psi) - \beta^2}}.$$

Das Problem der Bewegung dreier schwerer Puncte, von denen zwei mit dem dritten durch starre Gerade verbunden sind, führt also schon in dem einfachsten Falle, wo die Anfangspositionen und Anfangsgeschwindigkeiten der drei Puncte in einer verticalen Ebene enthalten sind, auf hyperelliptische Integrale.

---

**W. Hankel**, *Ueber die photo- und thermoelektrischen Eigenschaften des Flussspathes.* *)

In der Sitzung vom 23. April 1877 habe ich eine kurze vorläufige Mittheilung über die von mir auf gefärbten Flussspäthen durch die Einwirkung des Lichtes erzeugten elektrischen Spannungen gemacht. Die Veranlassung zu der Entdeckung dieser photoelektrischen Erregbarkeit des Flussspathes gab mir, wie ich damals erwähnt habe, die Wahrnehmung, dass auf der Oberfläche der violblau erscheinenden Flussspathkrystalle von Weardale durch Temperaturänderungen elektrische Spannungen entstanden. Die Untersuchung der durch die Einwirkungen des Lichtes hervorgerufenen elektrischen Spannungen nahm jedoch bis zu jener Sitzung mein Interesse so vollständig in Anspruch, dass ich in der oben erwähnten Mittheilung hinzufügte, ich hätte bis dahin nicht Zeit gehabt, die infolge von Temperaturänderungen auftretenden elektrischen Spannungen ihrer Entstehung und Bedeutung nach näher zu erforschen.

Nachdem ich dann theils durch Kauf, theils durch die freundliche Unterstützung der Herren Professoren *Zirkel* und *Weisbach* eine grössere Anzahl farbiger Flussspathkrystalle erlangt, habe ich die Untersuchung von Neuem aufgenommen, und beide Erregungsweisen, sowohl die photoelektrische als auch die thermoelektrische, einer sorgfältigen und umfassenden Prüfung unterworfen.

Die Ergebnisse derselben sind in der Abhandlung [1], welche ich mich beehre heute der mathematisch-physischen Klasse vorzulegen, zusammengestellt.

In dem ersten Theile dieser Abhandlung ist das bei den

---

*) Vorgetragen in der Sitzung vom 3. März 1879.

1) Elektrische Untersuchungen. Vierzehnte Abhandlung. Ueber die photo- und thermoelektrischen Eigenschaften des Flussspathes. Bd. XX der Abhandlungen der Königl. Sächs. Ges. der Wiss., oder Bd. XII der math.-phys. Klasse. Mit drei Tafeln.

Versuchen angewandte Verfahren ausführlich erläutert, während der zweite Theil die Beobachtungen der photoelektrischen und thermoelektrischen Spannungen auf der Oberfläche von 24 Flussspathkrystallen darlegt, und zwar mit Zuhülfenahme von drei Tafeln, auf welchen die einzelnen Flächen der untersuchten Krystalle abgebildet sind. In diese Zeichnungen habe ich die an den verschiedenen Punkten der Oberfläche gemessenen Werthe der elektrischen Spannungen eingetragen und zur leichteren Uebersicht die positiven und negativen Flächenstücke durch verschiedene Farben kenntlich gemacht.

Bei diesen Untersuchungen wurden die Krystalle bis auf die zu prüfende Fläche (Kante, Ecke) in Kupferfeilicht eingesetzt und dann die freie Fläche der Bestrahlung durch das zerstreute Tageslicht, oder durch das directe Sonnenlicht, oder durch das elektrische Kohlenlicht unterworfen.

Es wurden untersucht: 1) grüne Flussspäthe von Weardale und Alston Moor; 2) im reflectirten Lichte violblau erscheinende Krystalle derselben Fundorte; 3) ein blauer Flussspath vom Churprinz bei Freiberg; 4) im reflectirten Lichte schwach bräunlich erscheinende Krystalle von Weardale; 5) ein braunweisser Flussspath aus England; 6) ein grünlichweisser Flussspath aus Cornwall; und 7) fast farblose Flussspathkrystalle von Stolberg am Harz.

Die violblau aussehenden Krystalle von Weardale und Alston Moor zeigen diese Farbe nur im reflectirten Lichte; im durchgehenden erscheinen sie grünlich, doch ist diese grünliche Färbung meistens nur schwach und geht öfter ins Grauliche über; auch wechseln bisweilen grüne Schichten mit rothen ab. Anders verhält sich der blaue Flussspath vom Churprinz; seine Substanz ist nicht durchsichtig, vielmehr meistens so trübe, dass sie fast undurchsichtig wird und nur an reineren Stellen sich durchscheinend zeigt. Das durch sie hindurch gegangene Licht erscheint hellblau, während das reflectirte eine viel dunklere blaue Nüance darbietet.

In dem dritten Theile der Abhandlung sind sodann die aus den Beobachtungen sich ergebenden allgemeinen Resultate zusammengestellt worden.

Da es nicht möglich ist, in diesem Berichte auf die Beobachtungen an den einzelnen Krystallen näher einzugehen, so beschränke ich mich auf eine Angabe der allgemeinen Resultate.

## Photoelektricität.

Die Mitten der Würfelflächen der Flussspathkrystalle werden durch die Belichtung negativ; die Intensität dieser negativen Spannungen nimmt nach den Rändern und besonders nach den Ecken hin ab; auf manchen Flächen erstreckt sich dieselbe bis zu den Rändern und Ecken.

Bei den meisten, namentlich grösseren Krystallen zeigen jedoch die Ecken und zum Theil auch die seitlichen Ränder der Flächen die entgegengesetzte, also positive Polarität. Gewöhnlich ist dieselbe aber auf einen kleineren Flächenraum beschränkt, als die in dem mittleren Theile herrschende negative. Liegt daher die ganze Würfelfläche (oder die an ihrer Stelle befindlichen Flächen des häufig vorhandenen sehr stumpfen Pyramidenwürfels) frei, so wird die positive Elektricität der Ecken und Ränder in ihrer Vertheilungswirkung auf den zur Prüfung angenäherten und mit dem Goldblättchen des Elektrometers verbundenen Platindraht leicht durch die stärkere negative Elektricität der mittleren Theile unterdrückt und kommt nicht zur Erscheinung; sie kann aber durch Bedecken der mittleren Theile mit zur Erde abgeleitetem Kupferfeilicht in ihrer Wirkung sichtbar gemacht werden.

Die Grenzen zwischen dem positiven und negativen Bereiche einer Krystallfläche, und ebenso die Verhältnisse der Intensitäten, welche die beiden Elektricitäten auf einer solchen Fläche zeigen, lassen sich durch die Art der Bestrahlung, namentlich wenn auch noch mehr oder weniger grosse Stücke der seitlich anliegenden Würfelflächen dem Lichte gleichzeitig mit ausgesetzt werden, etwas verschieben und ändern.

Auf das Hervortreten der positiven Polarität an den Ecken und besonders auch an den Rändern ist ferner die Art, wie die Krystalle sich gebildet haben, von Einfluss. Auf der der Anwachsungsstelle gerade gegenüber liegenden Würfelfläche erscheint vorzugsweise negative Elektricität; dagegen zeigen die Bruchstücke derjenigen Flächen, welche zwischen dieser vollständig ausgebildeten Fläche und der Anwachsungsstelle liegen, an ihren ausgebildeten Rändern stärkere und ausgedehntere positive Spannungen, deren Intensität jedoch von dem Rande nach dem mittleren und dem verbrochenen Theile hin abnimmt. Diese

Bruchstücke stellen mehr oder weniger nur den gegen die vollständig ausgebildete Fläche hin gelegenen Rand der betreffenden Würfelflächen dar.

Die Bruchflächen, welche durch das Abbrechen des Krystalles von anderen Krystallen oder von fremdem Gesteine entstanden sind, und also an und in der Umgebung der ehemaligen Anwachsungsstelle liegen, werden durch Belichten positiv.

Diese positive Polarität der Bruchflächen besitzt meistens eine nicht unbeträchtliche Stärke; bei vielen Krystallen übertrifft sie, namentlich wenn den Bruchflächen der Farbstoff nicht fehlt, in ihrer Intensität die auf der Mitte der vorhandenen Krystallflächen erregte negative Spannung.

Eben dies gilt auch von den Stücken der ebenen Durchgangsflächen, welche zwischen und neben den Bruchflächen an dem verbrochenen Ende auftreten.

Das Verhalten von Durchgangsflächen, welche an dem frei ausgebildeten Ende der Würfel durch Anschlagen entstehen, habe ich wegen Mangels an geeignetem Material noch nicht ermitteln können.

Die im Vorstehenden charakterisirte Wirkung des Lichtes auf die Flussspathkrystalle geht hauptsächlich von den chemisch wirkenden Strahlen aus; sowohl hinter einem mit Kupferoxydul roth gefärbten Glase, als auch hinter einer Schicht einer klaren Lösung von schwefelsaurem Chinin ist die Erregung der Elektricität nur äusserst gering, während sie durch Einschaltung einer Schicht Wasser oder Alaunlösung in den Weg der Strahlen nicht wesentlich vermindert wird.

Bei sehr empfindlichen Krystallen genügt schon ein kurzes Aussetzen an das Tageslicht, um merkliche elektrische Spannungen zu erhalten; durch längeres Belichten steigt die Intensität derselben.

Die directen Strahlen der Sonne wirken viel kräftiger als das zerstreute Tageslicht.

Noch stärker erregend als das Sonnenlicht zeigt sich das elektrische Kohlenlicht, so dass durch letzteres selbst auf Krystallen, welche durch längeres Aussetzen an das zerstreute oder directe Sonnenlicht keine merklichen elektrischen Spannungen annehmen, solche, bisweilen sogar in ziemlicher Stärke, hervorgerufen werden können.

Auch durch das Licht der Entladungsfunken zwischen zwei

Leydener Flaschen lassen sich photoelektrische Spannungen auf den Flussspathkrystallen erzeugen, während das Licht einer Geissler'schen Röhre ungenügend erscheint.

Am stärksten photoelektrisch erregbar sind die grünen Krystalle von Weardale, und es nimmt die Intensität der durch eine gleiche Bestrahlung erregten elektrischen Spannungen im Allgemeinen mit der Tiefe der Färbung zu. Weniger erregbar sind die in ihrer Masse schwachgrünlich oder graugrünlich gefärbten, aber durch Fluorescenz prächtig violblau erscheinenden Flussspäthe von Weardale und Alston Moor, sowie die entenblauen vom Churprinz bei Freiberg. Die durchsichtigen, braunroth fluorescirenden Flussspathkrystalle von Weardale werden meistens durch das Tageslicht, und zum Theil selbst durch das Sonnenlicht nicht elektrisch, wohl aber durch das elektrische Kohlenlicht. Die weisslichgrünen Flussspäthe von Cornwall zeigen sich nur schwach elektrisch; eben dies gilt auch von den fast farblosen Krystallen von Stolberg am Harz, bei denen der eigenthümliche Fall vorkam, dass auf einem sehr schönen, grossen Krystalle beim Belichten blos die der am reinsten ausgebildeten Ecke entsprechende positive Polarität auftrat, während die negative auf den Mitten der Flächen sich nicht hervorrufen liess, selbst nicht durch das elektrische Kohlenlicht. Auf den gelben Annaberger Krystallen konnte weder durch Tages- und Sonnenlicht, noch auch durch das elektrische Kohlenlicht eine elektrische Spannung erzeugt werden.

Die auf den Flussspathkrystallen durch Belichtung hervorgerufenen Spannungen haben das Eigenthümliche, dass sie beim Stehen im Dunkeln nicht in die ihnen polar entgegengesetzten übergehen. Wird die Fläche eines durch Belichtung stark elektrisirten Flussspathes mittelst Ueberstreichens mit einer Alkoholflamme von der auf ihr vorhandenen Elektricität befreit, so bleibt sie, ins Dunkle gestellt, unelektrisch, oder es erscheint noch ein kleiner Rest der vorherigen Ladung, die also nicht vollständig hinweggenommen war.

Die Erregung der Elektricität durch das Licht erfolgt durch einen Vorgang, bei welchem der Farbstoff der Krystalle betheiligt ist. Durch sehr langes und starkes Belichten lässt sich die Erregbarkeit der Flächen beträchtlich schwächen, und die geringen Spannungen, welche öfter gerade auf den am vollkommensten ausgebildeten Flächen mancher Krystalle auftreten,

während die umliegenden Flächen stärkere Spannungen zeigen, sind wohl meist eine Folge davon, dass diese Krystalle in den Schaukästen der Museen so gelegen haben, dass eben jene vollkommenen Flächen dem Beschauer und somit dem Lichte zugekehrt gewesen und dadurch in ihrer Erregbarkeit geschwächt worden sind. Auf einer absichtlich durch zu langes und starkes Bestrahlen geschwächten Fläche stellt sich selbst durch jahrelanges Aufbewahren im Dunkeln die frühere Empfindlichkeit nicht wieder her.

Mit der Betheiligung des Farbstoffes bei der Erregung der Elektricität steht auch der vorhin angeführte Umstand, dass nach dem Entfernen der durch Belichtung erzeugten Elektricität beim Stehen im Dunkeln keine Umkehrung in die entgegengesetzte Polarität eintritt, in Verbindung.

Durch eine mässige Erhitzung der Flussspathkrystalle wird die photoelektrische Erregbarkeit derselben erhöht. Bereits eine Erhitzung bis 80° C. wirkt in dieser Beziehung günstig, noch mehr eine Erhitzung bis 130 oder 150° C. Eine sehr viel höhere Temperatur muss selbstverständlich die photoelektrische Eigenschaft zerstören; es wäre selbst möglich, dass schon bei der öfter von mir angewandten Temperatur von 180° C. die Grenze, bei welcher die Erregbarkeit am meisten erhöht wird, bereits etwas überschritten ist.

Dabei bleibt es fraglich, ob auch bei frisch aus der Grube genommenen, dem Lichte noch nicht preisgegebenen und dadurch in ihrer photoelektrischen Eigenschaft noch nicht geschwächten Flussspathkrystallen eine Erhitzung bis 150° ebenfalls die Erregbarkeit durch das Licht zu erhöhen vermag, oder ob nur auf bereits geschwächten Krystallflächen der Zustand mehr oder weniger angenähert wiederhergestellt wird, wie er ursprünglich auf dieser Fläche bestand. Es hat mir wenigstens den Eindruck gemacht, als ob auf frischen Bruchflächen durch eine Erhitzung die photoelektrische Erregbarkeit nicht wesentlich erhöht wird.

Die Masse der Flussspathkrystalle und ebenso ihre Oberfläche isolirt vortrefflich und hält die elektrische Ladung ungemein lange. Dieses Verhalten der Oberfläche hängt wohl mit dem Umstande zusammen, dass dieselbe vom Wasser nicht benetzt wird.

## Thermoelektricität.

Durch die Verschiedenheit zwischen den Ecken- und Flächenaxen der Flussspathkrystalle ist die Möglichkeit gegeben, dass auf ihrer Oberfläche durch Temperaturänderungen elektrische Spannungen auftreten, und zwar folgen diese elektrischen Vorgänge dem bei allen thermoelektrischen Krystallen ausnahmelos bewahrheiteten Gesetze, dass die Polaritäten bei sinkender Temperatur gerade die entgegengesetzten sind als bei steigender.

Beim Steigen der Temperatur stimmen nun die auf der Oberfläche der Flussspathkrystalle entstehenden elektrischen Spannungen in ihrem Vorzeichen mit den durch die Belichtung hervorgerufenen überein.

Beim Sinken der Temperatur verwandeln sich diese von der Erhitzung erzeugten Elektricitäten in die entgegengesetzten; die beim Erkalten auftretenden Spannungen sind also sowohl den durch die Steigerung der Temperatur als auch den durch die Belichtung entstehenden entgegengesetzt.

Obwohl nun die durch die Belichtung und die durch Erhöhung der Temperatur hervorgerufenen elektrischen Spannungen in ihrem Vorzeichen übereinstimmen, so muss ihre Entstehung doch auf verschiedenen Vorgängen beruhen, oder wenn sie durch denselben Vorgang erzeugt werden, so muss solcher durch die Belichtung einen vollständigen Abschluss finden, während derselbe, wenn er durch eine mässige Steigerung der Temperatur entstanden ist, nicht abschliesst, sondern bei dem Sinken derselben wieder zurückgeht; denn die bei steigender Temperatur auftretenden Polaritäten kehren sich bei dem Erkalten um, während nach der Belichtung die entgegengesetzten Elektricitäten im Dunkeln nicht auftreten.

Bei den durch das Licht stark erregbaren Flussspäthen ruft auch die Temperaturänderung eine ziemlich starke elektrische Polarität hervor; sie ist bei diesen Krystallen jedoch stets schwächer als die durch das Licht erzeugbare.

Bei manchen durch das Licht weniger erregbaren Krystallen sind dagegen die thermoelektrischen Spannungen grösser als die photoelektrischen; dies tritt ein bei manchen Flächen der grünen und violblauen Krystalle, bei denen jedoch wahr-

scheinlich die Empfindlichkeit gegen das Licht durch vorhergegangene schädigende Einwirkungen geschwächt worden ist. Durchweg die photoelektrischen an Stärke übertreffend zeigen sich aber die thermoelektrischen Spannungen auf den braunröthlichen oder braunvioletten Krystallen, welche im Sonnenlichte gar nicht und nur durch das elektrische Kohlenlicht einigermassen elektrisch werden. Auch bei den fast farblosen Krystallen von Stolberg am Harz sind öfter die thermoelektrischen Spannungen stärker als die photoelektrischen.

Aus dem Vorstehenden ergiebt sich nun sofort die Vertheilung der thermoelektrischen Polaritäten auf der Oberfläche der Flussspathkrystalle.

Bei steigender Temperatur sind ebenso wie beim Belichten die Mitten der Würfelflächen negativ; diese negative Spannung nimmt von hier aus nach den Rändern und namentlich nach den Ecken hin ab. Sehr oft zeigt die ganze Fläche negative Polarität.

Auf anderen, namentlich grösseren Krystallen treten, entsprechend den Vorgängen beim Belichten, an den Ecken, und wohl auch noch an den Rändern positive Spannungen hervor.

Beim Erkalten sind die Polaritäten die gerade entgegengesetzten; die Mitten der Flächen zeigen positive Elektricität, abnehmend nach den Rändern und den Ecken. Letztere zeigen entweder noch schwache positive Elektricität oder tragen negative Spannungen. Diese negativen Spannungen sind oft zu schwach, um bei ganzer freier Fläche wahrgenommen zu werden; durch Bedecken der mittleren positiven Theile mit zur Erde abgeleitetem Kupferfeilicht können sie sichtbar gemacht werden.

Wenn die Grenzen zwischen den positiven und negativen Bereichen auf den Flächen bei der Belichtung öfter etwas anders verlaufen als bei der Abkühlung, oder die Verhältnisse zwischen den Intensitäten in beiden Fällen nicht genau dieselben sind, so wird diese Abweichung dadurch bedingt, dass die Belichtung den Krystall in anderer Weise trifft als die Abkühlung, wie ja solche Schwankungen selbst bei verschiedenen Bestrahlungen vorkommen.

Auf den Flächen, welche durch Abbrechen der Krystalle von ihrer Unterlage entstanden sind, mögen sie unregelmässig verlaufende Bruchflächen oder Stücke von ebenen Durchgängen

sein, erscheint bei steigender Temperatur positive, bei sinkender negative Polarität.

Die beim Erkalten hervortretenden elektrischen Spannungen werden stärker, wenn die vorhergehende Temperatursteigerung eine höhere war, wenigstens innerhalb der Grenze bis 150° C.

---

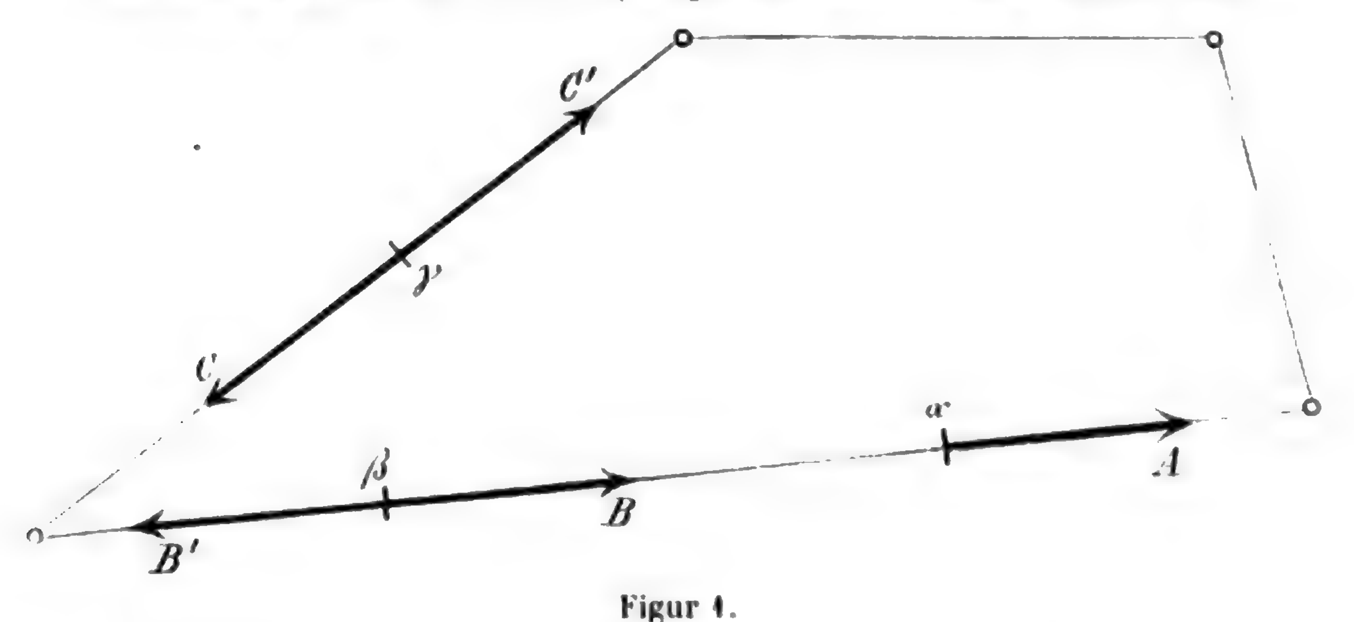
**C. Neumann.** *Ueber das Princip der virtuellen oder facultativen Verrückungen.*)*

Schon in meinen Vorträgen an der Universität Halle (1858 bis 63) habe ich für das Princip der virtuellen Verrückungen einen, wie mir scheint, besonders einfachen Beweis gegeben. Ich erlaube mir denselben im Folgenden mitzutheilen.

## § 1.

## Ueber das Gleichgewicht eines Fadens.

Ein in sich zurücklaufender unausdehnbarer Faden gehe durch irgend welche Anzahl fester Ringe, und sei mittelst dieser Ringe gespannt. Wirken nun auf diesen Faden in $\alpha$, $\beta$, $\gamma$**) die Kräfte ein $A$, $B$, $B'$, $C$, $C'$ (vergl. die beistehende Figur), und




Figur 1.

*) Vorgetragen in der Sitzung am 16. Juni 1879; zum Druck übergeben am 1. März 1880.

**) $\alpha$ soll der Angriffspunkt von $A$ sein, ferner $\beta$ der Angriffspunkt von $B$ und $B'$, endlich $\gamma$ derjenige von $C$ und $C'$.

sind all' diese Kräfte von gleicher Stärke, so ist offenbar

$$A \text{ äq } (A, B, B'),\text{*)}$$

also weil $A$, $B'$ einander zerstören:

(1.) $$A \text{ äq } B.$$

In gleicher Weise ergiebt sich:

$$B \text{ äq } (B, C, C'),$$

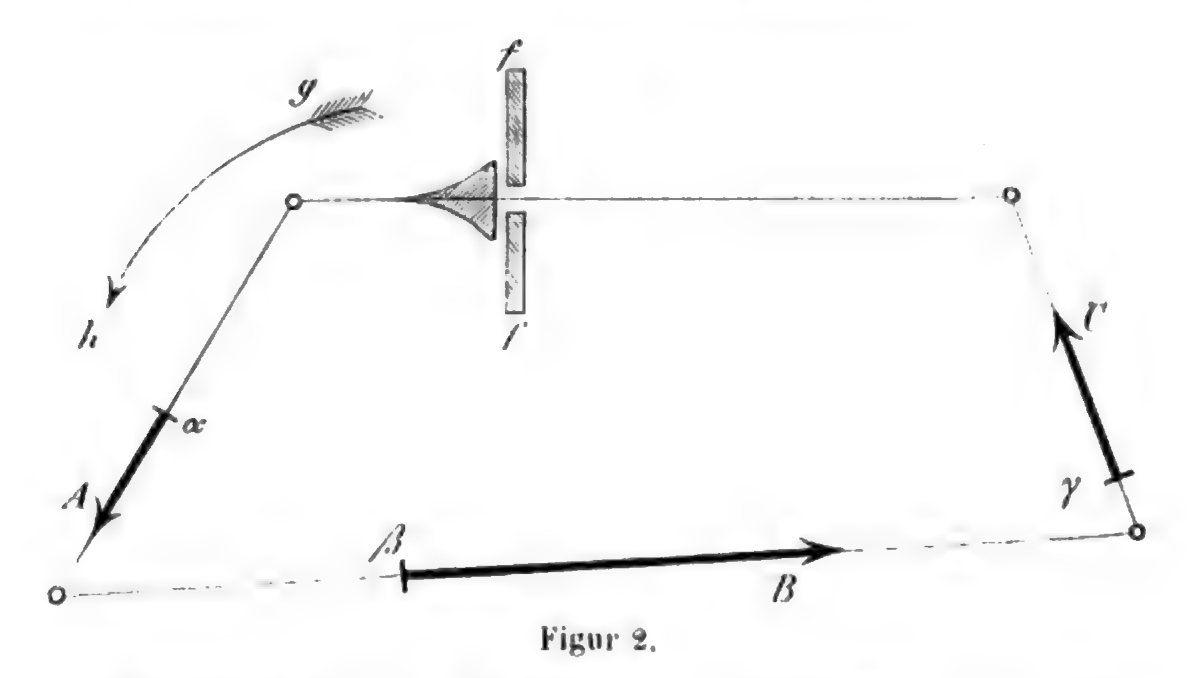
also weil $B$, $C'$ einander zerstören:

(2.) $$B \text{ äq } C;$$

also nach (1.), (2.):

(3.) $$A \text{ äq } B \text{ äq } C$$

Nennt man also jede Kraft, welche (wie z. B. $A$, $B$, $C$) in der Richtung des Fadens wirkt, eine *tangentiale* Kraft, so ergiebt sich der Satz, *dass eine solche tangentiale Kraft, unbeschadet ihrer Wirkung, längs des Fadens beliebig verlegt werden kann*, z. B. von $\alpha$ nach $\beta$, nach $\gamma$, u. s. w. Wirken mithin auf den Faden beliebig viele tangentiale Kräfte ein, theils im einen theils im andern Sinne, so wird Gleichgewicht stattfinden, sobald die Summe der im einen Sinne wirkenden Kräfte ebensogross ist wie die Summe der im andern Sinne wirkenden.




Figur 2.

Bequemer ist es, alle Kräfte in *einerlei* Sinn zu rechnen, indem man die in diesem Sinne wirkenden als positive, die im entgegengesetzten Sinne wirkenden als negative Grössen betrachtet. Dann lautet der Satz:

*Der Faden befindet sich unter dem Einfluss tangentialer* (durch-

*) Das Zeichen äq steht als Abkürzung für *aequivalent*.

weg in demselben Sinne gerechneter) *Kräfte im Gleichgewicht, sobald die Summe dieser Kräfte = 0 ist.*

Ist der Faden in Folge einer angebrachten Hemmvorrichtung $ff$ (Fig. 2) nur in *einem* Sinne beweglich, und sind $A$, $B$, $C$ die in diesem Sinn gerechneten Kräfte, so wird Bewegung eintreten, falls

(4.a) $$A + B + C > 0,$$

ist, hingegen Gleichgewicht vorhanden sein, wenn

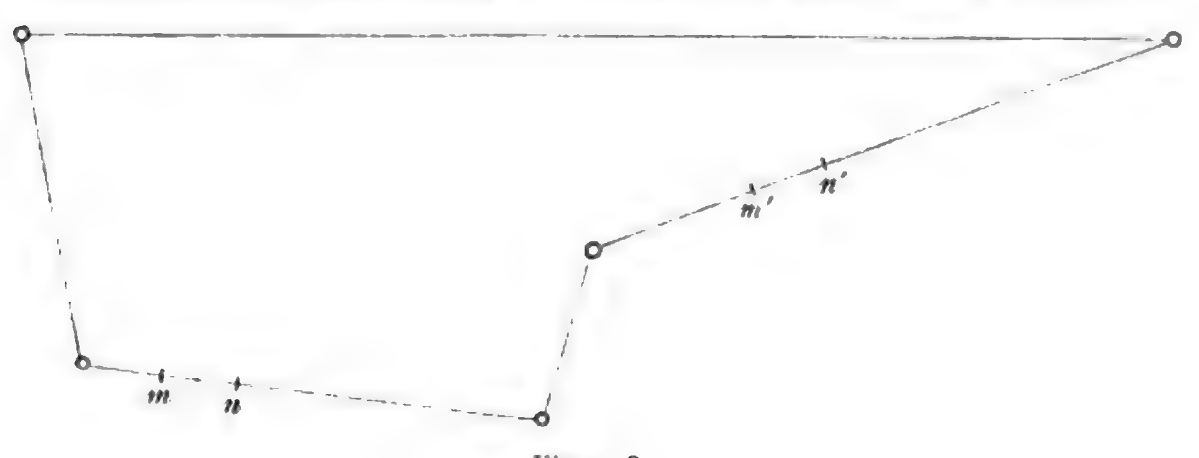
(4.b) $$A + B + C \leq 0$$

ist. In Fig. 2 ist die Hemmvorrichtung dargestellt durch einen mit dem Faden verbundenen Kegel, welcher gegen die feste Ebene $ff$ aufschlägt; so dass also der Faden nur in der Richtung des Pfeiles $gh$ sich bewegen kann.

## § 2.

## Sich anschliessende Bemerkungen.

**Erste Bemerkung.** Sind $m$, $m'$ zwei materielle Punkte, ferner $m\,n$, $m'\,n'$ zwei *gegebene* von diesen Punkten ausgehende Linienelemente, so kann man, falls $m\,n$ und $m'\,n'$ *gleich lang* sind, leicht einen Apparat construiren, durch welchen jene Punkte diese Linienelemente *gleichzeitig* zu durchlaufen gezwungen werden.




Figur 3.

Zu diesem Zwecke denke man sich einen in sich zurücklaufenden durch feste Ringe gespannten Faden von solcher Figur, dass eine Strecke desselben durch die Punkte $m$, $n$, und eine andere Strecke desselben durch $m'$, $n'$ geht. Zugleich denke man sich die materiellen Punkte $m$ und $m'$ an diesem Faden befestigt. Alsdann ist der verlangte Apparat construirt. Dann lässt man auf diesen Faden irgend eine tangentiale Kraft wirken, so

wird in der That $m$ das Linienelement $m\,n$, und $m'$ das *gleich grosse* Linienelement $m'\,n'$ durchlaufen.

**Zweite Bemerkung.** Sind die den Punkten $m$, $m'$ vorgeschriebenen Wegelemente $m\,n$, $m'\,n'$ von *verschiedener Länge*, so kann man Aehnliches erreichen, indem man zu dem Faden noch gewisse Hebelvorrichtungen hinzufügt.

Zu diesem Zwecke construire man (vergl. Fig. 4) über $m\,n$ und $m'\,n'$ als Grundlinien zwei *einander ähnliche gleichschenklige* Dreiecke $o\,m\,n$ und $o'\,m'\,n'$, deren Ebenen beliebig im Raume liegen können, und errichte auf diesen Ebenen in $o$ und $o'$ die Normalen. Sodann denke man sich diese Normalen als *feste Axen*, um welche die Punkte $m$ und $m'$ mittelst der *materiellen Arme* $o\,m$ und $o'\,m'$ drehbar sind*).

In den Dreiecken $o\,m\,n$ und $o'\,m'\,n'$ construire man zwei den Grundlinien $m\,n$ und $m'\,n'$ parallele Linien $\alpha\,\beta$ und $\alpha'\,\beta'$ von solcher Lage, dass

(5.) $$o\,\alpha = o'\,\alpha'$$

ist; so dass also die Dreiecke $o\,\alpha\,\beta$ und $o'\,\alpha'\,\beta'$ gleichschenklig und *einander congruent* sind. Sodann denke man sich einen in sich zurücklaufenden durch Ringe gespannten Faden von solcher Figur, dass eine Strecke desselben durch die Punkte $\alpha$, $\beta$, und eine andere Strecke desselben durch $\alpha'$, $\beta'$ geht. Zugleich denke man sich diesen Faden in $\alpha$ an dem Hebelarm $o\,m$, und in $\alpha'$ an dem Hebelarm $o'\,m'$ befestigt. — Alsdann ist der zu construirende Apparat vollendet. Denn lässt man auf den Faden eine tangentiale Kraft einwirken, so werden von den Punkten $\alpha$, $\alpha'$ die (einander gleichen) Wegelemente $\alpha\,\beta$, $\alpha'\,\beta'$, mithin von den Punkten $m$, $m'$ die vorgeschriebenen Wegelemente $m\,n$, $m'\,n'$ durchlaufen werden.

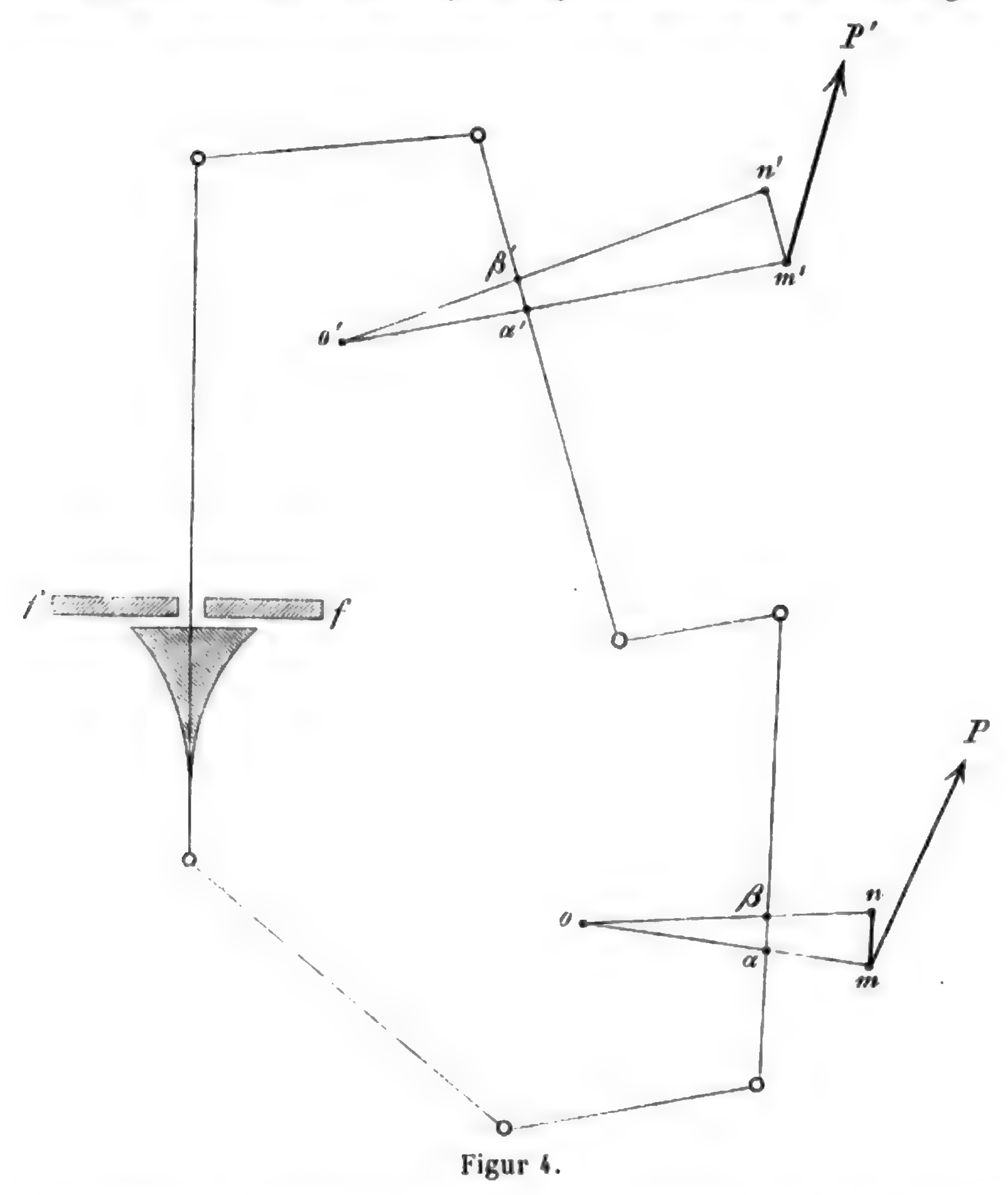
Will man erreichen, dass die zu $m\,n$, $m'\,n'$ entgegensetzten Verrückungen**) unmöglich werden, so braucht man den Faden

---

*) $m\,n$ soll ein Linien*element*, also eine *unendlich kleine* Linie sein. Demgemäss ist das gleichschenklige Dreieck $o\,m\,n$ *unendlich schmal;* und es wird also dieses Dreieck auch angesehen werden können als ein unendlich schmaler *Kreissector*. Dreht man also den Punkt $m$ mittelst des Armes $o\,m$ um die in $o$ (senkrecht zur Ebene $o\,m\,n$) construirte Axe, so durchläuft der Punkt $m$ das gegebene Linienelement $m\,n$. — Analoges gilt vom Dreiecke $o'\,m'\,n'$.

**) Unter zwei zu $m\,n$ und $m'\,n'$ *entgegengesetzten* Verrückungen verstehe ich solche, die mit $m\,n$ und $m'\,n'$ von gleicher Grösse und entgegengesetzter Richtung sind.

nur mit einer geeigneten Hemmvorrichtung zu versehen (wie solches in untenstehender Figur bei *ff* angedeutet ist). Alsdann sind nur solche Verrückungen möglich, welche mit den vorge-




Figur 4.

schriebenen Verrückungen *m n, m' n'* proportional und von gleicher Richtung sind. — Der in solcher Weise vervollständigte Apparat mag kurzweg *der den Wegelementen m n, m' n' correspondirende Apparat* genannt, und mit $\Omega$ bezeichnet werden. Dieser Apparat $\Omega$ besteht also, um die Hauptsache zu recapituliren, aus den festen Axen *o, o'*, ferner aus den an diesen Axen angebrachten Hebelarmen *o m, o' m'*, ferner aus dem mit diesen Hebelarmen

in $\alpha$, $\alpha'$ verbundenem, durch feste Ringe gehenden Faden, und endlich aus der angebrachten Hemmvorrichtung.

**Dritte Bemerkung.** Ob nun, bei Vorhandensein des Apparates $\Omega$, die beiden Punkte $m$ und $m'$ unter dem Einfluss gegebener Kräfte $P$ und $P'$ (vergl. die letzte Figur) im Gleichgewicht sind, lässt sich leicht beurtheilen.

Nach dem Hebelgesetz ist nämlich die auf $m$ wirkende Kraft $P$ ersetzbar durch eine in $\alpha$ angreifende Kraft $A$, welche mit jener in Bezug auf die Axe $o$ einerlei Drehungsmoment besitzt. Giebt man also dieser Kraft $A$ die Richtung $\alpha\beta$, so wird man ihre Stärke zu bestimmen haben durch die Formel

$$(o\alpha)\, A = (om)\, P \cos(P, mn)\,;$$

woraus mit Rücksicht auf die Aehnlichkeit der Dreiecke $o\alpha\beta$ und $omn$ sich ergiebt:

$$(6.)\qquad A = \frac{(mn)}{(\alpha\beta)}\, P \cos(P, mn).$$

In ähnlicher Weise kann die auf $m'$ wirkende Kraft $P'$ ersetzt werden durch eine in $\alpha'$ angreifende Kraft $A'$ von der Richtung $\alpha'\beta'$ und der Stärke:

$$(7.)\qquad A' = \frac{(m'n')}{(\alpha'\beta')}\, P' \cos(P', m'n').$$

Denkt man sich aber $P$, $P'$ durch diese neuen Kräfte $A$, $A'$ ersetzt, so sieht man sofort [vgl. (4. a, b)] dass Bewegung eintreten wird, falls

$$(8.a)\qquad A + A' > 0$$

ist, und dass andererseits Gleichgewicht herrschen wird, falls

$$(8.b)\qquad A + A' \leqq 0$$

ist. Diese Formeln (8.a, b) führen, falls man für $A$, $A'$ ihre Werthe (6.), (7.) substituirt, und beachtet, dass $(\alpha\beta) = (\alpha'\beta')$ ist, [vgl. (5.)], zu folgendem Satz:

*Bei Vorhandensein des Apparates $\Omega$ werden die beiden Punkte $m$, $m'$ unter dem Einfluss der gegebenen Kräfte $P$, $P'$ in Bewegung gerathen oder in Ruhe bleiben, jenachdem der Ausdruck*

$$(9.)\qquad P(mn)\cos(P, mn) + P'(m'n')\cos(P', m'n')$$

$> 0$ *oder* $\leqq 0$ *ist.*

**Vierte Bemerkung.** Dieser Satz (9.) wird offenbar in Kraft bleiben, wenn man sich den Punkt $m$ gezwungen denkt auf einer vorgeschriebenen Curve zu bleiben, von welcher $mn$ ein Element ist. Ueberhaupt wird der Satz in Kraft bleiben, wenn man zu den Beschränkungen, denen die Punkte $m$, $m'$

mittelst des Apparates $\Omega$ unterworfen sind, noch irgend welche andere Beschränkungen $\Pi$ hinzufügt, falls nur diese letzteren den Verrückungen $mn$, $m'n'$ kein Hinderniss in den Weg legen. Statt dabei zuerst des Apparates $\Omega$ und dann der Beschränkungen $\Pi$ zu gedenken, kann man offenbar auch umgekehrt zuerst die Beschränkungen $\Pi$ sich vorstellen, und dann den Apparat $\Omega$ hinzufügen; also folgendermassen sich ausdrücken:

*Sind die von den Kräften $P$, $P'$ sollicitirten Punkte $m$, $m'$ irgend welchen Beschränkungen $\Pi$ unterworfen, und $mn$, $m'n'$ irgend zwei mit diesen Beschränkungen $\Pi$ verträgliche Verrückungen, so werden die Punkte $m$, $m'$, nach Hinzufügung des mit diesen Verrückungen $mn$, $m'n'$ correspondirenden Apparates $\Omega$, in Bewegung gerathen oder im Gleichgewicht sein, jenachdem der Ausdruck*

(10.) $$P(mn)\cos(P, mn) + P'(m'n')\cos(P', m'n')$$
$> 0$ *oder* $\leq 0$ *ist.*

## § 3.

## Ableitung des Princips der virtuellen Verrückungen.

Die den Beschränkungen $\Pi$ unterworfenen Punkte $m$, $m'$ mögen unter dem Einfluss der Kräfte $P$, $P'$ im *Gleichgewicht* sein. Gleichzeitig wollen wir irgend ein mit den Beschränkungen $\Pi$ verträgliches System von Verrückungen mit $mn$, $m'n'$ bezeichnen. Alsdann wird jenes unter dem Einfluss der Kräfte $P$, $P'$ vorhandene Gleichgewicht offenbar fortdauern, sobald man zu den Beschränkungen $\Pi$ noch den den Verrückungen $mn$, $m'n'$ correspondirenden Apparat $\Omega$ hinzutreten lässt. Folglich wird nach (10.) der Ausdruck

$$P(mn)\cos(P, mn) + P'(m'n')\cos(P', m'n')$$

$\leq 0$ sein. *) Also der Satz:

(11.) *Befindet sich das den Beschränkungen $\Pi$ unterworfene System $m$, $m'$ unter dem Einfluss der Kräfte $P$, $P'$ im Gleichgewicht, so wird die Arbeit dieser Kräfte für jedwedes mit den Beschränkungen $\Pi$ verträgliche System von Verrückungen $\leq 0$ sein.*

---

*) Denn wäre dieser Ausdruck $> 0$, so müssten die Punkte $m$, $m'$, zufolge des Satzes (10.), in *Bewegung* gerathen; dies aber würde im Widerspruch sein mit der von uns gemachten Voraussetzung (dass *Gleichgewicht* stattfindet).

Wir wollen andererseits annehmen, dass das den Beschränkungen $\Pi$ unterworfene System $m$, $m'$ unter dem Einfluss der Kräfte $P$, $P'$ in *Bewegung* gerathe, und die Beschaffenheit derjenigen unendlich kleinen Wegelemente $mn$, $m'n'$, welche bei dieser Bewegung während der Zeit $dt$ durchlaufen werden, einer näheren Untersuchung unterwerfen.

Offenbar würden diese Wegelemente $mn$, $m'n'$ während der Zeit $dt$ auch dann durchlaufen worden sein, wenn das System $m$, $m'$ nicht nur den Beschränkungen $\Pi$, sondern gleichzeitig auch den mit $mn$, $m'n'$ correspondirenden Beschränkungen $\Omega$ unterworfen gewesen wäre; und hieraus folgt nach (10.), dass der Ausdruck

$$P(mn)\cos(P,mn) + P'(m'n')\cos(P',m'n')$$

$>$ 0 sein muss *). Also der Satz:

(12.) *Geräth das anfangs ruhende und den Bedingungen $\Pi$ unterworfene System $m$, $m'$ unter dem Einfluss der Kräfte $P$, $P'$ in irgend welche Bewegung, so wird die von den Kräften $P$, $P'$ während des ersten Zeitelements dieser Bewegung verrichtete Arbeit $> 0$ sein.*

Ist also unter allen mit den Bedingungen $\Pi$ verträglichen Systemen von virtuellen Verrückungen kein einziges vorhanden, für welches die von jenen Kräften verrichtete Arbeit $> 0$ sein würde, so muss Gleichgewicht vorhanden sein. Mit andern Worten:

(13.) *Das den Beschränkungen $\Pi$ unterworfene System $m$, $m'$ befindet sich unter dem Einfluss der Kräfte $P$, $P'$ im Gleichgewicht, wenn die Arbeit dieser Kräfte für jedwedes mit den Beschränkungen $\Pi$ verträgliche System von Verrückungen $\leqq 0$ sein würde.*

Diese Sätze (11.) und (13.) repräsentiren bekanntlich das Princip der virtuellen Verrückungen für den Fall von *zwei* Punkten. Dass man in genau derselben Art dieses Princip für *beliebig viele* Punkte beweisen kann, bedarf keiner weiteren Erläuterung.

§ 4.

## Ueber die im Vorhergehenden angewandten Grundsätze.

In Bezug auf die gegebenen Bedingungen oder Beschrän-

*) Denn wäre der Ausdruck $\leqq 0$, so würde, zufolge des Satzes (10.), *Gleichgewicht* vorhanden sein; was unserer Voraussetzung widerspricht.

kungen sind im Vorhergehenden folgende Grundsätze als maassgebend betrachtet worden.

**Erster Grundsatz.** *Das Gleichgewicht eines materiellen Systems kann durch Hinzufügung irgend welcher Bedingungen, die mit dieser Gleichgewichtslage in Einklang sind, keine Störung erleiden.*

**Zweiter Grundsatz.** *Die Bewegung eines materiellen Systems kann durch Hinzufügung von Beschränkungen, die mit dieser Bewegung in Einklang sind, keine Abänderung erfahren.*

Von diesen Grundsätzen aus ergiebt sich, wie im Vorhergehenden gezeigt ist, das Princip der virtuellen Verrückungen [d. i. die Richtigkeit der Sätze (11.), (12.) und (13.)] mit mathematischer Nothwendigkeit — aber nur für die *Statik*. In der That bleibt die Gültigkeit des Princips für die *Dynamik* eine Hypothese. Und diese Hypothese ist es, über welche ich in einem früheren Aufsatz [diese Berichte, 1869, Seite 257] einige Betrachtungen angestellt habe.

## § 5.

## Anhang. Mittheilung eines Briefes von Gauss an Möbius.

Wenn ich in der Ueberschrift des gegenwärtigen Aufsatzes die virtuellen Verrückungen als *facultative* Verrückungen bezeichnet habe, so beruht solches auf einer gelegentlichen Aeusserung von *Gauss*, die sich vorfindet in einem 1837 von *Gauss* an *Möbius* gerichteten Briefe. Ich erlaube mir diesen auch in mancher andern Hinsicht interessanten Brief*) hier wortgetreu folgen zu lassen:

### Brief von Gauss an Möbius vom Jahre 1837.

»Hochgeschätztester Freund«

»Für Ihr so schätzbares Werk über die Statik, sowie für Ihr »gütiges Schreiben sage ich Ihnen meinen verbindlichsten Dank. »Unter den ununterbrochenen Zerstreuungen unserer Festwoche »habe ich gar keine, und in den nächstfolgenden Tagen habe ich

*) Dieser Brief ist Eigenthum der *hiesigen Sternwarte*; und ich bin dem Director derselben Herrn Prof. *Bruhns* für die gütige Mittheilung des Briefes zu grossem Dank verpflichtet. C. N.

»nur erst wenige Stunden frei gehabt, und Ihr Werk eigentlich »nur erst ein wenig durchblättern können. Indessen genug, um »Ihre gewohnte Gründlichkeit und Gediegenheit zu erkennen; »mich verlangt nach der Zeit, wo ich es mit Musse werde lesen »können.«

»Anmerkungen *über Ihr Werk* kann ich Ihnen demnach »jetzt noch gar keine geben. Ich will jedoch, Ihnen mein Inter- »esse an dem Gegenstande selbst zu zeigen, eine kleine Bemer- »kung über das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten, oder »wie ich lieber spreche, das Princip der virtuellen *Bewegungen* »beifügen, welcher Sie aber das Flüchtige und Ungeordnete der »Einkleidung nachsehen müssen.«

»Ich kann nicht leugnen, dass ich mit der Art, wie dieses »Princip gewöhnlich dargestellt wird, nicht ganz zufrieden bin; »selbst der *Begriff* der virtuellen Geschwindigkeiten oder besser »der virtuellen Bewegungen, scheint mir nicht alle zu wün- »schende Präcision und Rundung zu haben.«

»Ich habe ein Paarmahl Veranlassung genommen, das herr- »liche Princip in derjenigen Gestalt, wie ich es wohl bei münd- »lichen Vorträgen darzustellen pflege, auszusprechen, z. B. im »ersten Articel meiner *Theoria generalis figurae fluidorum.* Es »scheint dies aber wenig beachtet zu sein, vermuthlich, weil es »nur so beiläufig vorkommt, ohne das Unterscheidende beson- »ders hervorzuheben oder umständlich zu motiviren. Nur ein- »mal erinnere ich, mit Herrn Prof. Dirksen aus Berlin über »*meine* Fassung gesprochen zu haben, wobei ich die Satisfaction »hatte ihn zu überzeugen, was freilich durch eine mündliche »Discussion leichter geschieht, als durch ein Paar in der Eile »geschriebene Zeilen.«

»Der Name *virtuelle* Bewegung scheint mir etwas unge- »schickt gewählt zu sein; indessen ist er einmal recipirt. Am »a. O. finden Sie meine scharfe Bestimmung des Begriffs. Wäre »der Name nicht einmal da, so wäre vielleicht *facultative* Bewe- »gungen ein schicklicherer, und das *worauf es eigentlich ankommt,* »bestimmter bezeichnender. Doch *in verbis simus faciles.*«

»Wichtiger aber erscheint mir, dass alle Schriftsteller, auch »Lagrange, das Princip enger gefasst haben als nöthig ist. Allen »Schriftstellern sieht man die Fessel anhängen, die sie in den »engern Raum festbannt, wo nur von solchen Fällen die Rede »ist die Einer analytischen Formel vollständig unterworfen sind.«

»Dies aber ist nicht die Erschöpfung der Fälle der *Natur*. »Diese bietet ebenso oft Fälle dar, wo die Eine analytische For-»mel nicht ausreicht*). Ist es dann nicht ein grosser Gewinn, »wenn man das höchste Princip der Statik *so* ausspricht, dass es »die wirklichen Fälle der Natur in Einem Schlage unter sich hat?«

»Ich erkläre mich etwas deutlicher.«

»Unter den Bedingungen, denen die facultative Bewegung »eines Systems materieller Punkte unterworfen ist, führt man »z. B. wohl an, dass einer der materiellen Punkte sich nur in »einer bestimmten Fläche bewegen kann, setzt dies in Gleichung, »u. s. w. Allein in der Natur ist dies fast nie so; vielmehr ge-»wöhnlich so, dass die Fläche *quaest.* nur die *Ober*fläche eines »materiellen Solidum ist, dessen Impenetrabilität den materiellen »Punkt *nur* hindert, *in* das Solidum einzudringen, aber nicht, »sich davon zu entfernen.«

»Ein zweites Beispiel wäre, dass zwei materielle Punkte »eine unveränderliche Distanz von einander behalten müssen. »Aber in der Natur ist es *äusserst* häufig nur so (wenn z. B. die »Verbindung durch einen biegsamen Faden geschieht), dass die »Distanz nicht *grösser* werden kann, während nichts sie hindert, »dass sie kleiner werde.«

»Es liessen sich noch andere Beispiele aufführen, wobei ich »mich aber nicht aufhalten will.«

»Die gewöhnliche Einkleidung schliesst nun, für sich be-»trachtet, alle solche in der Natur so häufigen Fälle *aus; meine* »Einkleidung umfasst sie auf einmal alle mit.«

»Ich muss mich heute auf diese wenigen *Andeutungen* be-»schränken, aber *sapienti sat.*«

»Es liessen sich noch mehrere andere Umstände, betreffend »die ersten Gründe der Statik und Bewegungslehre namhaft »machen, die mir bei den üblichen Behandlungen nicht tief genug »aufgefasst zu sein scheinen. Allerdings muss man dabei aber »immer bedenken, für welchen Zweck und für welche Leser »geschrieben ist, und dass wo die Leser, für welche man schreibt, »keinen Anstoss nehmen, es vielleicht gar nicht wohlgethan wäre, »tiefer einzudringen, als ihnen frommt.«

»Aber für diejenigen, die gern Alles aus dem höchsten und

*) Statt *»nicht ausreicht«* steht im Gauss'schen Manuscript: *»ausreicht«*; was wohl ohne Zweifel ein in der angegebenen Weise zu verbessernder Schreibfehler ist.

»allgemeinsten Gesichtspunkt betrachten, scheint mir in allen »Schriften zu wenig auf die Unterscheidung des absoluten und »der relativen Räume eingegangen zu werden. Man hält sich von »vornherein immer nur an die Phänomene auf unserer als ruhend »betrachtet werdenden kleinen Erde, ohne sich darüber zu »rechtfertigen. Ich gebe übrigens gern zu, dass es nicht ganz »leicht ist, *gleich von vornherein* Alles aus dem höheren Stand»punct eines über der materiellen Welt stehenden Geistes dar»zustellen, und dass die Hülfe, welche die Haarspaltereien der »sogenannten Metaphysiker geben, nur eine sehr ungenügende »sein möchte.«

»Sehen Sie alles Dieses nur so an, dass ich eine mit Mühe »herausgerissene halbe Stunde habe verwenden wollen, mich »mit Ihnen über einige Ideenanregungen etwas zu besprechen, »wofür so wenige Menschen nur den Sinn haben.«

»Unser Septembertermin wird morgen und übermorgen »wie gewöhnlich abgewartet werden. Aber der nächste Novem»bertermin soll, da ich Herrn von Humboldt damit einen Gefallen »zu thun glaube, etwas versetzt und etwas früher gehalten »werden, etwa vom 13—14 November oder 14—15 November, »um zu sehen, ob in den berichtigten Sternschnuppenzeiten »bedeutende Magnetische Bewegungen vorkommen. Die *genaue* »Bestimmung des Tages (übrigens nach gewöhnlicher Art $0^h$ bis »$24^h$ Göttinger M. Z.) habe ich Herrn von Humboldt *überlassen*, »der sie nächstens durch die *Zeitungen* publiciren wird. *In* »*omnem eventum* wird es auch noch besonders brieflich den Co»operatoren angezeigt werden.«

»Erhalten Sie Ihr freundliches Andenken«

»Ihrem ergebensten«
»C. F. Gauss.«

»Göttingen den 29. September 1837.«

---

Druck von Breitkopf und Härtel in Leipzig.

# BERICHTE

ÜBER DIE

# VERHANDLUNGEN

DER KÖNIGLICH SÄCHSISCHEN

# GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN

ZU LEIPZIG.

## MATHEMATISCH-PHYSISCHE CLASSE.

ZWEIUNDDREISSIGSTER BAND.

1880.

MIT ZWEI TAFELN.

LEIPZIG

BEI S. HIRZEL.

# INHALT.

## Protector der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften

SEINE MAJESTÄT DER KÖNIG.

---

## Ehrenmitglieder.

Seine Excellenz der Minister des Königlichen Hauses, Freiherr *Johann Paul von Falkenstein.*

Seine Excellenz der Staatsminister des Cultus und öffentlichen Unterrichts, Herr *Carl Friedrich von Gerber.*

---

## Ordentliche einheimische Mitglieder der philologisch-historischen Classe.

Herr Geheimer Hofrath *Heinrich Leberecht Fleischer* in Leipzig, Secretär der philol.-histor. Classe.
- —— —— *Friedrich Zarncke* in Leipzig, stellvertretender Secretär der philol.-histor. Classe.
- —— —— *Georg Curtius* in Leipzig.
- Professor *Georg Ebers* in Leipzig.
- —— *Adolf Ebert* in Leipzig.
- —— *Alfred Fleckeisen* in Dresden.
- —— *Gustav Hartenstein* in Jena.
- Hofrath *Max Heinze* in Leipzig.

Herr Professor und Universitäts-Oberbibliothekar *Christoph Ludolf Ehrenfried Krehl* in Leipzig.
- Geheimer Hofrath *Ludwig Lange* in Leipzig.
- Professor *August Leskien* in Leipzig.
- Oberschulrath *Carl Joachim Marquardt* in Gotha.
- Professor *Carl von Noorden* in Leipzig.
- Geheimer Hofrath *Johannes Adolph Overbeck* in Leipzig.
- —— —— *Otto Ribbeck* in Leipzig.
- Geheimer Rath *Wilhelm Roscher* in Leipzig.
- Professor *Anton Springer* in Leipzig.
- —— *Johann Ernst Otto Stobbe* in Leipzig.
- —— *Georg Voigt* in Leipzig.
- —— *Moritz Voigt* in Leipzig.

---

## Ordentliche auswärtige Mitglieder der philologisch-historischen Classe.

Herr Professor *Conrad Bursian* in München.
- —— *Johann Gustav Droysen* in Berlin.
- —— *Hermann Alfred von Gutschmid* in Tübingen.
- Geheimer Justiz- und Oberappellationsgerichtsrath *Andreas Ludwig Jacob Michelsen* in Schleswig.
- Professor *Theodor Mommsen* in Berlin.
- Geheimer Regierungsrath *Hermann Sauppe* in Göttingen.
- Kirchenrath *Eberhard Schrader* in Berlin.
- Professor *Gustav Seyffarth* in New-York.

---

## Ordentliche einheimische Mitglieder der mathematisch-physischen Classe.

Herr Geheimer Hofrath *Wilhelm Gottlieb Hankel* in Leipzig, Secretär der mathem.-phys. Classe.
- Professor *Wilhelm Scheibner* in Leipzig, stellvertretender Secretär der mathem.-phys. Classe.

Herr Geheimer Hofrath *Carl Bruhns* in Leipzig.
- Geheimer Rath *Moritz Wilhelm Drobisch* in Leipzig.
- Professor *Gustav Theodor Fechner* in Leipzig.
- —— *Wilhelm His* in Leipzig.
- —— *Johann August Ludwig Wilhelm Knop* in Leipzig.
- Geheimer Hofrath *Hermann Kolbe* in Leipzig.
- Professor *Adalbert Krüger* in Gotha.
- Geheimer Hofrath *Rudolph Leuckart* in Leipzig.
- —— —— *Carl Friedrich Wilhelm Ludwig* in Leipzig.
- Professor *Adolph Mayer* in Leipzig.
- —— *Carl Neumann* in Leipzig.
- Oberbergrath *Ferdinand Reich* in Freiberg.
- Hofrath *August Schenk* in Leipzig.
- Geheimer Hofrath *Oskar Schlömilch* in Dresden.
- Hofrath *Gustav Wiedemann* in Leipzig.
- Professor *Ferdinand Zirkel* in Leipzig.
- —— *Johann Carl Friedrich Zöllner* in Leipzig.

---

## Ordentliche auswärtige Mitglieder der mathematisch-physischen Classe.

Herr Professor *Heinrich Richard Baltzer* in Giessen.
- Geheimer Hofrath *Carl Gegenbaur* in Heidelberg.
- Staatsrath *Mathias Jacob Schleiden* in Wiesbaden.
- Regierungsrath *Samuel Friedrich Nathanael v. Stein* in Prag.
- Geheimer Hofrath *Wilhelm Weber* in Göttingen.

---

# Verzeichniss

der bei der Königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften im Jahre 1880 eingegangenen Schriften.

---

Von gelehrten Gesellschaften, Universitäten und öffentlichen Behörden herausgegebene und periodische Schriften.

Abhandlungen der Kgl. Akademie d. Wissensch. zu Berlin. Aus d. J. 1879. Berlin 1880.

Monatsberichte der Kgl. Preuss. Akad. d. Wissensch. zu Berlin. 1879, Sept.—Dec. 1880, Jan.—Aug.

Politische Correspondenz Friedrichs d. Gr. Bd. 4. Berlin 1880.

Zur Geschichte der Königl. Museen zu Berlin. Festschrift zur Feier ihres 50jährigen Bestehens am 3. Aug. 1880. Berlin 1880.

Denkschriften der Kaiserl. Akad. d. Wissensch. Mathem.-naturwiss. Cl. Bd. 41. Wien 1879.

Denkschriften der Kaiserl. Akad. d. Wissensch. Philos.-histor. Cl. Bd. 30. Wien 1880.

Sitzungsberichte der Kaiserl. Akad. d. Wiss. Mathem.-naturwiss. Cl. Bd. 79 (1879), Abth. I, Heft 1—5. Abth. II, Heft 4. 5. Bd. 80 (1879), Abth. I, Heft 1—5. Abth. II, Heft 1—5. Abth. III, Heft 1—5. Bd. 81 (1880), Abth. II, Heft 1—3. Abth. III, Heft 1—3. Wien 1879. 80.

Sitzungsberichte der Kaiserl. Akad. d. Wissensch. Philos.-histor. Cl. Bd. 94 (1879), Heft 1. 2. Bd. 95 (1879), Heft 1—4. Bd 96 (1880), Heft 1. Wien 1879. 80.

Anzeiger der Kaiserl. Akad. d. Wissensch. in Wien. Math.-phys. Cl. Jahrg. 1879, No. 27. Jahrg. 1880, No. 3—28.

Archiv für österreich. Geschichte. Herausg. v. der zur Pflege vaterländ. Geschichte aufgestellten Commission der Kaiserl. Akad. d. Wissensch. Bd. 59, 1. u. 2. Hälfte. Bd. 60, 1. Hälfte. Wien 1880.

Fontes rerum Austriacarum. Oesterreich. Geschichtsquellen, herausg. von der histor. Commission der Kaiserl. Akad. d. Wissensch. Abth. II. Diplomata et Acta. Bd. 42. Wien 1879.

Verhandlungen der k. k. geologischen Reichsanstalt. Jahrgang 1879, No. 14—17. Jahrg. 1880, No. 2—10.

Jahrbuch d. k. k. geologischen Reichsanstalt. Jahrg. 1879. Bd. XXIX, No. 4. Wien 1879. Jahrg. 1880. Bd. XXX, No. 1—3. Wien 1880.

Mittheilungen der k. k. geographischen Gesellschaft in Wien. 1879. Bd. 22 (N. F. Bd. 12). Wien 1879.

Verhandlungen der k. k. zoologisch-botanischen Gesellschaft in Wien. Jahrg. 1879 (Bd. 29). Wien 1880.

Sitzungsberichte der königl. böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften in Prag. Jahrg. 1879. Prag 1880.

Astronomische, magnetische und meteorologische Beobachtungen an der k. k. Sternwarte zu Prag im J. 1879. Jahrg. 40. Hrsg. von C. Hornstein. Prag 1880.

Siebzehnter Jahresbericht des Vereins für Geschichte der Deutschen in Böhmen. Für das Vereinsjahr 1878—79. Prag 1879.

Mittheilungen des Vereins für Geschichte der Deutschen in Böhmen. Jahrg. 16, No. 3. 4. Jahrg. 17, No. 1—4. Jahrg. 18, No. 1. 2. Prag 1877—79.

Die Chronik der Stadt Elbogen (1471—1504), bearb. von L. Schlesinger. Prag 1879.

Lotos. Jahrbuch für Naturwissenschaften. Herausg. vom naturhistorischen Vereine »Lotos« in Prag. N. F. Bd. 1 (der ganzen Reihe 29. Bd.). Prag 1880.

Mittheilungen des histor. Vereines für Steiermark. Heft 28. Graz 1880.

Beiträge zur Kunde steiermärkischer Geschichtsquellen. Herausgeg. vom histor. Vereine für Steiermark. Jahrg. 17. Graz 1880.

Festschrift zur Erinnerung an die Feier der vor 700 Jahren stattgefundenen Erhebung der Steiermark zum Herzogthume. Herausg. vom Ausschusse des histor. Vereins für Steiermark. Graz 1880.

Urkundenbuch des Herzogthums Steiermark. Bearb. von J. v. Zahn. Herausg. vom histor. Verein für Steiermark. Bd. II. 1192—1246. Graz 1879.

Berichte des naturwiss.-medicin. Vereines in Innsbruck. Jahrg. 9 (1878). Innsbruck 1879.

Zeitschrift des Ferdinandeums für Tirol u. Vorarlberg. 3. Folge. Heft 23. Innsbruck 1879.

Viestnik Hrvatskoga arkeologičkoga Družtva. Godina 2, Br. 1—4. U Zagrebu 1880.

Izvješće Hrvatskoga arkeologičkoga Družtva za godina 1879.

Erdélyi Muzeum. Az Erd. Muzeum egylet tört. szakosztályának közlönye. Szerkesti Finály Henr. Évfolyam 7 (1880), sz. 1—3. 6—10. Kolozsvár 1880.

Abhandlungen der philosoph.-philolog. Cl. der k. bayer. Akad. d. Wissensch. Bd. 15 (in d. Reihe d. Denkschriften Bd. LII), Abth. 2. München 1880.

Abhandlungen der histor. Cl. der k. bayer. Akad. d. Wissensch. Bd. 15 (in d. Reihe d. Denkschr. Bd. LIV), Abth. 1. 2. München 1880.

Abhandlungen d. mathemat.-physikal. Cl. der k. bayer. Akad. d. Wissensch. Bd. 13 (in der Reihe der Denkschriften Bd. XLVIII). München 1880.

Sitzungsberichte der philos.-philol. u. histor. Cl. der k. bayer. Akad. d. Wissensch. zu München. Jahrg. 1879, Bd. 2, Heft 1—3. Jahrg. 1880, Heft 1—3. München 1879. 80.

Sitzungsberichte der mathem.-physikal. Cl. der k. bayer. Akad. d. Wiss. zu München. Jahrg. 1879, Heft 3. 4. Jahrg. 1880, Heft 1—4. München 1879. 80.

Zittel, Karl A., Ueber den geolog. Bau der libyschen Wüste. Festrede gehalten in der öffentl. Sitzung der k. bayer. Akad. d. Wissensch. zur Feier ihres 121. Stiftungstages (28. März) am 20. März 1880. München 1880.

Druffel, Aug. v., Ignatius von Loyola an der römischen Curie. Festrede zur Vorfeier des Allerh. Geburts- u. Namensfestes S. M. Ludwig II. Königs von Bayern gehalten in der öffentl. Sitzung der k. bayer. Akad. d. Wissensch. zu München am 25. Juli 1879. München 1879.

Döllinger, J. v., Das Haus Wittelsbach und seine Bedeutung in der deutschen Geschichte. Festrede zur Feier des Wittelsbach'schen Jubiläums am 28. Juli 1880 gehalten. München 1880.

Rockinger, Ldw., Die Pflege der Geschichte durch die Wittelsbacher. Akadem. Festschrift zur Feier des Wittelsbacher-Jubiläums. München 1880.

Einundzwanzigste Plenar-Versammlung der histor. Commission bei der k. bayer. Akad. d. Wiss. Bericht des Secretariats. München im Oct. 1880.

Meteorologische und magnetische Beobachtungen der k. Sternwarte bei München. Jahrg. 1879. München 1880.

Abhandlungen der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Bd. 25, aus d. J. 1879. Göttingen 1879.

Nachrichten von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften und der Georg-Augusts-Universität aus d. J. 1879. Göttingen 1879.

Jahresbericht des Vereins für Naturwissenschaften zu Braunschweig für d. Geschäftsjahr 1879/80. Braunschweig 1880.

Blasius, Wilh., Die Neuaufstellung des Herzogl. Naturhistorischen Museums zu Braunschweig. Braunschweig 1879.

Zeitschrift des Vereins für Lübeckische Geschichte u. Alterthumskunde. Bd. 1, H. 1—3. Bd. 2, H. 1—3. Bd. 3, H. 1—3. Lübeck 1855—76.

Siegel des Mittelalters aus den Archiven der Stadt Lübeck. Herausg. von d. Vereine für Lübeckische Geschichte u. Alterthumskunde. H. 1—10. Lübeck 1856—79.

Neues Lausitzisches Magazin. Im Auftrag d. Oberlausitz. Gesellsch. d. Wissensch. herausgeg. von Prof. Dr. Schönwälder. Bd. 55, Heft 2. Bd. 56, Heft 1. Görlitz 1879. 80.

Zeitschrift des k. sächsischen statistischen Bureau's. Redig. v. V. Böhmert. Jahrg. XXV (1879), Heft 3. 4. Dresden 1880.

Vierteljahrsschrift der astronom. Gesellschaft. Jahrg. XIV, Heft 4. Jahrg. XV, Heft 1—3. Leipzig 1879. 80.

Catalog der Bibliothek der astronom. Gesellschaft. Hsg. v. C. Bruhns. (Suppl.-Heft 3 zum XIV. Jahrg. d. Vierteljahrsschrift.) Leipzig 1880.

Kgl. Sächs. Polytechnicum zu Dresden. Ergänzung zum Programm f. d. Studienjahr 1879/80, enthalt. d. Verzeichniss d. Vorlesungen f. d. Sommersem. 1880. — Programm f. d. Studienjahr, bezieh. Wintersemester 1880/81. Dresden 1880.

Sitzungsberichte der naturwissenschaftl. Gesellschaft Isis in Dresden. Herausg. v. C. Bley. Jahrg. 1879, Juli—Dec. Dresden 1880.

Jahresbericht der Fürsten- und Landesschule Meissen 1879—80. Meissen 1880.

Flathe, Theod., Sanct Afra. Geschichte der k. sächs. Fürstenschule zu Meissen. Leipzig 1879.

Jahresbericht der königl. sächs. Fürsten- und Landesschule zu Grimma 1879—80. Grimma 1880.

Zeitschrift f. d. gesammten Naturwissenschaften. Hsg. von C. G. Giebel. Dritte Folge. 1879. Bd. 4 (der ganzen Reihe 52. Bd.). Berlin 1879.

Die Fortschritte der Physik im J. 1874. Dargestellt von der physikal. Gesellsch. in Berlin. Jahrg. 30, Abth. 1. 2. Berlin 1878. 79. — Im J. 1875. Jahrg. 31, Abth. 1. 2. Berlin 1879. 80.

Berichte der deutschen chemischen Gesellschaft zu Berlin. Jahrg. XII, No. 19. Jahrg. XIII, No. 1—18. Berlin 1879. 80.

Furtwängler, Ad., Der Satyr aus Pergamon. XL. Programm z. Winckelmannsfeste der archaeologischen Gesellschaft zu Berlin. Berlin 1880.

Publicationen des Astrophysikalischen Observatoriums zu Potsdam. Bd. 1. Potsdam 1879.

Siebenundfünfzigster Jahresbericht der Schlesischen Gesellschaft für vaterländische Cultur. Enthält den Generalbericht über die Arbeiten und Veränderungen der Gesellschaft im J. 1879. Breslau 1880.

Schriften der physikalisch-ökonom. Gesellschaft zu Königsberg. Jahrg. 18 (1877), Abth. 2. Jahrg. 19 (1878), Abth. 1. 2. Jahrg. 20 (1879), Abth. 1. 2. Jahrg. 21 (1880), Abth. 1. Königsb. d. J.

Bericht über die im J. 1879 den Herzogl. Sammlungen des Schlosses Friedenstein zugegangenen Geschenke. Gotha 1880.

Pertsch, Wilh., Die arabischen Handschriften der Herzogl. Bibliothek zu Gotha. Bd. 2, Heft 2. Gotha 1880.

Acta Academiae Carolinae Leopoldinae Caesareae German. naturae curiosorum. Vol. 37—40. Dresden, Halle 1875—78.

Leopoldina. Amtliches Organ der kais.-leopoldinisch-carolinisch-deutschen Akademie der Naturforscher. Heft XV, No. 9—12. 21. 22. Heft XVI, No. 1—20. Halle 1879. 80.

Bericht über die Sitzungen der Naturforschenden Gesellschaft zu Halle i. J. 1879. Halle 1879.

Ergebnisse der Beobachtungsstationen an den deutschen Küsten über die physikalischen Eigenschaften der Ostsee u. Nordsee u. die Fischerei. Jahrg. 1879, Heft 8—12. Jahrg. 1880, Heft 1—6. Berlin 1879. 80.

Gemeinfassliche Mittheilungen aus den Untersuchungen der Commission zur wissenschaftl. Untersuchung der deutschen Meere. Kiel 1880.

Erster Jahresbericht der Geographischen Gesellschaft zu Hannover. 1879.

Jahresbericht des physikal. Vereins zu Frankfurt a. M. für das Rechnungsjahr 1878—1879. Frankfurt a. M. 1880.

Sitzungsberichte der physikal.-medicinischen Societät in Erlangen. Heft 11. (Nov. 1878 — Aug. 1879). Erlangen 1879.

Anzeiger für Kunde der deutschen Vorzeit. Organ des Germanischen Museums. N. F. Jahrg. 26 (1879), No. 1—12. Nürnberg d. J. — 25. Jahresbericht des Germanischen Nationalmuseums.

Verhandlungen der physikal.-medicin. Gesellsch. in Würzburg. Neue Folge. Bd. XIV, Heft 1—4. Würzburg 1880.

Vierteljahrshefte für Württembergische Geschichte u. Alterthumskunde. Herausg. von d. Kgl. Statist.-topogr. Bureau. Jahrg. 2, Heft 1—4. Stuttg. 1879.

Verhandlungen des naturhistor.-medicin. Vereins zu Heidelberg. Neue Folge. Bd. II, Heft 5. Heidelberg 1880.

Neunzehnter Bericht der Oberhessischen Gesellschaft für Natur- und Heilkunde. Giessen 1880.

Jahrbücher des Nassauischen Vereins für Naturkunde. Jahrg. 31 u. 32. Wiesbaden 1878. 79.

Bericht der Wetterauischen Gesellschaft für die gesammte Naturkunde zu Hanau über den Zeitraum vom 31. Dec. 1873 bis 25. Jan. 1879. Hanau 1879.

Verhandlungen der Schweizerischen naturforschenden Gesellschaft in Bern, 1878 (61. Jahresversammlung). Bern 1879; in St. Gallen, 1879 (62. Jahresversammlung). St. Gallen 1879.

Basler Chroniken. Hrsg. von der histor. und antiquarischen Gesellschaft in Basel. Bd. 2. Hrsg. v. Wilh. Vischer u. Hnr. Boos. Leipzig 1880.

Mittheilungen der naturforschenden Gesellschaft in Bern aus d. J. 1878. No. 937—61; aus d. J. 1879 (No. 962—78). Bern 1879. 80.

Jahresbericht der naturforschenden Gesellschaft Graubündens. Neue Folge. Jahrg. XXII (Vereinsjahr 1877—78). Chur 1879.

Mémoires de la Société de physique et d'histoire naturelle de Genève. T. XXVI, P. 2. Genève 1879.

Verhandelingen d. Kon. Akad. v. Wetenschappen. Afdeel. Letterkunde. Deel XII. Amsterdam 1879. — Afdeel. Natuurkunde. Deel XIX. Amsterdam 1879.

Verslagen en Mededeelingen der Kon. Akad. v. Wetensch. Afdeel. Letterkunde. II. Reeks. Deel 8. Amsterdam 1879. — Afdeel. Natuurkunde. II. Reeks. Deel 14. Amsterdam 1879.

Jaarboek van de Kon. Akad. v. Wetensch. gevestigd te Amsterdam, voor 1878. Amsterdam 1878.

Processen-Verbaal van de gewone Vergaderingen d. Kon. Akad. v. Wetensch. te Amsterdam. Afdeel. Natuurkunde. Mei 1878 — April 1879.

Esseiva, Petr., Virginis maturioris querelae. Elegia praemio aureo ornata. Acc. Elegia Joannis van Leeuwen. Amstelod. 1879.

Programma certaminis poetici ab Academia Regia disciplinarum Neerlandica ex legato Hoeufftiano indicti in annum 1880.

Verslag van den staat der Sterrenwacht te Leiden in het tijdvak van d. 1. Juli 1879 tot de laatste dagen der maand Juni 1880, uitgebr. door H. G. van de Sande Bakhuyzen. Amsterdam 1880.

Onderzoekingen gedaan in het physiologisch Laboratorium der Utrechtsche Hoogeschool. Uitgeg. door F. C. Donders en Th. W. Engelmann. Derde Reeks. V, Aflev. 3. Utrecht 1880.

Natuurkundige Verhandelingen van de Hollandsche Maatschappij der wetenschappen, te Haarlem. III. Verzameling. Deel 4, Stuk 1 (Hoffmann, C. K., Untersuchungen über d. Bau u. d. Entwicklungsgesch. d. Hirundineen). Haarlem 1880.

Archives néerlandaises des sciences exactes et naturelles, publ. par la Société Hollandaise des sciences à Harlem. T. XIV, Livr. 3—5. T. XV, Livr. 1. 2. Harlem 1879. 80.

Programme de la Société Hollandaise des sciences, à Harlem. Année 1880. — Naamlijst van directeuren en leden van de Hollandsche Maatschappij der wetensch. te Haarlem. 21. Mei 1879.

Archives du Musée Teyler. Vol. V, 2. Partie. Haarlem 1880.

Verhandelingen rakende den natuurlijken en geopenbaarden Godsdienst, uitgeg. door Teylers Godgeleerd Genootschap. N. Ser. Deel 7. 8. Haarlem 1879. 80.

Annales de la Société entomologique de Belgique. T. XXII. Bruxelles 1879.

Comptes-rendus de la Société entomologique de Belgique. Sér. II. No. 69—72. — Assemblée générale extraordinaire convoquée p. la commémoration de la fondation de la Société entomol. de Belgique le 16. Oct. 1880. Bruxelles 1880.

Annales de l'Académie d'archéologie de Belgique. T. XXXV (= III. Sér., T. V). Anvers 1879.

Académie d'archéologie de Belgique. Bulletin II (III. Sér. des Annales), Fasc. 4. 5. Anvers 1877. 78. Bulletin (III. Sér. des Annales), Seconde Partie, 2—5. Anvers 1879. 80.

Bullettino dell' Istituto di corrispondenza archeologica per l'anno 1879, No. 12 (und Elenco de' participanti alla fine dell' anno 1879). 1880, No. 1—11. Roma 1880.

Atti della R. Accademia dei Lincei. Anno CCLXXVI (1878—79). Ser. III. Memorie della classe di scienze fisiche, matem. e naturali, Vol. 3. 4. Roma 1879. — Memorie della classe di scienze morali, storiche e filologiche. Vol. 3. Roma 1879. — Anno CCLXXVII (1879—80). Ser. III. Transunti. Vol. 4, Fasc. 1—7. Roma 1880. — Anno CCLXXVIII (1880—81). Ser. III. Transunti. Vol. 5, Fasc. 1. Roma 1881.

Memorie del R. Istituto Lombardo di scienze e lettere. Classe di lettere e scienze morali e politiche. Vol. XIV (Ser. III, Vol. V), Fasc. 1. Milano 1880.

R. Istituto Lombardo di scienze e lettere. Rendiconti. Serie II. Vol. XII. Milano 1879.

Memorie della R. Accademia di scienze lettere ed arti in Modena. T. 18. 19. Modena 1878. 79.

Atti dell' Accademia R. delle scienze di Torino. Vol. XV, Disp. 1—8. Torino 1879. 80.

Bollettino meteorologico ed astronomico dell' Osservatorio della Reg. Università di Torino. Anno XIV (1879), Parte meteorologica. Torino 1880.

Atti della Società Toscana di scienze naturali residente in Pisa. Vol. IV, Fasc. 2. Pisa 1880.

Processi verbali della Società Toscana di scienze naturali. Adunanza del 11. genn., 14. marzo, 9. maggio 1880.

Annali della R. Scuola normale superiore di Pisa. Della Serie Vol. 4 (Scienze fisiche e matemat., Vol. 2). Vol. 5 (Filosofia e filologia, Vol. 3). Pisa 1879. 80.

Pubblicazioni del R. Istituto di studi superiori pratici e di perfezionamento in Firenze. Sezione di filosofia e filologia. Vitelli, G., Intorno ad alcuni luoghi della Ifigenia in Aulide di Euripide. Paoli, C., Del papiro, specialmente considerato come materia che ha servito alla scrittura. Milani, L. A., Il mito di Filottete nella letteratura classica e nell' arte figurata. — Accademia orientale. Il commento medio di Averroe alla Retorica di Aristotele. Pubbl. p. la prima volta nel testo arabo da F. Lasinio. Fasc. 2. 3. La Ribellione di Masacado e di Sumitomo. Testo giapponese, pubbl. p. cura di L. Nocentini. La Ribellione di Masacado ecc., trad. da L. Nocentini. Repertorio sinico-giapponese, Fasc. 3. —

Sezione di scienze fisiche e naturali. Eccher, A., Sulla teoria fisica dell' elettrotono nei nervi. Ders., Sulle forze elettromotrici sviluppate dalle soluzioni saline. Tommasi, D., Ricerche sulle formole di costituzione dei composti ferrici. P. 1. Idrati ferrici. Meucci, F., Il globo celeste arabico del sec. XI. esistente nel Gabinetto degli strumenti antichi di astronomia ecc. Cavanna, G., Ancora sulla polimelia nei batraci anuri. Firenze 1877—79.

Philosophical Transactions of the R. Society of London. For the year 1879. Vol. 170, P. 1. 2. London 1879. 80. For the year 1880. Vol. 171, P. 1. London 1880. — The R. Society. 1st Dec. 1879 (London 1880).

Proceedings of the R. Society of London. Vol. XXIX, No. 197—99. Vol. XXX, No. 200—205. London 1879. 80.

Proceedings of the R. Institution of Great Britain. Vol. IX, P. 1. 2. (No. 70. 71.) London 1879.

Journal of the R. Microscopical Society, containing its Transactions and Proceedings. Vol. II, No. 7a. Vol. III, No. 1—6. 6a. London and Edinburgh 1879. 80.

Memoirs of the R. Astronomical Society. Vol. 41 (1879). 44 (1877—79). London 1879.

Catalogue of Oriental coins in the British Museum. Vol. 4. 5. London 1879. 80.

Proceedings of the R. Irish Academy. Ser. II. Polite literature and antiquities, Vol. II, No. 1. Science, Vol. III, No. 4. Dublin 1879. 80.

The Transactions of the R. Irish Academy. Vol. XXVI. Science. No. 22. Dublin 1879. — Irish Manuscript Series. Vol. I, P. 1. Dublin 1880.

Royal Irish Academy. Cunningham Memoirs. No. 1 (Casey, John, On cubic transformations). Dublin 1880.

The Journal of the R. Dublin Society. Vol. 7, No. 45. Dublin 1878.

The scientific Proceedings of the R. Dublin Society. N. Ser. Vol. 1, P. 1—3. Vol. 2, P. 1—6. Dublin 1877—80.

The scientific Transactions of the R. Dublin Society. N. Ser. Vol. 1, No. 1—12. Vol. 2, No. 1. 2. Dublin 1877—80.

Proceedings of the Belfast Natural History and Philosophical Society for the session 1878—79, 1879—80. Belfast 1880.

Journal de l'École polytechnique, publ. p. le Conseil d'instruction de cet établissement. Cah. 46. T. 28; Cah. 47. T. 28. Paris 1879. 80.

Comité international des poids et mesures. Procès-verbaux des séances de 1879. Paris 1880.

Mémoires de la Société des sciences physiques et naturelles de Bordeaux. II. Série. T. III, Cah. 3. T. IV, Cah. 1. Paris 1880.

Mémoires de l'Académie des sciences, belles-lettres et arts de Lyon. Classe des lettres. T. 18. Paris, Lyon 1878—79. — Classe des sciences. T. 23. Paris, Lyon 1878—79.

Annales de la Société Linnéenne de Lyon. Année 1877. 78 (Nouv. Sér. T. 24. 25). Paris, Lyon 1878.

Académie des sciences et lettres de Montpellier. Mémoires de la section des lettres. T. VI, Fasc. 4 (Années 1878—79). Montpellier 1880. — Mémoires de la section de médecine. T. V, Fasc. 2 (Années 1877—79). Montpellier 1879. — Mémoires de la section des sciences. T. IX, Fasc. 3 (Année 1879). Montpellier 1880.

Oversigt over det Kong. Danske Videnskabernes Selskabs Forhandlinger og dets Medlemmers Arbejder i aaret 1879, No. 3. 1880, No. 1.

Det Kong. Danske Videnskabernes Selskabs Skrifter. 5. Række. Naturvid. og mathemat. Afd. Bd. XI, No. 6 (Hannover, Ad., Primordialbrusken og dens Forbening i det meneskelige Kranium for Fødselen). Bd. XII, No. 5 (Thiele, T. N., Om Anvendelse af mindste Kvadraters Methode i nogle Tilfælde etc.). Kjøbenhavn 1880.

Den Gronlandske Ordbog, omarbeidet af Sam. Kleinschmidt, udg. paa Foranstaltning af Ministeriet for Kirke- og Underviisningsvæsenet, og med det Kong. Danske Vidensk. Selskabs Understøttelse ved H. F. Jorgensen. Kjøbenhavn 1871.

Entomologisk Tidskrift, på föranstaltende af Entomologiska Föreningen i Stockholm utg. af J. Spångberg. Bd. 1, H. 1. 2. Stockholm 1880.

Nova Acta Reg. Societatis scientiarum Upsaliensis. Ser. III. Vol. 10, Fasc. 2. Upsaliae 1879.

Bulletin météorologique mensuel de l'Observatoire de l'Université d'Upsal. Vol. VIII (1876). IX (1877). XI (1879), No. 7—12. Upsal 1877—80.

Tromsø Museums Aarshefter. II. Tromsø 1879.

Mémoires de l'Académie Impériale des sciences de St.-Pétersbourg. VII. Série. T. XXVI, No. 12—14. T. XXVII, No. 1—12. St.-Pétersbourg 1879. 80.

Bulletin de l'Acad. Impér. des sciences de St.-Pétersbourg. T. XXVI, No. 1. 2. St.-Pétersbourg 1880.

Compte-rendu de la Commission Impériale Archéologique pour l'année 1877. Avec un atlas. St.-Pétersbourg 1880.

Acta horti Petropolitani. T. VI, Fasc. 2. St.-Petersburg 1880.

Annalen d. physikalischen Centralobservatoriums, herausgeg. von H. Wild. Jahrg. 1878, Th. 1. 2. St.-Petersburg 1879.

Annales de l'Observatoire de Moscou. Vol. VI, Livr. 1. 2. Moscou 1879. 80.

Bulletin de la Société Impér. des Naturalistes de Moscou. Année 1879, No. 2—4. 1880, No. 1. 2. Moscou 1879. 80.

Izvěstija i učenyja zapiski Imper. Kazanskago Universiteta. God 46 (1879). Kazan 1879.

Acta Societatis scientiarum Fennicae. T. XI. Helsingforsiae 1880.

Öfversigt af Finska Vetenskaps-Societetens Förhandlingar. XXI (1878—79). Helsingfors 1879.

Observations météorologiques publ. p. la Société des sciences de Finlande. Année 1877. 78. Helsingfors 1879. 80.

Bidrag till kännedom af Finlands natur och folk, utg. af Finska Vetenskaps-Societet. Häftet 32. Helsingfors 1879.

*Ἀναγραφὴ τῶν ἐπὶ τὸ ἀκαδημικὸν ἔτος* 1879/80 *ἀρχῶν τοῦ ἐθνικοῦ Πανεπιστημίου. Ἀθήνησιν* 1879.

*Κρίσις ἐπὶ τοῦ οἰκονομείου διαγωνίσματος τοῦ κατὰ τὸ* 1879, *ὑπὸ Θ. Ἀφεντούλη. Ἀθήνησιν* 1879.

Postolacca, Achill., Synopsis numorum veterum qui in Museo numismatico Athenarum publico adservantur. Athenis 1878.

Heldreich, Theod. de, Catalogus systemat. herbarii Theodori G. Orphanidis. Fasc. I. Leguminosae. Florentiae 1877.

Proceedings of the American Philosophical Society, held at Philadelphia, for promoting useful knowledge. Vol. XVIII, July—Dec. 1879 (No. 104). Jan.—March 1880 (No. 105).

Journal of the American Oriental Society. Vol. X, No. 2. New Haven 1880.

Proceedings of the American Oriental Society. Oct. 1878 — Oct. 1879.

American Journal of Mathematics pure and applied. Publ. under the auspices of the Johns Hopkins University. Vol. II, No. 3. 4. Vol. III. No. 1. Baltimore, Cambridge, Mass. 1879. 80.

Memoirs of the Boston Society of Natural History. Vol. III, P. I, No. 3. (Scudder, Sam. H., Palaeozoic Cockroaches). Boston 1879.

Proceedings of the Boston Society of Natural History. Vol. XX, P. 2. 3. Boston 1879. 80.

Occasional Papers of the Boston Society of Natural History. III (Crosby, W. O., Contributions to the geology of Eastern Massachusetts). Boston 1880.

Proceedings of the American Academy of Arts and Sciences. New Series. Vol. VII (Whole Series Vol. XV), P. 1. From May 1879 to Dec. 1879. Selected from the Records. Boston 1880.

Bulletin of the Museum of comparative Zoölogy, at Harvard College, Cambridge Mass. Vol. V, No. 15. 16. Vol. VI, No. 1—11. Vol. VII (Geological Series Vol. I), No. 1. Cambridge Mass. 1879. 80.

Memoirs of the Museum of comparative Zoölogy, at Harvard College, Cambridge Mass. Vol. VI, No. 2. VII, No. 1. 2 (P. 1). Cambridge Mass. 1880.

Annual Report of the Curator of the Museum of comparative Zoölogy, at Harvard College, Cambridge Mass., for 1878/79. 1879/80. Cambridge Mass. 1879. 80.

Jahresbericht des naturhistorischen Vereins von Wisconsin für d. J. 1879—80. Milwaukee 1880.

Transactions of the Connecticut Academy of arts and sciences. Vol. V, P. 1. New Haven 1880.

Bulletin of the American Geographical Society. 1879, No. 4. New York 1880.

Journal of the American Geographical Society of New York. Vol. X (1878). New York.

Proceedings of the Academy of Natural Sciences of Philadelphia. 1879, P. 1—3. Philadelphia 1879. 80.

The Transactions of the Academy of science of St. Louis. Vol. IV, No. 1. St. Louis, Mo. 1880.

Eleventh annual Report of the U. S. geological and geographical Survey of the Territories, embracing Idaho and Wyoming, being a report of progress of the exploration for the year 1877. By F. V. Hayden. Washington 1879.

Bulletin of the U. S. geological and geographical Survey of the Territories. Vol. V, No. 2—4. Washington 1879. 80.

Report of the U. S. geological Survey of the Territories. Vol. XII (Leidy, Jos., Fresh-water Rhizopods of North America). Washington 1879.

Department of the Interior. U. S. geological Survey of the Territories. Miscellaneous Publications. No. 12 (Allen, J. A., History of North American Pinnipeds). Washington 1880.

Washington Observations for 1876, App. 1 (Holden, E. S., A subject-index to the publications of the U. S. Naval Observatory 1845—75). Washington 1879.

Catalogue of the library of the U. S. Naval Observatory, Washington. P. 1. Astronomical bibliography. By E. S. Holden. Washington. 1879.

Report of the Superintendent of the U. S. Coast Survey, showing the progress of the work for the fiscal year ending with June 1876. Text and Progress sketches. Washington 1879.

U. S. Northern Boundary Commission. Declination of fixed stars, by Lewis Boss. o. O. u. J.

Woodbridge, W. E., Measurement of powder pressures in cannon by means of the registered compression of oil (Appendix M to the Report of the Chief of Ordnance, 1879). Washington 1879.

Annual Report of the Board of Regents of the Smithsonian Institution for the year 1878. Washington 1879.

Smithsonian Contributions to knowledge. Vol. XXII. Washington 1880.

Smithsonian Miscellaneous Collections. Vol. XVI. XVII. Washington 1880.

Report of the Trustees of the ‚James Lick Trust' of observations made on Mt. Hamilton with reference to the location of Lick Observatory. By S. W. Burnham. Chicago 1880.

Boletin de la Academia Nacional de ciencias de la Republica Argentina. T. 3, Entrega 1. Cordoba 1879.

Verhandelingen van het Bataviaasch Genootschap van kunsten en wetenschappen. Deel 39, St. 2. Deel 41, St. 1. Batavia 1880.

Notulen van de algemeene en bestuurs-vergaderingen van het Bataviaasch Genootschap van kunsten en wetensch. Deel XVII (1879), No. 2—4. Batavia 1880.

Van der Chijs, J. A., Register op de Notulen der vergaderingen van het Batav. Genootschap van kunsten en wetensch. over de jaren 1867—78. Batavia 1879.

Tijdschrift voor Indische taal-, land- en volkenkunde, uitgeg. door het Batav. Genootsch. van kunsten en wetensch. Deel XXV, Afl. 4—6. XXVI, Afl. 1. Batavia 1879. 80.

Transactions and Proceedings of the R. Society of Victoria. Vol. XVI. Melbourne 1880.

---

## Einzelne Schriften.

Wex, Gust. Ritter v., Zweite Abhandlung über die Wasserabnahme in den Quellen, Flüssen und Strömen bei gleichzeitiger Steigerung der Hochwässer in den Culturländern (Sep.-Abdr. aus d. Zeitschrift des österreich. Ingenieur- u. Architekten-Vereins, Jahrg. 1879, H. 6—9). Wien 1879.

Blasius, Wilh., Oeffentliche Anstalten für Naturgeschichte und Alterthumskunde in Holland und dem nordwestlichsten Theile von Deutschland. Braunschweig 1880.

Miller-Hauenfels, Alb. Ritter v., Die Dual-Functionen und die Integration der elliptischen und hyperelliptischen Differenziale. Graz 1880.

Télfy, Joann. B., Opuscula graeca. Budapest 1880.

Landau, L. R., Religion und Politik. Nebst Nachtrag zur Sammlung kleiner Schriften. Budapest u. Leipzig 1880.

Scheffler, Herm., Die Naturgesetze und ihr Zusammenhang mit den Principien der abstracten Wissenschaften. Th. 3, Lief. 6—8. Leipzig 1880.

Souvenir de l'Amphiorama ou la vue du monde pendant son passage dans une comète pour la première fois observé par Franç. W. C. Trafford. Zürich 1880.

Münster-Blätter. Im Auftrag des Münster-Comités hrsg. von Frdr. Pressel. Heft 2. Ulm 1880.

Schell, Wilh., Theorie der Bewegung und der Kräfte. Ein Lehrbuch der theoret. Mechanik. 2. Aufl. Bd. 2. Leipzig 1880.

Henry, James, Aeneidea, or critical, exegetical and aesthetical remarks on the Aeneis. Vol. II continued (pag. 639—681). Dublin 1879.

Robinski, De l'influence des eaux malsaines sur le développement du typhus exanthématique. Traduction. Paris 1880.

Ferrari, Gaet., Monog'ottica. Considerazioni storico-critiche e filosofiche intorno alla ricerca di una lingua universale. 2. ediz. Modena 1877.

Barone, Gius., Epimenide di Creta e le credenze religiose de' suoi tempi. Studio storico-critico-filologico. Napoli 1880.

Holtz, W., Ueber die Zunahme der Blitzgefahr und ihre vermuthlichen Ursachen. Greifswald 1880.

Oehmichen, Gust., Plinianische Studien zur geographischen und kunsthistorischen Literatur. Erlangen 1880.

Fiedler, Wilh., Geometrische Mittheilungen. I. III. V. (Sep.-Abdr. aus d. Vierteljahrsschrift d. Naturforschenden Gesellschaft in Zürich, Bd. 24. 25.)

**M. W. Drobisch,** *Ueber die nach der Wahrscheinlichkeitsrechnung zu erwartende Dauer der Ehen.* *)

Bezeichnen $l_m$, $l_{m+1}$, $l_{m+2}$ ... die der Sterblichkeitstafel zu entnehmenden Zahlen der am Ende der Lebensjahre $m$, $m+1$, $m+2$ ... lebenden Männer, so sind die Wahrscheinlichkeiten, dass ein Mann von $m$ Jahren nach 1, 2, 3 ... Jahren noch leben wird,

$$\frac{l_{m+1}}{l_m}, \quad \frac{l_{m+2}}{l_m}, \quad \frac{l_{m+3}}{l_m} \text{ u. s. f.}$$

Haben $l_f$, $l_{f+1}$, $l_{f+2}$ ... dieselbe Bedeutung in Bezug auf die Frauen, so sind ebenso die Wahrscheinlichkeiten, dass eine Frau von $f$ Jahren nach 1, 2, 3 ... Jahren noch leben wird,

$$\frac{l_{f+1}}{l_f}, \quad \frac{l_{f+2}}{l_f}, \quad \frac{l_{f+3}}{l_f} \text{ u. s. f.}$$

Die Producte dieser Wahrscheinlichkeiten

$$\frac{l_{m+1}\, l_{f+1}}{l_m\, l_f}, \quad \frac{l_{m+2}\, l_{f+2}}{l_m\, l_f}, \quad \frac{l_{m+3}\, l_{f+3}}{l_m\, l_f} \text{ u. s. f.}$$

sind die Wahrscheinlichkeiten, dass dieser Mann und diese Frau nach 1, 2, 3 ... Jahren noch verbunden leben werden, und die Summe dieser Wahrscheinlichkeiten ist die Zahl der Jahre, bis zu deren Ende sie verbunden zu leben hoffen dürfen. Es kann daher diese Zahl insofern als die Dauer der Verbindung, oder, wenn diese eine eheliche ist, als Dauer der Ehe bezeichnet werden. Hiernach ist nun die Dauer der Ehe zwischen einem Mann von $m$ und einer Frau von $f$ Jahren

$$(1) \qquad E_{m,f} = \frac{l_{m+1}\, l_{f+1} + l_{m+2}\, l_{f+2} + l_{m+3}\, l_{f+3} + \cdots}{l_m\, l_f}.$$

In dieser Formel wird vorausgesetzt, dass beide Ehegatten mit den angegebenen Wahrscheinlichkeitsgraden zu dem höchsten ihrem Geschlecht erreichbaren Alter gelangen werden. Nach

*) Vorgetragen und übergeben in der Sitzung am 1. März 1880.

Brune's Sterblichkeitstafel beträgt dasselbe für die Männer 94, für die Frauen 99 Jahre. Daher bricht in der vorstehenden Formel der Dividend mit dem Gliede $l_{m+z}\, l_{f+z}$ ab, in welchem $z = 94 - m$ ist.

Dieselben Wahrscheinlichkeiten bestimmen bekanntlich auch den gegenwärtigen Werth einer Rente $p$, welche das Paar am Ende jedes Jahres ihrer Verbindung zu beziehen hat, und die daher die Verbindungsrente heisst. Da es nämlich nur im Grade $\frac{l_{m+n}\, l_{f+n}}{l_m\, l_f}$ wahrscheinlich ist, dass das Ehepaar nach $n$ Jahren noch verbunden leben wird, so ist für dieses $n$te Jahr die Rente $p$ nur mit

$$\frac{l_{m+n}\, l_{f+n}}{l_m\, l_f}\, p$$

in Ansatz zu bringen. Ein Capital $c$ giebt aber, wenn es zum Zinsfuss $r$ mit Zins auf Zins genutzt wird, nach $n$ Jahren diesen Werth, wenn

$$c\, r^n = \frac{l_{m+n}\, l_{f+n}}{l_m\, l_f}\, p\,;$$

also ist, wenn man noch $\frac{1}{r} = \varrho$ setzt,

$$c = \frac{l_{m+n}\, l_{f+n}}{l_m\, l_f}\, p\, \varrho^n.$$

Setzt man nun in diesem Ausdruck successive $n = 1, 2, 3, \ldots 94 - m$, so ist die Summe dieser Werthe von $c$ das Capital, welches, mit Zins auf Zins genutzt, alle am Ende dieser Jahre nach ihren Wahrscheinlichkeitsgraden fälligen Renten deckt, und dieses der Zeitwerth der Verbindungsrente, nämlich

$$(2) \qquad V_{m,f} = \frac{p\,(l_{m+1}\, l_{f+1}\, \varrho + l_{m+2}\, l_{f+2}\, \varrho^2 + l_{m+3}\, l_{f+3}\, \varrho^3 + \ldots)}{l_m\, l_f}.$$

Offenbar kann man die Formel (1) für die Ehedauer hieraus auch als speciellen Fall ableiten, der sich ergiebt, wenn man $p = 1$ und $\varrho = 1$ setzt.

In demselben Zusammenhang steht schon die Formel für den Zeitwerth einer Leibrente, den eine Person, z. B. eine Frau von $f$ Jahren, für ihre Lebenszeit zu beziehen hat, mit der Formel, welche die Zahl der Jahre bestimmt, bis zu deren Ende zu leben dieselbe hoffen darf. Durch noch einfachere Betrachtungen als die, welche auf den Zeitwerth der Verbindungsrente führen, ergiebt sich nämlich als der Zeitwerth der Leibrente $p$ einer Frau von $f$ Jahren

$$(3) \qquad R_f = \frac{p\,(l_{f+1}\,\varrho + l_{f+2}\,\varrho^2 + l_{f+3}\,\varrho^3 + \cdots + l_{f+z}\,\varrho^z)}{l_f}$$

wo $z = 99 - f$. Man kann diese Formel sogar als speciellen Fall der vorstehenden unter (2) ansehen, wenn man in dieser

$$\frac{l_{m+1}}{l_m} = \frac{l_{m+2}}{l_m} = \frac{l_{m+3}}{l_m} \ldots = 1 \text{ setzt,}$$

was bedeuten würde, dass die Frau mit einem Manne verbunden sei, von dem es gewiss wäre, dass er nach 1, 2, 3 ... Jahren noch leben, mithin die Frau überleben werde. Setzt man auch in dieser Formel $p = 1$ und $\varrho = 1$, so ergiebt sich die, auch leicht direct abzuleitende für die Zahl der Jahre, bis zu deren Ende zu leben die Frau hoffen darf, nämlich

$$(4) \qquad D_f = \frac{l_{f+1} + l_{f+2} + l_{f+3} + \cdots + l_{f+z}}{l_f},$$

wo $z = 99 - f$, und kann man diese Zahl insofern als die Lebensdauer der Frau bezeichnen.

Gleichwohl versteht man unter der mittleren Lebensdauer eine Zahl, die um ein halbes Jahr grösser als die nach der vorstehenden Formel berechnete, daher $= \frac{1}{2} + D_f$ ist. Das Wort Lebensdauer hat hier aber einen andern Sinn und bedeutet nicht die Zahl der Jahre, bis zu deren Ende (als terminus ad quem) die Frau zu leben, sondern die Zahl der Jahre, innerhalb welcher am Leben zu sein, oder welche zu durchleben dieselbe hoffen darf (die summa vitae).

Sind nämlich von den $l_f$ im Alter $f$ lebenden Frauen (oder auch Männern) nach $n$ Jahren noch $l_{f+n}$, nach $n+1$ Jahren noch $l_{f+n+1}$ am Leben, so sind im $(n+1)$ten Jahre $l_{f+n} - l_{f+n+1}$ gestorben. Sie sind aber nicht erst am Ende dieses Jahres, sondern allmählich innerhalb desselben gestorben. Man wird daher annehmen können, dass innerhalb der ersten Hälfte des Jahres die Hälfte der im ganzen Jahr gestorbenen, also $\frac{1}{2}(l_{f+n} - l_{f+n+1})$ noch am Leben war. Und da $l_{f+n+1}$ dieses Jahr überlebten, so ist im Ganzen die Zahl derer, die innerhalb des $(n+1)$ten Jahres gelebt haben,

$$\tfrac{1}{2}(l_{f+1} - l_{f+n+1}) + l_{f+n+1} = \tfrac{1}{2}(l_{f+n} + l_{f+n+1}),$$

das arithmetische Mittel zwischen den Zahlen derer, die am Anfang und Ende dieses Jahres am Leben waren. Setzt man nun successive $n = 0, 1, 2, 3 \ldots$, so erhält man die Zahlen derer, die innerhalb des 1sten, 2ten, 3ten, 4ten Jahres etc. am Leben waren, und, wenn man diese Zahlen durch $l_f$ dividirt, die Wahrschein-

lichkeiten, dass die Frau (oder der Mann) vom Alter $f$ innerhalb dieser Jahre noch am Leben sein werde, nämlich

$$\tfrac{1}{2}\left(1+\frac{l_{f+1}}{l_f}\right),\ \tfrac{1}{2}\left(\frac{l_{f+1}+l_{f+2}}{l_f}\right),\ \tfrac{1}{2}\left(\frac{(l_{f+2}+l_{f+3})}{l_f}\right),\ \ldots,$$

wovon die Summe offenbar $\tfrac{1}{2}+D_f$ ist.

In gleicher Weise pflegt man nun auch unter der mittleren Dauer der Ehe eines Paars, in welchem das Alter des Mannes $m$, das der Frau $f$ Jahre beträgt, eine Zahl zu verstehen, die um ein halbes Jahr grösser als die nach der Formel (1) berechnete, also gleich $\tfrac{1}{2}+E_{m,f}$ ist. Das Wort mittlere Ehedauer bedeutet aber dann, wie bei der mittleren Lebensdauer, nicht die Zahl der Jahre bis zu deren Ende, sondern diejenige, innerhalb welcher die Ehegatten verbunden zu leben, welche sie mit einander zu durchleben hoffen dürfen (die summa vitae consociatae). Diese Vergrösserung um ein halbes Jahr ergiebt sich in ganz ähnlicher Weise wie bei der mittleren Lebensdauer. Denn sei $\lambda_0$ eine grössere Anzahl von Ehepaaren des angegebenen Alters, $\lambda_n$ die Zahl derjenigen von ihnen, die nach $n$ Jahren, und $\lambda_{n+1}$ die Zahl derselben, die nach $n+1$ Jahren noch verbunden leben; so sind im $(n+1)$ten Jahre $\lambda_n-\lambda_{n+1}$ Ehen durch den Tod des Mannes oder der Frau aufgelöst worden. Da aber dies allmählich innerhalb dieses Jahres, nicht plötzlich am Ende desselben geschehen ist, so folgt auf dieselbe Weise wie bei der mittleren Lebensdauer, dass die Zahl der Ehepaare, die innerhalb dieses $(n+1)$ten Jahres verbunden leben werden, mit $\tfrac{1}{2}(\lambda_n+\lambda_{n+1})$ anzusetzen, daher die Wahrscheinlichkeit des Ehepaares, dieses Jahr verbunden zu durchleben,

$$\tfrac{1}{2}\left(\frac{\lambda_n+\lambda_{n+1}}{\lambda_0}\right)$$

ist. Nun sind aber $\frac{\lambda_n}{\lambda_0}$ und $\frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_0}$ die Wahrscheinlichkeiten, dass das Paar bezw. am Ende des $n$ten und $(n+1)$ten Jahres noch verbunden leben wird, daher $\frac{\lambda_n}{\lambda_0}=\frac{l_{m+n}\,l_{f+n}}{l_m\,l_f}$ und $\frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_0}=\frac{l_{m+n+1}\,l_{f+n+1}}{l_m\,l_f}$, folglich

$$\tfrac{1}{2}\frac{(\lambda_n+\lambda_{n+1})}{\lambda_0}=\tfrac{1}{2}\left(\frac{l_{m+n}l_{f+n}+l_{m+n+1}\,l_{f+n+1}}{l_m\,l_f}\right).$$

Setzt man nun successive $n=0, 1, 2, 3\ldots$ und zieht die Summe, so ergiebt sich

$$\tfrac{1}{2} + \frac{l_{m+1}\, l_{f+1} + l_{m+2}\, l_{f+2} + l_{m+3}\, l_{f+3}}{l_m\, l_f} + \cdots,$$

d. i. $\frac{1}{2} + E_{m,f}$.

---

Die beiliegende Tafel über die Dauer der Ehen ist nach Formel (1) berechnet. Es müssen daher, wenn man die sogenannte mittlere Ehedauer zu wissen verlangt, die in ihr enthaltenen Zahlen um 0,5 vergrössert werden. Eine unmittelbare Anwendung finden aber diese Zahlen, wie sie die Tafel giebt, bei Bestimmung der Wahrscheinlichkeit, dass eine Frau vom Alter $f$ ihren Mann vom Alter $m$ überleben, also Wittwe werden wird, die sich nach Tetens[1]) auf folgende Weise ableiten lässt.

Die Wahrscheinlichkeiten, dass diese Frau nach 1, 2, 3 ... Jahren noch leben wird, sind nach der vorigen Bezeichnung

$$\frac{l_{f+1}}{l_f},\ \frac{l_{f+2}}{l_f},\ \frac{l_{f+3}}{l_f} \ldots;$$

dagegen die Wahrscheinlichkeiten, dass ihr Mann innerhalb dieser Jahre sterben wird (da $l_m - l_{m+1}$, $l_{m+1} - l_{m+2}$, $l_{m+2} - l_{m+3}$ ... die Zahlen der in diesen Jahren sterbenden Männer),

$$\frac{l_m - l_{m+1}}{l_m},\ \frac{l_{m+1} - l_{m+2}}{l_m},\ \frac{l_{m+2} - l_{m+3}}{l_m} \ldots;$$

folglich die Wahrscheinlichkeiten, dass die Frau am Ende dieser Jahre noch leben, ihr Mann aber in diesen Jahren sterben wird,

$$\frac{l_{f+1}}{l_f}\,\frac{(l_m - l_{m+1})}{l_m},\ \frac{l_{f+2}}{l_f}\,\frac{(l_{m+1} - l_{m+2})}{l_m},\ \frac{l_{f+3}}{l_f}\,\frac{(l_{m+2} - l_{m+3})}{l_m} \ldots$$

Die Summe dieser Wahrscheinlichkeiten ist nun die Wahrscheinlichkeit, dass irgend einer dieser einander ausschliessenden Fälle eintreten, also die Frau überhaupt ihren Mann überleben wird. Diese Summe ist aber

$$\frac{l_m\, l_{f+1} + l_{m+1}\, l_{f+2} + l_{m+2}\, l_{f+3} + \cdots}{l_m\, l_f} - \frac{(l_{m+1}\, l_{f+1} + l_{m+2}\, l_{f+2} + l_{m+3}\, l_{f+3} + \cdots)}{l_m\, l_f}.$$

In diesem Ausdruck ist der Subtrahend, nach Formel (1), offenbar $E_{m,f}$, der Minuend aber identisch mit

---

1) Einleitung zur Berechnung der Leibrenten und Anwartschaften, Bd. I. § 168.

$$\frac{l_{m-1}}{l_m}\left(\frac{l_m l_{f+1} + l_{m+1} l_{f+2} + l_{m+2} l_{m+3} + \cdots}{l_{m-1} l_f}\right),$$

d. i. mit $\frac{l_{m-1}}{l_m} E_{m-1, f}$. Und da $\frac{l_m}{l_{m-1}}$ die Wahrscheinlichkeit ist, dass ein Mann von $m - 1$ Jahren noch ein Jahr leben wird, so ist, wenn man $\frac{l_m}{l_{m-1}} = \omega_{m-1}$ setzt, die Wahrscheinlichkeit $W_f$, dass die Frau von $f$ Jahren ihren Mann von $m$ Jahren überleben wird,

(5) $$W_f = \frac{E_{m-1, f}}{\omega_{m-1}} - E_{m, f}.$$

Durch gegenseitige Vertauschung von $m$ und $f$ erhält man die Wahrscheinlichkeit $W_m$, dass umgekehrt der Mann die Frau überleben wird, und da noch der dritte Fall möglich ist, dass beide gleichzeitig [1]) sterben werden, es aber gewiss ist, dass einer dieser drei Fälle eintreten wird, so ist die Wahrscheinlichkeit dieses dritten Falles $1 - W_f - W_m$.

---

Bei Berechnung der beiliegenden Tafel, welcher Brune's Sterblichkeitstafel zu Grunde liegt, und welche sich auf die Ehen beschränkt, die zwischen Männern von 25 bis 90 Jahren und Frauen von 20 bis 95 Jahren, die jedoch um nicht mehr als 30 Jahre jünger und nicht mehr als 15 Jahre älter sind als ihre Männer, stattfinden können, sind folgende zwei Sätze in Anwendung gekommen.

Vertauscht man in Formel (1) $m$ mit $m - 1$ und $f$ mit $f - 1$, so kommt

$$E_{m-1, f-1} = \frac{l_m l_f + l_{m+1} l_{f+1} + l_{m+2} l_{f+2} + \cdots}{l_{m-1} l_{f-1}}$$

$$\text{d. i.} = \frac{l_m l_f}{l_{m-1} l_{f-1}} (E_{m, f} + 1)$$

Setzt man $\frac{l_m}{l_{m-1}} = \omega_{m-1}$ und $\frac{l_f}{l_{f-1}} = \omega'_{f-1}$, so sind $\omega_{m-1}$ und $\omega'_{f-1}$ die Wahrscheinlichkeiten, dass ein Mann von $m-1$ Jahren, bezw. eine Frau von $f - 1$ Jahren, noch ein Jahr leben wird, wovon die Sterblichkeitstafel die Zahlwerthe unmittelbar angiebt. Es ist demnach auch

(6) $$E_{m-1, f-1} = (E_{m, f} + 1)\, \omega_{m-1}\, \omega'_{f-1}.$$

1) Was hier jedoch nur so viel bedeutet als: in einem und demselben Jahre. Denn die Wahrscheinlichkeit, dass sie in einem und demselben Moment sterben werden, ist verschwindend klein.

und hieraus weiter

$$E_{m-2,\,f-2} = (E_{m-1,\,f-1} + 1)\,\omega_{m-2}\,\omega'_{f-2}$$
$$E_{m-3,\,f-3} = (E_{m-2,\,f-2} + 1)\,\omega_{m-3}\,\omega'_{f-3}$$
u. s. f.

Ein zweiter Satz ist folgender. Vertauscht man in Formel (1) $m$ mit $m-k$ und $f$ mit $f-k$, wo $k$ eine ganze Zahl, die kleiner als $m$ und $f$, so wird

$$E_{m-k,\,f-k} = \frac{l_{m-k+1}\,l_{f-k+1} + l_{m-k+2}\,l_{f-k+2} + \cdots + l_m l_f + l_{m+1}\,l_{f+1} + \cdots}{l_{m-k}\,l_{f-k}}$$

Bezeichnet man nun abkürzend in Formel (1) den Dividend durch $A_{m,\,f}$, setzt also $E_{m,\,f} = \frac{A_{m,\,f}}{l_m\,l_f}$, so wird

$$(7)\quad E_{m-k,\,f-k} = \frac{A_{m,\,f} + l_{m-k+1}\,l_{f-k+1} + l_{m-k+2}\,l_{f-k+2} + \cdots + l_m\,l_f}{l_{m-k}\,l_{f-k}}.$$

Von diesen beiden Sätzen [1]) wurde nun folgender Gebrauch gemacht, wobei es genügen wird, auf den Theil der Tafel Bezug zu nehmen, in welchem Frauen vorausgesetzt werden, die 1 bis 30 Jahre jünger sind als ihre Männer. Zunächst wurden die in der ersten Zeile der Tafel unter den die Altersunterschiede zwischen den Männern und Frauen anzeigenden Ueberschriften $-1$, $-2$, $-3$, $\cdots -30$ enthaltenen Zahlenwerthe von $E_{m,\,f}$ nach Formel (1) unmittelbar, bis auf die 3te Decimale genau, berechnet, indem $m = 90$ und successive $f = 89, 88, 87 \ldots$ bis 60 gesetzt wurde. Hierauf wurde in Formel (7) $k = 5$ angenommen und mit Zuziehung der bei der Berechnung von $E_{90,\,f}$ gewonnenen Zahlwerthe von $A_{90,\,f}$ mittels dieser Formel die 6te Zeile der Tafel, welche die Werthe von $E_{85,\,f}$ enthält, mit derselben Genauigkeit abgeleitet. Auf dieselbe Weise ergab sich aus dieser 6ten Zeile der Tafel die 11te für die Werthe von $E_{80,\,f}$ u. s. f., wodurch zuerst ein fester Rahmen hergestellt wurde, innerhalb dessen aber weiter je 4 Zeilen einzuschalten übrig blieb. Dies geschah nun durch Benutzung der für den Gebrauch von Logarithmen sehr bequemen Formel (6). Zugleich erhielt man, indem man dieselbe nicht allein zur Einschaltung der 4 Zeilen verwendete, sondern auch noch für die Werthe der 5ten Zeile gebrauchte, eine Controle dieser bereits nach Formel (7) berechneten Werthe. Zuletzt wurden, da bei der Ehedauer

1) Analoge Sätze ergeben sich auch für die Berechnung der Verbindungsrenten.

eine Genauigkeit bis auf Hundertel des Jahres völlig genügend ist, die gewonnenen Zahlwerthe auf 2 Decimalen reducirt.

---

Wir ziehen aus den Zahlen, welche die Tafel darbietet, einige Resultate. Schon ein flüchtiger Blick auf diese Zahlen lässt die grosse Regelmässigkeit in der Ab- und Zunahme derselben in horizontaler und verticaler Richtung erkennen. Wir untersuchen dieselbe näher, und zwar zuerst in Bezug auf die Ehepaare, in welchen die Frauen jünger sind als ihre Männer.

Die Dauer der Ehen ist nach der Tafel, wie zu erwarten war, im Allgemeinen um so länger, je jünger die Ehepaare sind. Doch ergiebt sich aus dem folgenden Auszug, in dem, wie in der vollständigen Tafel, die erste Columne unter *m* das Alter der Männer, und die unter den Ueberschriften — 5, — 10, — 15 etc. (den Altersunterschieden zwischen den Männern und ihren jüngern Frauen) enthaltenen Zahlen die Ehedauer der Paare anzeigen, dass, wenn man von den jüngeren Ehepaaren zu den älteren, deren Altersunterschied der gleiche, aufsteigt, die Grösse der Abnahme der Ehedauer keine gleichmässige ist, sondern sie anfangs etwas wächst, dann aber immer stärker wieder abnimmt.

| *m* | −5 | −10 | −15 | −20 | −25 | −30 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 85 | 1,45 | 1,61 | 1,75 | 1,87 | 1,96 | 2,00 |
| 80 | 2,53 | 2,84 | 3,13 | 3,35 | 3,48 | 3,57 |
| 75 | 3,56 | 4,05 | 4,44 | 4,69 | 4,87 | 4,97 |
| 70 | 4,97 | 5,58 | 6,00 | 6.31 | 6,49 | 6,57 |
| 65 | 6,86 | 7,52 | 8.02 | 8,34 | 8,50 | 8,55 |
| 60 | 9,01 | 9,78 | 10,29 | 10,58 | 10,69 | 10,74 |
| 55 | 11,55 | 12,33 | 12,81 | 13,03 | 13,13 | 13,19 |
| 50 | 14,23 | 14,97 | 15,36 | 15,56 | 15,67 | 15,62 |
| 45 | 16,94 | 17,56 | 17,91 | 18,11 | 18,09 | — |
| 40 | 19,57 | 20,14 | 20,48 | 20,53 | — | — |
| 35 | 22,18 | 22,72 | 22,88 | — | — | — |
| 30 | 24,81 | 25,14 | — | — | — | — |

Vergleicht man die in dieser Tabelle in derselben Zeile stehenden Zahlen der Ehedauer, so ersieht man, dass die Grösse des Altersunterschiedes zwischen Mann und Frau auf die Dauer der Ehe einen geringeren Einfluss hat, als man wol erwarten könnte. Denn es ist z. B. die Dauer der Ehe zwischen einem 70 jährigen Mann und einer 40 jährigen Frau nur um 1,60 Jahre, die zwischen einem 60 jährigen Mann und einer 30 jährigen Frau

nur um 1,73 Jahre, die zwischen einem 50jährigen Mann und einer 20jährigen Frau nur um 1,39 Jahr länger als sie sein würde, wenn dieselben Männer mit nur um 5 Jahre jüngeren Frauen verheirathet wären.

Dagegen zeigt die folgende Tabelle, in welcher die unter $-5$, $-10$ etc. enthaltenen Zahlen die nach Formel (5) berechneten Wahrscheinlichkeiten des Ueberlebens der Frauen sind, welchen erheblichen Einfluss auf diese Wahrscheinlichkeit der Altersunterschied zwischen Mann und Frau hat.

| $m$ | $-5$ | $-10$ | $-15$ | $-20$ | $-25$ | $-30$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 85 | 0,62 | 0,70 | 0,78 | 0,85 | 0,89 | 0,93 |
| 75 | 0,59 | 0,69 | 0,78 | 0,85 | 0,89 | 0,91 |
| 65 | 0,61 | 0,71 | 0,79 | 0,84 | 0,87 | 0,88 |
| 55 | 0,62 | 0,71 | 0,78 | 0,80 | 0,82 | 0,83 |
| 45 | 0,61 | 0,68 | 0,72 | 0,75 | 0,73 | — |
| 35 | 0,60 | 0,64 | 0,67 | — | — | — |

Hiernach nähert sich bei den Ehepaaren, in welchen der Mann 55 und mehr Jahre zählt, seine Frau aber 20 bis 30 Jahre jünger ist, die Wahrscheinlichkeit, dass sie ihren Mann überleben wird, sehr der Gewissheit. Im Uebrigen macht sich bemerklich, dass zumal in den Ehepaaren, in welchen die Frauen 5 bis 15 Jahre jünger sind als ihre Männer, das Alter dieser letzteren auf die Wahrscheinlichkeit des Ueberlebens der Frauen einen sehr geringen Einfluss ausübt, dieselbe also überwiegend durch den Altersunterschied der Ehegatten bestimmt wird.

Dagegen macht sich neben diesem Altersunterschied auch das Alter der Männer sehr bemerklich geltend bei der Bestimmung der Dauer des künftigen Wittwenstandes ihrer Frauen. Bezeichnet man diese Dauer durch $W_{m,f}$, so ist

(8) $$W_{m,f} = D_f - E_{m,f},$$

wo $D_f$ und $E_{m,f}$ die unter (4) und (1) angegebenen Werthe haben. Derselbe Ausdruck folgt auch aus der Formel

(9) $$P_{m,f} = R_f - V_{m,f},$$

welche den gegenwärtigen Werth der künftigen Wittwenpension einer Frau von $f$ Jahren bestimmt, die jetzt noch mit einem Manne von $m$ Jahren verheirathet ist, wenn man in derselben und den unter (3) und (2) angegebenen Werthen von $R_f$ und $V_{m,f}$ allenthalben $p = 1$ und $\varrho = 1$ setzt.

Die folgende Tabelle giebt für dieselben Altersverhältnisse der Ehegatten die hiernach berechnete Dauer des künftigen Wittwenstandes der Frauen, welche, wie sich aus der Formel ergiebt, grösser oder kleiner als die Dauer der Ehe ist, je nachdem diese kleiner oder grösser ist als die halbe Lebensdauer der betreffenden Frau.

| *m* | −5 | −10 | −15 | −20 | −25 | −30 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 85 | 2,97 | 4,30 | 5,99 | 8,27 | 11,09 | 14,21 |
| 75 | 4,18 | 6,09 | 8,61 | 11,52 | 14,82 | 18,28 |
| 65 | 6,19 | 8,69 | 11,67 | 14,91 | 18,22 | 21,42 |
| 55 | 8,14 | 10,92 | 13,91 | 16,94 | 19,93 | 22,83 |
| 45 | 9,78 | 12,41 | 15,15 | 17,91 | 20,47 | — |
| 35 | 10,88 | 13,30 | 15,68 | — | — | — |

Die Dauer des Wittwenstandes nimmt hiernach bei demselben Altersunterschied der Ehegatten mit zunehmendem Alter ab, anfangs nur langsam, im höheren und höchsten Alter immer schneller. Mit dem Altersunterschied der Männer und Frauen nimmt bei sich gleichbleibendem Alter des Mannes die Dauer des Wittwenstandes zu, langsamer bei den jüngeren, rascher bei den älteren Ehepaaren. Bemerkenswerth ist endlich noch, dass diese Dauer in je zwei Paaren von höherem Alter, in deren einem der Mann um 10 Jahre älter, die Frau aber 5 Jahre jünger als in dem andern, fast genau gleich ist.

Wir untersuchen zweitens unter denselben Gesichtspunkten die Verhältnisse der Ehepaare, in welchen die Frauen älter als ihre Männer oder mit ihnen gleichalterig sind. Die Ehedauer dieser Paare giebt übersichtlich die folgende Tabelle.

| *m* | 0 | +5 | +10 | +15 |
|---|---|---|---|---|
| 85 | 1,26 | 1,11 | 0,65 | — |
| 80 | 2,20 | 1,85 | 1,54 | 0,80 |
| 75 | 3,09 | 2,59 | 2,13 | 1,69 |
| 70 | 4,28 | 3,63 | 2,98 | 2,41 |
| 65 | 5,98 | 5,04 | 4,18 | 3,36 |
| 60 | 8,06 | 6,87 | 5,67 | 4,61 |
| 55 | 10,45 | 9,16 | 7,65 | 6,20 |
| 50 | 13,12 | 11,67 | 10,05 | 8,25 |
| 45 | 15,89 | 14,43 | 12,63 | 10,71 |
| 40 | 18,67 | 17,29 | 15,48 | 13,36 |
| 35 | 21,35 | 20,14 | 18,43 | 16,31 |
| 30 | 24,43 | 22,90 | 21,38 | 19,36 |

Auch hier nimmt, wie sich von selbst versteht, wenn man bei demselben Altersunterschied der Ehegatten von den jüngeren Paaren zu den älteren aufsteigt, die Ehedauer ab, und zwar nicht gleichförmig, sondern ohngefähr in derselben Weise wie bei den Ehen, in welchen die Frauen jünger sind als die Männer. Natürlich nimmt dagegen mit dem wachsenden Altersunterschied, aber sich gleichbleibendem Alter des Mannes, die Dauer der Ehe ab, und besonders bei den jüngeren Paaren langsamer als man erwarten könnte, jedoch rascher als bei den vergleichbaren Paaren, in welchen die Frauen um die gleiche Zahl von Jahren jünger sind als ihre Männer.

Die Wahrscheinlichkeit des Ueberlebens der Frauen nimmt hier, wie das folgende Täfelchen nachweist, ab, wenn der Altersunterschied zwischen den Ehegatten zunimmt. Dieselbe ist aber selbst für die gleichalterigen Ehepaare wenig grösser als ½. Und da für Paare von gleichen Altersunterschieden, aber verschiedenen Lebensaltern, diese Wahrscheinlichkeiten meistens nahe gleich sind, so ergiebt sich auch hier, dass diese Wahrscheinlichkeit überwiegend von dem Altersunterschied bestimmt wird.

| *m* | 0 | +5 | +10 | +15 |
|---|---|---|---|---|
| 85 | 0,53 | 0,45 | 0,23 | — |
| 75 | 0,49 | 0,40 | 0,32 | 0,24 |
| 65 | 0,50 | 0,40 | 0,31 | 0,26 |
| 55 | 0,52 | 0,43 | 0,33 | 0,25 |
| 45 | 0,54 | 0,44 | 0,34 | 0,26 |
| 35 | 0,53 | 0,45 | 0,37 | 0,30 |

Endlich giebt noch das folgende Täfelchen eine vergleichende Uebersicht von der Dauer des Wittwenstandes dieser Frauen.

| *m* | 0 | +5 | +10 | +15 |
|---|---|---|---|---|
| 85 | 2,07 | 1,24 | 0,89 | — |
| 75 | 2,82 | 1,83 | 1,20 | 0,66 |
| 65 | 4,16 | 2,70 | 1,73 | 1,06 |
| 55 | 5,76 | 3,89 | 2,49 | 1,54 |
| 45 | 7,36 | 5,26 | 3,58 | 2,34 |
| 35 | 8,62 | 6,58 | 4,82 | 3,38 |

Die Dauer des Wittwenstandes nimmt hier bei jedem Alters-

unterschied der Ehegatten mit zunehmendem Alter derselben ununterbrochen ab; und ebenso ist sie um so kürzer, je grösser bei demselben Alter des Mannes der Altersunterschied zwischen ihm und seiner Frau. In ähnlicher Weise wie bei den Paaren, in welchen die Frau jünger als der Mann, nähert sich die Dauer des Wittwenstandes der Gleichheit in derjenigen von je zwei Paaren, in deren einem der Mann um 10 Jahre älter, die Frau aber um 5 Jahre jünger ist als in dem andern.

---

Da die Formel (8) für die Dauer des Wittwenstandes einer Frau sich aus der Formel (9) für den gegenwärtigen Werth der künftigen Wittwenpension derselben Frau ergiebt, wenn man in derselben $p = 1$ und $\varrho = 1$ setzt, so könnte man wol erwarten, dass zugleich mit der Dauer des Wittwenstandes auch der Werth der Wittwenpension ununterbrochen ab- und zunehme. Die folgende Zusammenstellung, in der $p = 100$ und $r = 1,035$, daher $\varrho = \frac{200}{207}$ angenommen ist, zeigt jedoch für Frauen, die jünger sind als ihre Männer, dass, wenn man von den jüngeren Ehepaaren zu den älteren mit demselben Altersunterschied aufsteigt, wo die Dauer des Wittwenstandes fortwährend abnimmt, der Werth der Wittwenpension zuerst bis zu einem Maximum steigt, dann aber wieder abnimmt. [1]) Vergleicht man dagegen die Ehepaare, in welchen bei demselben Alter des Mannes die Altersunterschiede der Ehegatten ungleich sind, so zeigt es sich, dass hier der längeren Dauer des Wittwenstandes immer auch der grössere Werth der Wittwenpension entspricht. [2])

---

1) Der Grund davon ist, dass zwar $R_f$ mit der Zunahme von $f$ fortwährend abnimmt, dagegen $V_{m,f}$, wenn $m$ und $f$ zunehmen, dabei aber $m - f$ sich gleich bleibt, anfangs bis zu einem Maximum wächst, dann aber wieder abnimmt.

2) Denn hier nimmt $R_f$ zu, wenn $f$ abnimmt, zugleich zwar auch $V_{m,f}$ bei sich gleichbleibenden Werthe von $m$, aber langsamer als $R_f$.

| m | f | $W_{m,f}$ | $P_{m,f}$ | f | $W_{m,f}$ | $P_{m,f}$ | f | $W_{m,f}$ | $P_{m,f}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 85 | 80 | 2,97 | 247 | 75 | 4,30 | 354 | 70 | 5,99 | 464 |
| 75 | 70 | 4,18 | 312 | 65 | 6,09 | 433 | 60 | 8,64 | 582 |
| 65 | 60 | 6,19 | 401 | 55 | 8,69 | 530 | 50 | 11,67 | 669 |
| 55 | 50 | 8,14 | 441 | 45 | 10,92 | 552 | 40 | 13,91 | 657 |
| 45 | 40 | 9,78 | 437 | 35 | 12,41 | 518 | 30 | 15,15 | 582 |
| 35 | 30 | 10,88 | 398 | 25 | 13,30 | 449 | 20 | 15,68 | 494 |
| 85 | 65 | 8,27 | 614 | 60 | 11,09 | 787 | 55 | 14,21 | 958 |
| 75 | 55 | 11,52 | 738 | 50 | 14,82 | 898 | 45 | 18,28 | 1047 |
| 65 | 45 | 14,91 | 804 | 40 | 18,22 | 926 | 35 | 21,42 | 1025 |
| 55 | 35 | 16,94 | 749 | 30 | 19,93 | 827 | 25 | 22,83 | 893 |
| 45 | 25 | 17,91 | 643 | 20 | 20,47 | 789 | — | — | — |
| 35 | — | — | — | — | — | — | — | — | — |

Die Maxima der Werthe der Wittwenpension fallen in diesen sechs Classen auf folgende Ehepaare:

| m | f | $W_{m,f}$ | $P_{m,f}$ |
|---|---|---|---|
| 51 | 46 | 8,35 | 443,44 |
| 58 | 48 | 10,33 | 554,41 |
| 60 | 45 | 12,96 | 676,62 |
| 65 | 45 | 14,91 | 804,36 |
| 69 | 44 | 17,09 | 935,54 |
| 72 | 42 | 19,50 | 1062,78 |

Je grösser demnach der Altersunterschied zwischen Mann und Frau, auf ein um so höheres Alter des Mannes fällt der Maximalwerth der Wittwenpension der Frau.

Für Frauen, die älter als ihre Männer oder mit ihnen gleichalterig sind, erhält man folgende Zahlen.

| m | f | $W_{m,f}$ | $P_{m,f}$ | f | $W_{m,f}$ | $P_{m,f}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 85 | 85 | 2,07 | 177 | 90 | 1,24 | 111 |
| 75 | 75 | 2,82 | 220 | 80 | 1,83 | 149 |
| 65 | 65 | 4,16 | 285 | 70 | 2,70 | 195 |
| 55 | 55 | 5,76 | 335 | 60 | 3,89 | 242 |
| 45 | 45 | 7,36 | 355 | 50 | 5,26 | 275 |
| 35 | 35 | 8,62 | 343 | 40 | 6,58 | 286 |
| 85 | 95 | 0,39 | 37 | 100 | — | — |
| 75 | 85 | 1,20 | 101 | 90 | 0,66 | 59 |
| 65 | 75 | 1,73 | 131 | 80 | 1,06 | 85 |
| 55 | 65 | 2,49 | 165 | 70 | 1,54 | 109 |
| 45 | 55 | 3,58 | 203 | 60 | 2,34 | 144 |
| 35 | 45 | 4,82 | 229 | 50 | 3,38 | 176 |

Hier nimmt nun, wenn man wieder von den jüngeren Paaren zu den älteren von gleichem Altersunterschied aufsteigt, zugleich mit der Dauer des Wittwenstandes der Werth der Wittwenpension ununterbrochen ab,[1]) und nur die mit ihren Männern gleichalterigen Frauen machen, da sie den Uebergang von den Frauen, die jünger als ihre Männer, zu denen, die älter als diese, bilden, eine kaum merkliche Ausnahme. Ebenso nimmt der Werth der Wittwenpension zugleich mit der Dauer des Wittwenstandes ab, wenn man je zwei derjenigen Paare vergleicht, in deren einem bei demselben Alter des Mannes der Altersunterschied der Frau grösser ist als in dem andern.[2]) — Das Maximum des Werthes der Wittwenpension gleichalteriger Ehepaare trifft dasjenige, in welchem beide Ehegatten 44 Jahre alt sind und beträgt 355,32 Münzeinheiten, wogegen der Betrag für das Ehepaar von 45 Jahren nur 355,11 ist. Die Dauer des Wittwenstandes der Frau in dem ersteren Paar ist 7,50.

---

In der nun folgenden Tafel bezeichnen die in der Columne unter —1, —2, —3, ··· —30 und unter 0, +1, +2, ··· +15 stehenden Zahlen in Jahren und Theilen des Jahres die Ehedauer der Paare, in welchen die Frauen um so viel Jahre, als diese Ueberschriften anzeigen, jünger, bezw. älter sind als ihre Männer, deren Alter dieselbe Zeile in der ersten Columne unter *m* angiebt.

---

1) Sowohl $R_f$ als $V_{m,f}$ nimmt hier ununterbrochen ab, aber ersteres schneller als letzteres.

2) Sowohl $R_f$ als $V_{m,f}$ nehmen hier gleichzeitig zu, aber ersteres schneller als letzteres.

| m | −1 | −2 | −3 | −4 | −5 | −6 | −7 | −8 | −9 | −10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 90 | 0,60 | 0,61 | 0,61 | 0,61 | 0,62 | 0,62 | 0,64 | 0,65 | 0,67 | 0,69 |
| 89 | 0,72 | 0,73 | 0,73 | 0,74 | 0,75 | 0,76 | 0,78 | 0,81 | 0,83 | 0,85 |
| 88 | 0,86 | 0,86 | 0,87 | 0,88 | 0,90 | 0,92 | 0,95 | 0,98 | 1,00 | 1,02 |
| 87 | 1,00 | 1,00 | 1,02 | 1,04 | 1,07 | 1,11 | 1,14 | 1,17 | 1,19 | 1,21 |
| 86 | 1,14 | 1,15 | 1,18 | 1,21 | 1,26 | 1,30 | 1,34 | 1,37 | 1,39 | 1,41 |
| 85 | 1,28 | 1,31 | 1,35 | 1,40 | 1,45 | 1,50 | 1,53 | 1,56 | 1,58 | 1,61 |
| 84 | 1,43 | 1,48 | 1,54 | 1,60 | 1,65 | 1,69 | 1,72 | 1,75 | 1,78 | 1,81 |
| 83 | 1,62 | 1,68 | 1,75 | 1,81 | 1,86 | 1,90 | 1,93 | 1,97 | 2,00 | 2,04 |
| 82 | 1,83 | 1,91 | 1,98 | 2,03 | 2,08 | 2,12 | 2,16 | 2,21 | 2,25 | 2,30 |
| 81 | 2,06 | 2,14 | 2,20 | 2,26 | 2,30 | 2,35 | 2,40 | 2,46 | 2,51 | 2,57 |
| 80 | 2,28 | 2,36 | 2,42 | 2,48 | 2,53 | 2,59 | 2,65 | 2,71 | 2,78 | 2,84 |
| 79 | 2,49 | 2,56 | 2,63 | 2,69 | 2,75 | 2,82 | 2,89 | 2,97 | 3,03 | 3,10 |
| 78 | 2,68 | 2,75 | 2,82 | 2,89 | 2,97 | 3,05 | 3,12 | 3,20 | 3,28 | 3,35 |
| 77 | 2,84 | 2,92 | 3,00 | 3,08 | 3,17 | 3,25 | 3,34 | 3,42 | 3,50 | 3,59 |
| 76 | 3,01 | 3,09 | 3,18 | 3,27 | 3,36 | 3,45 | 3,54 | 3,63 | 3,72 | 3,82 |
| 75 | 3,18 | 3,27 | 3,37 | 3,47 | 3,56 | 3,66 | 3,76 | 3,85 | 3,95 | 4,05 |
| 74 | 3,38 | 3,48 | 3,58 | 3,69 | 3,79 | 3,89 | 4,00 | 4,10 | 4,21 | 4,31 |
| 73 | 3,60 | 3,71 | 3,82 | 3,93 | 4,05 | 4,16 | 4,27 | 4,38 | 4,49 | 4,59 |
| 72 | 3,85 | 3,97 | 4,09 | 4,21 | 4,33 | 4,45 | 4,57 | 4,69 | 4,80 | 4,90 |
| 71 | 4,13 | 4,25 | 4,38 | 4,51 | 4,64 | 4,77 | 4,89 | 5,01 | 5,13 | 5,23 |
| 70 | 4,42 | 4,56 | 4,69 | 4,83 | 4,97 | 5,11 | 5,24 | 5,36 | 5,47 | 5,58 |
| 69 | 4,73 | 4,88 | 5,03 | 5,18 | 5,32 | 5,47 | 5,60 | 5,72 | 5,84 | 5,94 |
| 68 | 5,06 | 5,22 | 5,38 | 5,54 | 5,69 | 5,84 | 5,97 | 6,09 | 6,21 | 6,31 |
| 67 | 5,42 | 5,59 | 5,76 | 5,92 | 6,07 | 6,22 | 6,35 | 6,48 | 6,59 | 6,70 |
| 66 | 5,79 | 5,97 | 6,14 | 6,31 | 6,47 | 6,61 | 6,75 | 6,87 | 6,99 | 7,10 |
| 65 | 6,17 | 6,36 | 6,54 | 6,70 | 6,86 | 7,01 | 7,14 | 7,27 | 7,40 | 7,52 |
| 64 | 6,56 | 6,76 | 6,94 | 7,10 | 7,26 | 7,41 | 7,55 | 7,69 | 7,82 | 7,94 |
| 63 | 6,97 | 7,16 | 7,34 | 7,51 | 7,67 | 7,83 | 7,97 | 8,11 | 8,25 | 8,38 |
| 62 | 7,39 | 7,58 | 7,76 | 7,93 | 8,10 | 8,26 | 8,41 | 8,56 | 8,70 | 8,83 |
| 61 | 7,82 | 8,01 | 8,20 | 8,37 | 8,54 | 8,71 | 8,87 | 9,02 | 9,16 | 9,30 |
| 60 | 8,26 | 8,46 | 8,65 | 8,83 | 9,01 | 9,18 | 9,35 | 9,50 | 9,65 | 9,78 |
| 59 | 8,72 | 8,92 | 9,12 | 9,31 | 9,49 | 9,67 | 9,84 | 10,00 | 10,14 | 10,27 |
| 58 | 9,19 | 9,40 | 9,60 | 9,80 | 9,99 | 10,17 | 10,34 | 10,50 | 10,64 | 10,78 |
| 57 | 9,68 | 9,89 | 10,11 | 10,31 | 10,50 | 10,68 | 10,85 | 11,01 | 11,16 | 11,28 |
| 56 | 10,17 | 10,40 | 10,62 | 10,83 | 11,02 | 11,20 | 11,37 | 11,53 | 11,68 | 11,80 |
| 55 | 10,69 | 10,92 | 11,14 | 11,35 | 11,55 | 11,73 | 11,90 | 12,06 | 12,20 | 12,33 |
| 54 | 11,21 | 11,45 | 11,67 | 11,88 | 12,08 | 12,26 | 12,43 | 12,58 | 12,73 | 12,86 |
| 53 | 11,75 | 11,99 | 12,21 | 12,42 | 12,61 | 12,80 | 12,96 | 13,12 | 13,26 | 13,39 |
| 52 | 12,29 | 12,53 | 12,75 | 12,96 | 13,15 | 13,33 | 13,50 | 13,65 | 13,79 | 13,92 |
| 51 | 12,83 | 13,07 | 13,29 | 13,50 | 13,69 | 13,87 | 14,04 | 14,19 | 14,32 | 14,44 |
| 50 | 13,38 | 13,61 | 13,83 | 14,04 | 14,23 | 14,41 | 14,58 | 14,72 | 14,85 | 14,97 |
| 49 | 13,92 | 14,16 | 14,38 | 14,58 | 14,77 | 14,95 | 15,11 | 15,25 | 15,38 | 15,49 |
| 48 | 14,47 | 14,70 | 14,93 | 15,13 | 15,31 | 15,49 | 15,64 | 15,78 | 15,90 | 16,00 |
| 47 | 15,02 | 15,26 | 15,48 | 15,67 | 15,86 | 16,02 | 16,17 | 16,30 | 16,41 | 16,52 |
| 46 | 15,58 | 15,81 | 16,03 | 16,22 | 16,40 | 16,56 | 16,70 | 16,82 | 16,93 | 17,04 |

| m | −1 | −2 | −3 | −4 | −5 | −6 | −7 | −8 | −9 | −10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 45 | 16,14 | 16,37 | 16,58 | 16,77 | 16,94 | 17,09 | 17,22 | 17,35 | 17,46 | 17,56 |
| 44 | 16,70 | 16,92 | 17,12 | 17,31 | 17,47 | 17,62 | 17,75 | 17,87 | 17,98 | 18,08 |
| 43 | 17,25 | 17,47 | 17,67 | 17,84 | 18,00 | 18,14 | 18,27 | 18,39 | 18,50 | 18,59 |
| 42 | 17,80 | 18,01 | 18,20 | 18,37 | 18,53 | 18,67 | 18,80 | 18,91 | 19,02 | 19,11 |
| 41 | 18,35 | 18,55 | 18,73 | 18,90 | 19,05 | 19,19 | 19,31 | 19,43 | 19,53 | 19,63 |
| 40 | 18,88 | 19,08 | 19,26 | 19,42 | 19,57 | 19,71 | 19,83 | 19,94 | 20,05 | 20,14 |
| 39 | 19,41 | 19,60 | 19,78 | 19,94 | 20,09 | 20,22 | 20,34 | 20,46 | 20,56 | 20,65 |
| 38 | 19,94 | 20,13 | 20,30 | 20,46 | 20,61 | 20,74 | 20,86 | 20,97 | 21,07 | 21,16 |
| 37 | 20,48 | 20,66 | 20,83 | 20,99 | 21,13 | 21,26 | 21,38 | 21,49 | 21,59 | 21,68 |
| 36 | 21,01 | 21,19 | 21,36 | 21,51 | 21,65 | 21,79 | 21,91 | 22,01 | 22,11 | 22,20 |
| 35 | 21,55 | 21,72 | 21,89 | 22,04 | 22,18 | 22,31 | 22,43 | 22,54 | 22,63 | 22,72 |
| 34 | 22,08 | 22,25 | 22,41 | 22,57 | 22,71 | 22,83 | 22,95 | 23,06 | 23,15 | 23,23 |
| 33 | 22,61 | 22,78 | 22,94 | 23,09 | 23,23 | 23,36 | 23,47 | 23,57 | 23,66 | 23,72 |
| 32 | 23,14 | 23,31 | 23,47 | 23,62 | 23,76 | 23,88 | 23,99 | 24,08 | 24,16 | 24,21 |
| 31 | 23,67 | 23,85 | 24,00 | 24,15 | 24,29 | 24,41 | 24,51 | 24,59 | 24,65 | 24,68 |
| 30 | 24,21 | 24,38 | 24,54 | 24,68 | 24,81 | 24,92 | 25,01 | 25,08 | 25,12 | 25,14 |
| 29 | 24,74 | 24,91 | 25,06 | 25,20 | 25,32 | 25,42 | 25,49 | 25,54 | 25,57 | — |
| 28 | 25,26 | 25,43 | 25,58 | 25,71 | 25,81 | 25,90 | 25,95 | 25,99 | — | — |
| 27 | 25,78 | 25,95 | 26,08 | 26,20 | 26,29 | 26,35 | 26,39 | — | — | — |
| 26 | 26,29 | 26,44 | 26,58 | 26,67 | 26,74 | 26,79 | — | — | — | — |
| 25 | 26,78 | 26,92 | 27,03 | 27,11 | 27,17 | — | — | — | — | — |

| m | −11 | −12 | −13 | −14 | −15 | −16 | −17 | −18 | −19 | −20 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 90 | 0,70 | 0,71 | 0,72 | 0,72 | 0,73 | 0,74 | 0,75 | 0,76 | 0,77 | 0,77 |
| 89 | 0,86 | 0,87 | 0,88 | 0,89 | 0,90 | 0,91 | 0,92 | 0,93 | 0,94 | 0,95 |
| 88 | 1,03 | 1,05 | 1,06 | 1,07 | 1,09 | 1,10 | 1,12 | 1,13 | 1,14 | 1,16 |
| 87 | 1,23 | 1,24 | 1,26 | 1,28 | 1,30 | 1,32 | 1,34 | 1,35 | 1,37 | 1,38 |
| 86 | 1,43 | 1,45 | 1,47 | 1,50 | 1,52 | 1,54 | 1,56 | 1,58 | 1,61 | 1,62 |
| 85 | 1,63 | 1,66 | 1,69 | 1,72 | 1,75 | 1,77 | 1,80 | 1,82 | 1,85 | 1,87 |
| 84 | 1,85 | 1,88 | 1,91 | 1,95 | 1,98 | 2,01 | 2,04 | 2,07 | 2,10 | 2,12 |
| 83 | 2,08 | 2,13 | 2,16 | 2,20 | 2,24 | 2,27 | 2,31 | 2,35 | 2,38 | 2,41 |
| 82 | 2,35 | 2,39 | 2,44 | 2,48 | 2,52 | 2,57 | 2,61 | 2,65 | 2,68 | 2,71 |
| 81 | 2,62 | 2,67 | 2,73 | 2,78 | 2,83 | 2,88 | 2,92 | 2,96 | 3,00 | 3,03 |
| 80 | 2,90 | 2,96 | 3,02 | 3,08 | 3,13 | 3,19 | 3,24 | 3,28 | 3,32 | 3,35 |
| 79 | 3,17 | 3,24 | 3,31 | 3,37 | 3,43 | 3,49 | 3,54 | 3,59 | 3,63 | 3,66 |
| 78 | 3,43 | 3,50 | 3,58 | 3,65 | 3,71 | 3,77 | 3,82 | 3,87 | 3,91 | 3,94 |
| 77 | 3,67 | 3,75 | 3,83 | 3,90 | 3,97 | 4,02 | 4,08 | 4,12 | 4,16 | 4,20 |
| 76 | 3,90 | 4,98 | 4,06 | 4,14 | 4,20 | 4,26 | 4,31 | 4,36 | 4,40 | 4,44 |
| 75 | 4,14 | 4,23 | 4,31 | 4,38 | 4,44 | 4,50 | 4,55 | 4,60 | 4,65 | 4,69 |
| 74 | 4,40 | 4,49 | 4,57 | 4,64 | 4,70 | 4,76 | 4,81 | 4,87 | 4,92 | 4,96 |
| 73 | 4,69 | 4,77 | 4,85 | 4,92 | 4,99 | 5,05 | 5,11 | 5,16 | 5,21 | 5,26 |
| 72 | 5,00 | 5,08 | 5,16 | 5,23 | 5,30 | 5,36 | 5,42 | 5,48 | 5,54 | 5,59 |
| 71 | 5,33 | 5,41 | 5,49 | 5,57 | 5,64 | 5,70 | 5,77 | 5,83 | 5,89 | 5,94 |

| *m* | −11 | −12 | −13 | −14 | −15 | −16 | −17 | −18 | −19 | −20 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 70 | 5,67 | 5,76 | 5,84 | 5,92 | 6,00 | 6,07 | 6,14 | 6,20 | 6,26 | 6,31 |
| 69 | 6,04 | 6,13 | 6,21 | 6,30 | 6,37 | 6,45 | 6,52 | 6,58 | 6,64 | 6,69 |
| 68 | 6,41 | 6,51 | 6,60 | 6,69 | 6,77 | 6,85 | 6,92 | 6,98 | 7,04 | 7,09 |
| 67 | 6,81 | 6,91 | 7,00 | 7,10 | 7,18 | 7,26 | 7,33 | 7,39 | 7,45 | 7,50 |
| 66 | 7,21 | 7,32 | 7,42 | 7,51 | 7,60 | 7,68 | 7,75 | 7,81 | 7,87 | 7,92 |
| 65 | 7,63 | 7,74 | 7,85 | 7,94 | 8,02 | 8,10 | 8,17 | 8,23 | 8,29 | 8,34 |
| 64 | 8,06 | 8,17 | 8,28 | 8,37 | 8,45 | 8,53 | 8,60 | 8,66 | 8,72 | 8,77 |
| 63 | 8,50 | 8,61 | 8,72 | 8,81 | 8,89 | 8,97 | 9,04 | 9,10 | 9,16 | 9,20 |
| 62 | 8,95 | 9,07 | 9,17 | 9,26 | 9,35 | 9,42 | 9,49 | 9,55 | 9,61 | 9,65 |
| 61 | 9,42 | 9,53 | 9,64 | 9,73 | 9,81 | 9,89 | 9,96 | 10,01 | 10,07 | 10,11 |
| 60 | 9,90 | 10,01 | 10,12 | 10,21 | 10,29 | 10,37 | 10,43 | 10,49 | 10,54 | 10,58 |
| 59 | 10,40 | 10,51 | 10,61 | 10,70 | 10,78 | 10,86 | 10,92 | 10,98 | 11,02 | 11,06 |
| 58 | 10,90 | 11,01 | 11,11 | 11,20 | 11,28 | 11,36 | 11,42 | 11,47 | 11,51 | 11,54 |
| 57 | 11,41 | 11,52 | 11,63 | 11,71 | 11,79 | 11,86 | 11,91 | 11,96 | 12,00 | 12,03 |
| 56 | 11,93 | 12,04 | 12,14 | 12,22 | 12,30 | 12,36 | 12,41 | 12,46 | 12,49 | 12,53 |
| 55 | 12,45 | 12,56 | 12,65 | 12,74 | 12,81 | 12,87 | 12,92 | 12,96 | 13,00 | 13,03 |
| 54 | 12,98 | 13,08 | 13,17 | 13,25 | 13,32 | 13,37 | 13,42 | 13,46 | 13,50 | 13,53 |
| 53 | 13,50 | 13,60 | 13,69 | 13,76 | 13,83 | 13,88 | 13,93 | 13,97 | 14,01 | 14,04 |
| 52 | 14,03 | 14,12 | 14,21 | 14,28 | 14,34 | 14,39 | 14,44 | 14,48 | 14,51 | 14,54 |
| 51 | 14,55 | 14,64 | 14,72 | 14,79 | 14,85 | 14,90 | 14,95 | 14,99 | 15,02 | 15,05 |
| 50 | 15,07 | 15,15 | 15,23 | 15,30 | 15,36 | 15,41 | 15,45 | 15,49 | 15,53 | 15,56 |
| 49 | 15,58 | 15,66 | 15,74 | 15,81 | 15,86 | 15,91 | 15,96 | 16,00 | 16,04 | 16,07 |
| 48 | 16,09 | 16,18 | 16,25 | 16,31 | 16,37 | 16,42 | 16,47 | 16,51 | 16,54 | 16,57 |
| 47 | 16,61 | 16,69 | 16,76 | 16,82 | 16,88 | 16,93 | 16,98 | 17,02 | 17,05 | 17,08 |
| 46 | 17,13 | 17,21 | 17,28 | 17,34 | 17,39 | 17,45 | 17,49 | 17,53 | 17,57 | 17,60 |
| 45 | 17,64 | 17,72 | 17,79 | 17,86 | 17,91 | 17,96 | 18,01 | 18,05 | 18,08 | 18,11 |
| 44 | 18,16 | 18,24 | 18,31 | 18,37 | 18,43 | 18,48 | 18,52 | 18,56 | 18,60 | 18,62 |
| 43 | 18,68 | 18,56 | 18,83 | 18,89 | 18,94 | 18,99 | 19,04 | 19,08 | 19,10 | 19,12 |
| 42 | 19,20 | 19,27 | 19,34 | 19,40 | 19,46 | 19,51 | 19,55 | 19,58 | 19,59 | 19,60 |
| 41 | 19,71 | 19,79 | 19,86 | 19,92 | 19,97 | 20,02 | 20,05 | 20,07 | 20,08 | 20,07 |
| 40 | 20,22 | 20,30 | 20,37 | 20,43 | 20,48 | 20,52 | 20,54 | 20,55 | 20,55 | 20,53 |
| 39 | 20,73 | 20,81 | 20,88 | 20,93 | 20,98 | 21,01 | 21,02 | 21,02 | 21,00 | — |
| 38 | 21,25 | 21,32 | 21,39 | 21,44 | 21,47 | 21,49 | 21,49 | 21,47 | — | — |
| 37 | 21,76 | 21,83 | 21,89 | 21,93 | 21,95 | 21,96 | 21,94 | — | — | — |
| 36 | 22,28 | 22,34 | 22,39 | 22,42 | 22,43 | 22,41 | — | — | — | — |
| 35 | 22,79 | 22,84 | 22,87 | 22,89 | 22,88 | — | — | — | — | — |
| 34 | 23,28 | 23,32 | 23,34 | 23,34 | — | — | — | — | — | — |
| 33 | 23,77 | 23,79 | 23,79 | — | — | — | — | — | — | — |
| 32 | 24,24 | 24,25 | — | — | — | — | — | — | — | — |
| 31 | 24,70 | — | — | — | — | — | — | — | — | — |

| *m* | −21 | −22 | −23 | −24 | −25 | −26 | −27 | −28 | −29 | −30 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 90 | 0,78 | 0,79 | 0,80 | 0,80 | 0,81 | 0,81 | 0,82 | 0,82 | 0,83 | 0,83 |
| 89 | 0,96 | 0,97 | 0,98 | 0,99 | 1,00 | 1,00 | 1,01 | 1,01 | 1,02 | 1,02 |
| 88 | 1,17 | 1,18 | 1,19 | 1,20 | 1,21 | 1,22 | 1,23 | 1,23 | 1,24 | 1,24 |
| 87 | 1,40 | 1,42 | 1,43 | 1,44 | 1,45 | 1,46 | 1,47 | 1,47 | 1,48 | 1,48 |
| 86 | 1,64 | 1,66 | 1,68 | 1,69 | 1,70 | 1,71 | 1,72 | 1,73 | 1,74 | 1,74 |

| m | −21 | −22 | −23 | −24 | −25 | −26 | −27 | −28 | −29 | −30 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 85 | 1,89 | 1,91 | 1,93 | 1,94 | 1,96 | 1,97 | 1,97 | 1,98 | 1,99 | 2,00 |
| 84 | 2,15 | 2,17 | 2,19 | 2,20 | 2,21 | 2,23 | 2,24 | 2,25 | 2,26 | 2,27 |
| 83 | 2,43 | 2,45 | 2,47 | 2,49 | 2,50 | 2,52 | 2,53 | 2,54 | 2,56 | 2,57 |
| 82 | 2,74 | 2,76 | 2,78 | 2,80 | 2,82 | 2,83 | 2,85 | 2,87 | 2,88 | 2,89 |
| 81 | 3,06 | 3,09 | 3,11 | 3,13 | 3,15 | 3,17 | 3,19 | 3,20 | 3,22 | 3,23 |
| 80 | 3,38 | 3,41 | 3,43 | 3,46 | 3,48 | 3,50 | 3,52 | 3,54 | 3,56 | 3,57 |
| 79 | 3,69 | 3,72 | 3,75 | 3,77 | 3,80 | 3,83 | 3,85 | 3,87 | 3,88 | 3,90 |
| 78 | 3,98 | 4,01 | 4,04 | 4,07 | 4,10 | 4,13 | 4,15 | 4,17 | 4,19 | 4,20 |
| 77 | 4,24 | 4,27 | 4,31 | 4,34 | 4,37 | 4,40 | 4,42 | 4,44 | 4,46 | 4,47 |
| 76 | 4,48 | 4,52 | 4,56 | 4,59 | 4,62 | 4,65 | 4,67 | 4,69 | 4,71 | 4,72 |
| 75 | 4,73 | 4,77 | 4,81 | 4,84 | 4,87 | 4,90 | 4,92 | 4,94 | 4,96 | 4,97 |
| 74 | 5,01 | 5,05 | 5,09 | 5,12 | 5,15 | 5,17 | 5,19 | 5,21 | 5,23 | 5,24 |
| 73 | 5,31 | 5,35 | 5,39 | 5,42 | 5,45 | 5,47 | 5,49 | 5,51 | 5,53 | 5,54 |
| 72 | 5,63 | 5,68 | 5,71 | 5,74 | 5,77 | 5,80 | 5,82 | 5,84 | 5,85 | 5,86 |
| 71 | 5,98 | 6,03 | 6,06 | 6,09 | 6,12 | 6,14 | 6,17 | 6,18 | 6,20 | 6,21 |
| 70 | 6,35 | 6,39 | 6,43 | 6,46 | 6,49 | 6,51 | 6,53 | 6,55 | 6,56 | 6,57 |
| 69 | 6,74 | 6,78 | 6,81 | 6,84 | 6,87 | 6,89 | 6,91 | 6,92 | 6,94 | 6,94 |
| 68 | 7,13 | 7,17 | 7,21 | 7,24 | 7,26 | 7,29 | 7,30 | 7,32 | 7,32 | 7,33 |
| 67 | 7,54 | 7,58 | 7,62 | 7,65 | 7,67 | 7,69 | 7,70 | 7,72 | 7,72 | 7,73 |
| 66 | 7,96 | 8,00 | 8,03 | 8,06 | 8,08 | 8,10 | 8,11 | 8,12 | 8,13 | 8,14 |
| 65 | 8,38 | 8,42 | 8,45 | 8,48 | 8,50 | 8,51 | 8,53 | 8,53 | 8,54 | 8,55 |
| 64 | 8,81 | 8,85 | 8,88 | 8,90 | 8,92 | 8,93 | 8,94 | 8,95 | 8,96 | 8,96 |
| 63 | 9,24 | 9,28 | 9,30 | 9,33 | 9,34 | 9,35 | 9,37 | 9,37 | 9,38 | 9,39 |
| 62 | 9,69 | 9,72 | 9,74 | 9,76 | 9,78 | 9,79 | 9,80 | 9,81 | 9,82 | 9,82 |
| 61 | 10,14 | 10,17 | 10,19 | 10,21 | 10,23 | 10,24 | 10,25 | 10,26 | 10,27 | 10,27 |
| 60 | 10,61 | 10,64 | 10,66 | 10,67 | 10,69 | 10,70 | 10,71 | 10,72 | 10,73 | 10,74 |
| 59 | 11,09 | 11,11 | 11,13 | 11,15 | 11,16 | 11,18 | 11,19 | 11,20 | 11,21 | 11,21 |
| 58 | 11,57 | 11,59 | 11,62 | 11,63 | 11,65 | 11,66 | 11,67 | 11,68 | 11,69 | 11,70 |
| 57 | 12,06 | 12,08 | 12,11 | 12,12 | 12,14 | 12,15 | 12,16 | 12,17 | 12,18 | 12,19 |
| 56 | 12,56 | 12,58 | 12,60 | 12,62 | 12,63 | 12,64 | 12,66 | 12,67 | 12,68 | 12,69 |
| 55 | 13,05 | 13,08 | 13,10 | 13,12 | 13,13 | 13,15 | 13,16 | 13,17 | 13,18 | 13,19 |
| 54 | 13,56 | 13,58 | 13,60 | 13,62 | 13,64 | 13,65 | 13,66 | 13,68 | 13,68 | 13,69 |
| 53 | 14,06 | 14,09 | 14,11 | 14,13 | 14,14 | 14,16 | 14,17 | 14,18 | 14,18 | 14,18 |
| 52 | 14,57 | 14,60 | 14,62 | 14,63 | 14,65 | 14,67 | 14,68 | 14,68 | 14,68 | 14,67 |
| 51 | 15,08 | 15,10 | 15,12 | 15,14 | 15,16 | 15,17 | 15,18 | 15,18 | 15,17 | 15,15 |
| 50 | 15,59 | 15,61 | 15,63 | 15,65 | 15,67 | 15,68 | 15,68 | 15,67 | 15,65 | 15,62 |
| 49 | 16,09 | 16,12 | 16,14 | 16,16 | 16,17 | 16,17 | 16,16 | 16,14 | 16,11 | — |
| 48 | 16,60 | 16,63 | 16,65 | 16,66 | 16,66 | 16,65 | 16,63 | 16,60 | — | — |
| 47 | 17,11 | 17,13 | 17,15 | 17,15 | 17,15 | 17,13 | 17,10 | — | — | — |
| 46 | 17,62 | 17,64 | 17,65 | 17,64 | 17,62 | 17,61 | — | — | — | — |
| 45 | 18,13 | 18,14 | 18,14 | 18,12 | 18,09 | — | — | — | — | — |
| 44 | 18,63 | 18,63 | 18,60 | 18,56 | — | — | — | — | — | — |
| 43 | 19,12 | 19,11 | 19,04 | — | — | — | — | — | — | — |
| 42 | 19,59 | 19,54 | — | — | — | — | — | — | — | — |
| 41 | 20,02 | — | — | — | — | — | — | — | — | — |

| m | 0 | +1 | +2 | +3 | +4 | +5 | +6 | +7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 90 | 0,58 | 0,55 | 0,52 | 0,47 | 0,44 | 0,39 | — | — |
| 89 | 0,71 | 0,68 | 0,65 | 0,60 | 0,55 | 0,50 | 0,44 | — |
| 88 | 0,85 | 0,83 | 0,79 | 0,75 | 0,70 | 0,63 | 0,57 | 0,50 |
| 87 | 0,99 | 0,98 | 0,95 | 0,91 | 0,85 | 0,79 | 0,71 | 0,64 |
| 86 | 1,13 | 1,12 | 1,11 | 1,07 | 1,02 | 0,95 | 0,87 | 0,78 |
| 85 | 1,26 | 1,25 | 1,24 | 1,22 | 1,18 | 1,11 | 1,04 | 0,95 |
| 84 | 1,40 | 1,36 | 1,36 | 1,35 | 1,33 | 1,28 | 1,20 | 1,11 |
| 83 | 1,56 | 1,52 | 1,50 | 1,48 | 1,47 | 1,44 | 1,38 | 1,29 |
| 82 | 1,75 | 1,69 | 1,65 | 1,63 | 1,61 | 1,58 | 1,55 | 1,48 |
| 81 | 1,97 | 1,89 | 1,82 | 1,77 | 1,74 | 1,72 | 1,69 | 1,65 |
| 80 | 2,20 | 2,10 | 2,04 | 1,94 | 1,88 | 1,85 | 1,82 | 1,79 |
| 79 | 2,41 | 2,31 | 2,21 | 2,11 | 2,03 | 1,98 | 1,94 | 1,91 |
| 78 | 2,60 | 2,51 | 2,41 | 2,30 | 2,19 | 2,11 | 2,05 | 2,01 |
| 77 | 2,77 | 2,68 | 2,59 | 2,48 | 2,36 | 2,25 | 2,16 | 2,10 |
| 76 | 2,92 | 2,84 | 2,75 | 2,65 | 2,53 | 2,41 | 2,30 | 2,21 |
| 75 | 3,09 | 3,00 | 2,91 | 2,82 | 2,71 | 2,59 | 2,46 | 2,35 |
| 74 | 3,28 | 3,18 | 3,09 | 2,99 | 2,89 | 2,78 | 2,66 | 2,52 |
| 73 | 3,49 | 3,39 | 3,28 | 3,18 | 3,08 | 2,98 | 2,86 | 2,73 |
| 72 | 3,74 | 3,62 | 3,50 | 3,39 | 3,29 | 3,18 | 3,07 | 2,95 |
| 71 | 4,00 | 3,87 | 3,75 | 3,63 | 3,51 | 3,40 | 3,29 | 3,17 |
| 70 | 4,28 | 4,15 | 4,01 | 3,88 | 3,75 | 3,63 | 3,51 | 3,40 |
| 69 | 4,59 | 4,44 | 4,30 | 4,16 | 4,02 | 3,88 | 3,75 | 3,62 |
| 68 | 4,91 | 4,75 | 4,60 | 4,45 | 4,29 | 4,15 | 4,00 | 3,86 |
| 67 | 5,25 | 5,08 | 4,91 | 4,75 | 4,59 | 4,43 | 4,27 | 4,12 |
| 66 | 5,61 | 5,42 | 5,25 | 5,07 | 4,90 | 4,73 | 4,56 | 4,39 |
| 65 | 5,98 | 5,79 | 5,59 | 5,41 | 5,22 | 5,04 | 4,86 | 4,68 |
| 64 | 6,37 | 6,16 | 5,96 | 5,76 | 5,56 | 5,36 | 5,17 | 4,98 |
| 63 | 6,77 | 6,56 | 6,34 | 6,13 | 5,91 | 5,71 | 5,50 | 5,30 |
| 62 | 7,19 | 6,97 | 6,75 | 6,52 | 6,29 | 6,07 | 5,85 | 5,63 |
| 61 | 7,62 | 7,40 | 7,17 | 6,93 | 6,70 | 6,46 | 6,22 | 5,99 |
| 60 | 8,06 | 7,84 | 7,61 | 7,37 | 7,12 | 6,87 | 6,62 | 6,37 |
| 59 | 8,51 | 8,29 | 8,06 | 7,82 | 7,56 | 7,30 | 7,04 | 6,78 |
| 58 | 8,97 | 8,75 | 8,52 | 8,28 | 8,02 | 7,75 | 7,48 | 7,20 |
| 57 | 9,45 | 9,23 | 8,99 | 8,74 | 8,48 | 8,22 | 7,93 | 7,65 |
| 56 | 9,94 | 9,71 | 9,47 | 9,22 | 8,96 | 8,68 | 8,40 | 8,11 |
| 55 | 10,45 | 10,20 | 9,95 | 9,70 | 9,44 | 9,16 | 8,88 | 8,58 |
| 54 | 10,97 | 10,71 | 10,46 | 10,19 | 9,92 | 9,64 | 9,36 | 9,06 |
| 53 | 11,50 | 11,24 | 10,97 | 10,70 | 10,42 | 10,13 | 9,85 | 9,55 |
| 52 | 12,04 | 11,77 | 11,50 | 11,21 | 10,93 | 10,63 | 10,34 | 10,04 |
| 51 | 12,58 | 12,31 | 12,03 | 11,74 | 11,45 | 11,15 | 10,84 | 10,53 |
| 50 | 13,12 | 12,86 | 12,58 | 12,28 | 11,98 | 11,67 | 11,35 | 11,04 |
| 49 | 13,67 | 13,40 | 13,12 | 12,83 | 12,52 | 12,20 | 11,88 | 11,55 |
| 48 | 14,22 | 13,95 | 13,67 | 13,38 | 13,07 | 12,75 | 12,42 | 12,08 |
| 47 | 14,77 | 14,51 | 14,23 | 13,94 | 13,63 | 13,30 | 12,97 | 12,62 |
| 46 | 15,33 | 15,07 | 14,79 | 14,50 | 14,19 | 13,86 | 13,53 | 13,18 |

| m | 0 | +1 | +2 | +3 | +4 | +5 | +6 | +7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 45 | 15,89 | 15,63 | 15,36 | 15,06 | 14,75 | 14,43 | 14,09 | 13,74 |
| 44 | 16,46 | 16,20 | 15,92 | 15,63 | 15,32 | 15,00 | 14,66 | 14,31 |
| 43 | 17,02 | 16,76 | 16,49 | 16,20 | 15,89 | 15,57 | 15,24 | 14,88 |
| 42 | 17,57 | 17,32 | 17,06 | 16,77 | 16,46 | 16,15 | 15,81 | 15,46 |
| 41 | 18,12 | 17,88 | 17,62 | 17,34 | 17,03 | 16,72 | 16,38 | 16,04 |
| 40 | 18,67 | 18,43 | 18,18 | 17,90 | 17,60 | 17,29 | 16,96 | 16,61 |
| 39 | 19,21 | 18,98 | 18,73 | 18,46 | 18,17 | 17,85 | 17,53 | 17,19 |
| 38 | 19,74 | 19,52 | 19,28 | 19,02 | 18,74 | 18,43 | 18,11 | 17,77 |
| 37 | 20,27 | 20,06 | 19,83 | 19,58 | 19,30 | 19,00 | 18,69 | 18,35 |
| 36 | 20,81 | 20,60 | 20,37 | 20,13 | 19,86 | 19,57 | 19,26 | 18,93 |
| 35 | 21,35 | 21,14 | 20,92 | 20,68 | 20,42 | 20,14 | 19,84 | 19,51 |
| 34 | 21,88 | 21,68 | 21,46 | 21,22 | 20,97 | 20,70 | 20,40 | 20,09 |
| 33 | 22,42 | 22,22 | 22,00 | 21,76 | 21,51 | 21,25 | 20,96 | 20,66 |
| 32 | 22,95 | 22,75 | 22,54 | 22,31 | 22,06 | 21,80 | 21,52 | 21,23 |
| 31 | 23,49 | 23,29 | 23,08 | 22,85 | 22,61 | 22,35 | 22,08 | 21,79 |
| 30 | 24,03 | 23,83 | 23,62 | 23,40 | 23,16 | 22,90 | 22,63 | 22,34 |
| 29 | 24,56 | 24,36 | 24,16 | 23,93 | 23,70 | 23,45 | 23,18 | 22,90 |
| 28 | 25,08 | 24,89 | 24,69 | 24,47 | 24,23 | 23,99 | 23,72 | 23,44 |
| 27 | 25,61 | 25,41 | 25,21 | 25,00 | 24,76 | 24,52 | 24,26 | 23,99 |
| 26 | 26,12 | 25,93 | 25,73 | 25,52 | 25,29 | 25,05 | 24,79 | 24,52 |
| 25 | 26,63 | 26,44 | 26,25 | 26,03 | 25,81 | 25,57 | 25,31 | 25,05 |

| m | +8 | +9 | +10 | +11 | +12 | +13 | +14 | +15 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 90 | — | — | — | — | — | — | — | — |
| 89 | — | — | — | — | — | — | — | — |
| 88 | — | — | — | — | — | — | — | — |
| 87 | 0,56 | — | — | — | — | — | — | — |
| 86 | 0,70 | 0,61 | — | — | — | — | — | — |
| 85 | 0,85 | 0,76 | 0,65 | — | — | — | — | — |
| 84 | 1,01 | 0,90 | 0,80 | 0,68 | — | — | — | — |
| 83 | 1,19 | 1,08 | 0,96 | 0,85 | 0,72 | — | — | — |
| 82 | 1,38 | 1,27 | 1,15 | 1,02 | 0,89 | 0,75 | — | — |
| 81 | 1,57 | 1,47 | 1,34 | 1,21 | 1,06 | 0,93 | 0,78 | — |
| 80 | 1,74 | 1,66 | 1,54 | 1,40 | 1,26 | 1,10 | 0,96 | 0,80 |
| 79 | 1,87 | 1,81 | 1,72 | 1,59 | 1,45 | 1,30 | 1,13 | 0,99 |
| 78 | 1,97 | 1,93 | 1,87 | 1,76 | 1,63 | 1,48 | 1,32 | 1,15 |
| 77 | 2,05 | 2.01 | 1,97 | 1,90 | 1,79 | 1,65 | 1,50 | 1,33 |
| 76 | 2,14 | 2,09 | 2,05 | 2,00 | 1,93 | 1,82 | 1,67 | 1,51 |
| 75 | 2,25 | 2,18 | 2,13 | 2,08 | 2,03 | 1,96 | 1,84 | 1,69 |
| 74 | 2,40 | 2,30 | 2,23 | 2,18 | 2,13 | 2,07 | 1,99 | 1,87 |
| 73 | 2,59 | 2,47 | 2,36 | 2,29 | 2,23 | 2,18 | 2,12 | 2,04 |
| 72 | 2,81 | 2,67 | 2,54 | 2,43 | 2,35 | 2,29 | 2,24 | 2,17 |
| 71 | 3,04 | 2,90 | 2,75 | 2,61 | 2,50 | 2,41 | 2,35 | 2,29 |

| m | +8 | +9 | +10 | +11 | +12 | +13 | +14 | +15 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 70 | 3,27 | 3,13 | 2,98 | 2,83 | 2,68 | 2,56 | 2,48 | 2,41 |
| 69 | 3,50 | 3,37 | 3,22 | 3,07 | 2,90 | 2,75 | 2,63 | 2.54 |
| 68 | 3,73 | 3,60 | 3,46 | 3,31 | 3,15 | 2,98 | 2,82 | 2,69 |
| 67 | 3,98 | 3,84 | 3,70 | 3,55 | 3,39 | 3,22 | 3,05 | 2,89 |
| 66 | 4,23 | 4,08 | 3,94 | 3,79 | 3,64 | 3,47 | 3,29 | 3,11 |
| 65 | 4,51 | 4,34 | 4,18 | 4,03 | 3,87 | 3,71 | 3,54 | 3,36 |
| 64 | 4,80 | 4,61 | 4,44 | 4,27 | 4,11 | 3,95 | 3,79 | 3,61 |
| 63 | 5,10 | 4,91 | 4,72 | 4,54 | 4,36 | 4,19 | 4,03 | 3,86 |
| 62 | 5,42 | 5,22 | 5,02 | 4,82 | 4,63 | 4,45 | 4,27 | 4,10 |
| 61 | 5,77 | 5,55 | 5,33 | 5,12 | 4,92 | 4,72 | 4,53 | 4,35 |
| 60 | 6,13 | 5,90 | 5,67 | 5,44 | 5,23 | 5,01 | 4,81 | 4,61 |
| 59 | 6,52 | 6,27 | 6,02 | 5,79 | 5,55 | 5,33 | 5,11 | 4,89 |
| 58 | 6,93 | 6,66 | 6,40 | 6,15 | 5,90 | 5,66 | 5,42 | 5,19 |
| 57 | 7,36 | 7,08 | 6,80 | 6,53 | 6,26 | 6,01 | 5,76 | 5,51 |
| 56 | 7,81 | 7,51 | 7,22 | 6,93 | 6,64 | 6,37 | 6,11 | 5,85 |
| 55 | 8,28 | 7,97 | 7,65 | 7,35 | 7,05 | 6,76 | 6,47 | 6,20 |
| 54 | 8,75 | 8,43 | 8,11 | 7,79 | 7,47 | 7,16 | 6,86 | 6,57 |
| 53 | 9,23 | 8,91 | 8,58 | 8,25 | 7,92 | 7,59 | 7,27 | 6,96 |
| 52 | 9,72 | 9,40 | 9,07 | 8,72 | 8,38 | 8,04 | 7,70 | 7,37 |
| 51 | 10,22 | 9,89 | 9,55 | 9,21 | 8,86 | 8,50 | 8,15 | 7,80 |
| 50 | 10,71 | 10,38 | 10,05 | 9,70 | 9,34 | 8,98 | 8,61 | 8,25 |
| 49 | 11,22 | 10,88 | 10,54 | 10,19 | 9,83 | 9,47 | 9,09 | 8,72 |
| 48 | 11,74 | 11,39 | 11,04 | 10,69 | 10,33 | 9,96 | 9,58 | 9,20 |
| 47 | 12,27 | 11,91 | 11,55 | 11,20 | 10,83 | 10,46 | 10,08 | 9,69 |
| 46 | 12,82 | 12,45 | 12,08 | 11,72 | 11,34 | 10,97 | 10,59 | 10,20 |
| 45 | 13,38 | 13,01 | 12,63 | 12,25 | 11,87 | 11,49 | 11,10 | 10,71 |
| 44 | 13,94 | 13,57 | 13,18 | 12,79 | 12,40 | 12,01 | 11,62 | 11,22 |
| 43 | 14,51 | 14,14 | 13,75 | 13,35 | 12,95 | 12,55 | 12,15 | 11,74 |
| 42 | 15,09 | 14,72 | 14,33 | 13,92 | 13,51 | 13,10 | 12,69 | 12,27 |
| 41 | 15,66 | 15,29 | 14,90 | 14,50 | 14,08 | 13,66 | 13,24 | 12,81 |
| 40 | 16,25 | 15,87 | 15,48 | 15,08 | 14,66 | 14,23 | 13,80 | 13,36 |
| 39 | 16,83 | 16,45 | 16,06 | 15,66 | 15,24 | 14,81 | 14,38 | 13,93 |
| 38 | 17,41 | 17,04 | 16,65 | 16,25 | 15,83 | 15,40 | 14,96 | 14,51 |
| 37 | 17,99 | 17,62 | 17,24 | 16,84 | 16,42 | 15,99 | 15,55 | 15,10 |
| 36 | 18,58 | 18,21 | 17,83 | 17,43 | 17,02 | 16,59 | 16,15 | 15,70 |
| 35 | 19,17 | 18,81 | 18,43 | 18,03 | 17,62 | 17,19 | 16,76 | 16,31 |
| 34 | 19,75 | 19,40 | 19,02 | 18,63 | 18,22 | 17,79 | 17,86 | 16,91 |
| 33 | 20,33 | 19,98 | 19,61 | 19,22 | 18,82 | 18,40 | 17,96 | 17,52 |
| 32 | 20,91 | 20,57 | 20,20 | 19,83 | 19,42 | 19,00 | 18,57 | 18,13 |
| 31 | 21,48 | 21,15 | 20,79 | 20,42 | 20,03 | 19,61 | 19,19 | 18,74 |
| 30 | 22,04 | 21,72 | 21,38 | 21,01 | 20,63 | 20,22 | 19,80 | 19,36 |
| 29 | 22,60 | 22,28 | 21,95 | 21,59 | 21,22 | 20,82 | 20,40 | 19,97 |
| 28 | 23,15 | 22,84 | 22,51 | 22,16 | 21,80 | 21,41 | 21,00 | 20,58 |
| 27 | 23,70 | 23,39 | 23,06 | 22,72 | 22,37 | 21,99 | 21,59 | 21,17 |
| 26 | 24,23 | 23,93 | 23,61 | 23,28 | 22,93 | 22,56 | 22,17 | 21,76 |
| 25 | 24,76 | 24,47 | 24,15 | 23,82 | 23,48 | 23,11 | 22,76 | 22,34 |

**C. Neumann**, *Verallgemeinerung des Bobylew'schen Satzes**).

Die gegenseitige ponderomotorische Einwirkung zwischen zwei elektrisch geladenen Kugeln kann unter Umständen = 0 sein. In der That kann man jene Einwirkung zum Verschwinden bringen, sobald man nur dem Quotienten $\frac{E_1}{E_2}$ der auf den Kugeln vorhandenen Elektricitätsmengen einen *geeigneten Werth* zuertheilt. Und zwar existiren für jeden gegebenen Centralabstand der beiden Kugeln *zwei* solche Werthe, die sich darstellen als die Wurzeln einer quadratischen Gleichung, deren Coefficienten Functionen des Centralabstandes sind. Diese Wurzeln sind stets *reell*. — So lautet der *Bobylew*'sche Satz (Math. Annalen, Bd. 7. Seite 396).

Indessen können die etwas mühsamen Rechnungen, durch welche *Bobylew* zu diesem Satz gelangte, durch ziemlich einfache *allgemeine Betrachtungen* ersetzt werden, welche zugleich den Vortheil gewähren, dass man mittels derselben den Satz auf *Conductoren von beliebiger Gestalt* auszudehnen im Stande ist.

Diese allgemeinen Betrachtungen, deren nähere Mittheilung der Zweck des vorliegenden Aufsatzes ist, beruhen der Hauptsache nach auf gewissen schon früher von mir aufgestellten allgemeinen Sätzen, welche folgendermassen formulirt werden können:

**I. Satz.** — *Sind zwei Conductoren beliebig geladen, so wird* (falls keine äusseren Kräfte influiren) *immer wenigstens auf einem derselben eine monogene Vertheilung anzutreffen sein***).

**II. Satz.** — *Haben insbesondere die Conductoren gleiche elektrische Spannung, so finden auf beiden monogene Vertheilungen statt, und zwar von gleichem Vorzeichen****).

---

*) Vorgetragen in der Sitzung am 23. April 1880.

**) Vgl. *C. Neumann*: Unt. üb. d. L. u. N. Potential (Leipzig 1877), daselbst Seite 88, erster Satz. Ich nenne die elektrische Vertheilung auf einem gegebenen Conductor *monogen* oder *amphigen*, jenachdem die elektrische Dichtigkeit an allen Stellen der Oberfläche *dasselbe* Vorzeichen oder an verschiedenen Stellen *verschiedenes* Vorzeichen hat.

***) l. c. Seite 93, zweite Behauptung.

**III. Satz.** — *Ist die Spannung des einen Conductors positiv, die des andern negativ, so finden auf beiden monogene Vertheilungen statt, und zwar von entgegengesetztem Vorzeichen**).

**IV. Satz.** — *Ist die elektrische Spannung des einen Conductors beliebig, die des andern gleich Null, so finden auf beiden Conductoren monogene Vertheilungen statt, und zwar von entgegengesetztem Vorzeichen***).

Aus dem letzten Satz folgt beiläufig, dass zwei Conductoren, von denen der eine isolirt, der andere hingegen zur Erde abgeleitet ist, stets *anziehend* auf einander einwirken. Und ähnliche Folgerungen knüpfen sich an die andern Sätze.

## § 1.

## Das Potential eines Systemes elektrischer Conductoren.

Es sei gegeben ein System von Conductoren $\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2, \ldots \mathfrak{C}_n$, die respective mit den Elektricitätsmengen $E_1, E_2, \ldots E_n$ geladen sind***). Und das *Potential dieses Systemes auf sich selber* mag bezeichnet sein mit

$$W = \frac{1}{2} \Sigma \Sigma \frac{eDo \cdot e'Do'}{r}, \tag{1.}$$

wo $e$, $e'$ die in irgend zwei Oberflächen-Elementen $Do$, $Do'$ vorhandenen elektrischen Dichtigkeiten vorstellen, während $r$ die Entfernung der beiden Elemente von einander repräsentirt. Dabei ist die Summation nach $Do$ über sämmtliche Oberflächen-Elemente des ganzen Systemes ausgedehnt zu denken, und ebenso auch diejenige nach $Do'$. — — †).

---

*) Vgl. *C. Neumann:* Unt. üb. d. L. u. N. Potential (Leipzig 1877), daselbst Seite 93, dritte Behauptung.

**) l. c. Seite 94, vierte Behauptung.

***) Ob alle Conductorent *isolirt*, oder ob vielleicht einige derselben *zur Erde abgeleitet* sind, soll völlig dahingestellt bleiben.

†) Man kann offenbar dieses Potential $W$ (1.) in folgende $n + \frac{n(n-1)}{2}$ Glieder zerlegen:

$$W = (W_{11} + W_{22} + \cdots + W_{nn}) + (W_{12} + W_{13} + \cdots),$$

wo z. B. $W_{11}$ das Potential des Conductors $\mathfrak{C}_1$ auf sich selber bezeichnet, während andererseits $W_{12}$ z. B. das Potential des Conductors $\mathfrak{C}_1$ auf den Conductor $\mathfrak{C}_2$ vorstellen soll.

Die Formel (1.) kann offenbar auch so geschrieben werden:

$$W = \frac{1}{2} \Sigma \left(e Do\, \Sigma \frac{e' Do'}{r}\right),$$

oder, falls man $\Sigma \frac{e' Do'}{r} = V$ setzt, auch so:

$$W = \frac{1}{2} \Sigma (V e Do),$$

wo alsdann $V$ das *Potential des Systems auf einen Punkt* bezeichnet. Die Summe $\Sigma (V e Do)$ kann nun entsprechend den einzelnen Conductoren $\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2, \cdots \mathfrak{C}_n$ in eben so viele einzelne Summen zerlegt werden; so dass man erhält:

$$W = \frac{1}{2} \Sigma (V_1 e_1 Do_1) + \frac{1}{2} \Sigma (V_2 e_2 Do_2) + \cdots.$$

Befindet sich die elektrische Materie bei der gegebenen räumlichen Lage des Systems im Gleichgewichtszustande, so wird das Potential $V$ auf jedem Conductor von *constantem* Werthe sein. Bezeichnet man diese den einzelnen Conductoren $\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2 \cdots \mathfrak{C}_n$ entsprechenden constanten Werthe resp. mit $C_1, C_2, \cdots C_n$, so folgt aus der letzten Formel:

$$W = \frac{1}{2} C_1 \Sigma (e_1 Do_1) + \frac{1}{2} C_2 \Sigma (e_2 Do_2) \cdots,$$

oder, was dasselbe ist:

$$(2.) \qquad W = \frac{1}{2} (C_1 E_1 + C_2 E_2 + \cdots + C_n E_n),$$

wo $E_1, E_2, \cdots E_n$ die schon zu Anfang genannten Bedeutungen haben. Es repräsentiren also $E_1, E_2, \cdots E_n$ die *elektrischen Ladungen* der einzelnen Conductoren, während andererseits $C_1, C_2, \cdots C_n$ die *elektrischen Spannungen* derselben vorstellen.

Lassen wir das System $\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2, \cdots \mathfrak{C}_n$ aus seiner ursprünglichen räumlichen Lage in eine benachbarte Lage übergehen, so wird, nach Eintritt des entsprechenden elektrischen Gleichgewichtszustandes, die elektrische Vertheilung auf jedem einzelnen Conductor eine etwas andere sein als früher. Bezeichnen wir für diese neue räumliche Lage und den neuen elektrischen Gleichgewichtszustand das Potential des Systemes auf sich selber mit $W + dW$, so wird der Zuwachs $dW$ zerlegbar sein in zwei partielle Zuwüchse $\delta W$ und $\Delta W$, von denen der erstere herrührt von den Aenderungen der *räumlichen Lage*, während letzterer den Aenderungen der *elektrischen Dichtigkeiten* entspricht. Wir erhalten daher aus (1.) folgende Formeln:

(3.) $$dW = \delta W + \Delta W,$$

(4.) $$\delta W = -\tfrac{1}{2} \Sigma\Sigma \frac{eDo \cdot e'Do' \cdot dr}{r^2},$$

(5.) $$\Delta W = +\tfrac{1}{2} \Sigma\Sigma \frac{(de)\,Do \cdot e'Do' + eDo \cdot (de')\,Do'}{r},$$

wo die Aenderungen der $r$, $e$, $e'$ resp. mit $dr$, $de$, $de'$ bezeichnet sind.

Die Formel (5.) kann, wie leicht zu übersehen, einfacher dargestellt werden, nämlich so:

$$\Delta W = \Sigma\Sigma \frac{(de)\,Do \cdot e'Do'}{r} = \Sigma \left((de)\,Do\,\Sigma \frac{e'Do'}{r}\right),$$

oder, wenn man $V$ in genau derselben Bedeutung wie vorhin braucht:

$$\Delta W = \Sigma\, V\,(de)\; Do.$$

Hieraus aber folgt, wenn man die Summe, entsprechend den einzelnen Conductoren $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_2$, $\cdots$ $\mathfrak{C}_n$ in eben so viele einzelne Summen zerlegt:

$$\Delta W = \Sigma\, V_1\,(de_1)\; Do_1 + \Sigma\, V_2\,(de_2)\; Do_2 + \cdots$$

Diese Formel aber kann, weil $V_1 = C_1$, $V_2 = C_2$, $\cdots$ ist, auch so geschrieben werden:

$$\Delta W = C_1\, \Sigma\,(de_1)\; Do_1 + C_2\, \Sigma\,(de_2)\; Do_2 + \cdots\cdot$$

oder auch so:

$$\Delta W = C_1\, d\,(\Sigma\, e_1 Do_1) + C_2\, d\,(\Sigma\, e_2 Do_2) + \cdots\cdot$$

d. i.

(6.) $$\Delta W = C_1\, dE_1 + C_2\, dE_2 + \cdots + C_n\, dE_n.$$

Stellen wir die erhaltenen Resultate zusammen, so ist nach (2.)

(7.) $$W = \tfrac{1}{2}\, \Sigma\, C_j\, E_j, \qquad (j = 1, 2, 3, \cdots n),$$

mithin:

(8.) $$dW = \tfrac{1}{2}\, \Sigma\, (C_j\, dE_j + E_j\, dC_j),$$

wo $C_1 + dC_1$, $C_2 + dC_2$, $\cdots$ $C_n + dC_n$ diejenigen Werthe vorstellen, welche die elektrischen Spannungen der einzelnen Conductoren in der *neuen* Lage haben. Ferner ist nach (6.):

(9.) $$\Delta W = \Sigma\, C_j\; dE.$$

Und endlich erhält man durch Subtraction von (8.) und (9.) und mit Rücksichtnahme auf (3.) die Formel:

$$(10.)\qquad \delta W = -\tfrac{1}{2}\,\Sigma\,(C_j\,dE_j - E_j\,dC_j).$$

## § 2.

## Fortsetzung. Zusammenhang des Potentials mit der ponderomotorischen Arbeit.

Welche Gestalten die gegebenen Conductoren auch besitzen mögen, stets finden zwischen den elektrischen Ladungen $E_1$, $E_2, \cdots E_n$ und den elektrischen Spannungen $C_1, C_2, \ldots C_n$ lineare Gleichungen von folgender Form statt:

$$(11.)\qquad \begin{aligned} E_1 &= \alpha_{11}\,C_1 + \alpha_{12}\,C_2 \cdots\cdots + \alpha_{1n}\,C_n, \\ E_2 &= \alpha_{21}\,C_1 + \alpha_{22}\,C_2 \cdots\cdots + \alpha_{2n}\,C_n, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ E_n &= \alpha_{n1}\,C_1 + \alpha_{n2}\,C_2 \cdots\cdots + \alpha_{nn}\,C_n. \end{aligned}$$

Die Coefficienten $\alpha$ sind *Functionen der geometrischen* Verhältnisse; denn sie hängen, ausser von den Gestalten der einzelnen Conductoren, nur noch ab von ihrer räumlichen Lage. Ausserdem sind sie *symmetrisch*, entsprechen also den Relationen $\alpha_{12} = \alpha_{21}$, $\alpha_{13} = \alpha_{31}$, etc. etc.

Aus diesen Gleichungen (11.) folgt durch Differentiation:

$$\begin{aligned} dE_1 &= (\alpha_{11}\,dC_1 + \alpha_{12}\,dC_2 + \cdots) + (C_1\,d\alpha_{11} + C_2\,d\alpha_{12} + \cdots), \\ dE_2 &= (\alpha_{21}\,dC_1 + \alpha_{22}\,dC_2 + \cdots) + (C_1\,d\alpha_{21} + C_2\,d\alpha_{22} + \cdots), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

Multiplicirt man aber diese Formeln mit $C_1, C_2, \cdots$, und addirt, so ergiebt sich mit Rücksicht auf (11.):

$$\begin{aligned} (C_1\,dE_1 + C_2\,dE_2 + \cdots) = (E_1\,dC_1 + E_2\,dC_2 + \cdots) &+ \\ + (C_1{}^2\,d\alpha_{11} + 2\,C_1 C_2\,d\alpha_{12} + \cdots)&, \end{aligned}$$

oder was dasselbe ist:

$$\Sigma\,(C_j\,dE_j - E_j\,dC_j) = (C_1{}^2\,d\alpha_{11} + 2\,C_1 C_2\,d\alpha_{12} + \cdots).$$

Somit folgt aus (10)

$$(12.)\qquad \delta W = -\tfrac{1}{2}\,(C_1{}^2\,d\alpha_{11} + 2\,C_1 C_2\,d\alpha_{12} + \cdots);$$

während $W$ selber nach (7.), (11.) den Werth hat:

$$(13.)\qquad W = \tfrac{1}{2}\,(C_1{}^2\,\alpha_{11} + 2\,C_1 C_2\,\alpha_{12} + \cdots).$$

**Zusammenfassung.** — *Besitzen die Conductoren $\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2, \cdots \mathfrak{C}_n$ die elektrischen Ladungen $E_1, E_2, \cdots E_n$ und die elektrischen Spannungen $C_1, C_2, \cdots C_n$, so wird das Potential $W$ des ganzen Systemes auf sich selber den Werth haben:*

$$(14.a) \qquad W = \tfrac{1}{2} \Sigma\, C_j E_j; \qquad (j = 1, 2, \cdots n).$$

*Dabei mag völlig dahingestellt bleiben, ob sämmtliche Conductoren isolirt, oder ob vielleicht einige derselben zur Erde abgeleitet sind.*

*Lässt man nun das System aus der gegebenen Lage in irgend welche benachbarte Lage übergehen, und bezeichnet man die diesem Uebergange entsprechenden Zuwüchse der Grössen $W$, $E_j$, $C_j$ resp. mit $dW$, $dE_j$, $dC_j$, so wird:*

$$(14.b) \qquad dW = \tfrac{1}{2} \Sigma\, (E_j dC_j + C_j dE_j).$$

*Zerlegt man diesen Zuwachs $dW$ in zwei Theile $\delta W$ und $\Delta W$, von denen der erstere nur von der Aenderung der räumlichen Lage herrührt, während der letztere den Aenderungen der elektrischen Dichtigkeiten entspricht, so ergiebt sich:*

$$(14.c) \qquad dW = \delta W + \Delta W,$$
$$wo: \begin{cases} \delta W = \tfrac{1}{2} \Sigma\, (E_j dC_j - C_j dE_j), \\ \Delta W = \Sigma\, C_j dE_j. \qquad {}^{*}) . \end{cases}$$

*Beachtet man endlich, dass zwischen den $E_j$ und $C_j$ lineare Gleichungen von folgender Form stattfinden:*

$$(14.d) \qquad \begin{aligned} E_1 &= \alpha_{11} C_1 + \alpha_{12} C_2 + \cdots + \alpha_{1n} C_n, \\ E_2 &= \alpha_{21} C_1 + \alpha_{22} C_2 + \cdots + \alpha_{2n} C_n, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ E_n &= \alpha_{n1} C_1 + \alpha_{n2} C_2 + \cdots + \alpha_{nn} C_n, \end{aligned}$$

*so kann man die Werthe von $W$ und $\delta W$ auch so darstellen:*

$$(14.e) \qquad \begin{aligned} W &= \tfrac{1}{2} (C_1^2 \alpha_{11} + 2\, C_1 C_2 \alpha_{12} + \cdots), \\ \delta W &= -\tfrac{1}{2} (C_1^2 d\alpha_{11} + 2\, C_1 C_2 d\alpha_{12} + \cdots). \end{aligned}$$

---

*) Jeder Conductor $\mathfrak{C}_j$ ist entweder *zur Erde abgeleitet* oder *isolirt*. Im erstern Fall wird $C_j = 0$, im letzteren $E_j =$ const., mithin $dE_j = 0$ sein. Das Product $C_j dE_j$ ist also *unter allen Umständen* $= 0$. Und mit Rücksicht hierauf können die Formeln (14.b, c) auch so geschrieben werden:

$$dW = \delta W = \tfrac{1}{2} \Sigma\, E_j dC_j,$$
$$\Delta W = 0.$$

*Dabei bezeichnen die $\alpha$ gewisse Grössen, die nur von der räumlichen Lage des Systemes abhängen, und z. B. für ein aus zwei Kugeln bestehendes System leicht berechnet werden können.*

Der partielle Zuwachs $\delta W$ hat bekanntlich eine einfache physikalische Bedeutung. Denn die von den elektrischen Kräften in dem gegebenen System während der betrachteten Lagenveränderung verrichtete *ponderomotorische Arbeit* ist*) $= -\delta W$. Bezeichnet man also jene Arbeit mit $dL$, so hat man nach (14.e) die Formel:

$$(15.)\quad dL = -\delta W = \tfrac{1}{2}\,(C_1{}^2 d\alpha_{11} + 2\,C_1 C_2\, d\alpha_{12} + \cdots).$$

Und diese Formel kann benutzt werden, um *jene Kräfte selber* näher zu bestimmen.

**Erstes Beispiel.** Nimmt man an, der Conductor $\mathfrak{C}_1$ sei sich selber parallel beweglich in der Richtung der $x$-Axe, und alle übrigen Conductoren $\mathfrak{C}_2, \mathfrak{C}_3, \cdots \mathfrak{C}_n$ seien unbeweglich, so werden die Coefficienten $\alpha$ Functionen *einer einzigen* Variablen sein, nämlich nur abhängen von der $x$-Coordinate des Mittelpunctes**) von $\mathfrak{C}_1$. Und denkt man sich den Conductor $\mathfrak{C}_1$ sich selber parallel in der Richtung der $x$-Axe verschoben, also die genannte Coordinate etwa vermehrt von $x$ auf $x + dx$, so wird die während dieser Verschiebung von den elektrischen Kräften verrichtete *ponderomotorische Arbeit* $dL$ nach (15.) den Werth haben:

$$(16.)\qquad dL = \tfrac{1}{2}\left(C_1{}^2\,\frac{d\alpha_{11}}{dx} + 2\,C_1\,C_2\,\frac{d\alpha_{12}}{dx} + \cdots\right) dx.$$

Hieraus folgt sofort, dass die auf den Conductor $\mathfrak{C}_1$ in der Richtung der $x$-Axe ausgeübte Kraft $X$ den Werth hat:

$$(16.a)\qquad X = \tfrac{1}{2}\left(C_1{}^2\,\frac{d\alpha_{11}}{dx} + 2\,C_1 C_2\,\frac{d\alpha_{12}}{dx} + \cdots\right).$$

**Zweites Beispiel.** Der Conductor $\mathfrak{C}_1$ sei drehbar um die $x$-Axe, während wieder alle übrigen Conductoren unbeweglich sein sollen. Alsdann sind die $\alpha$ Functionen desjenigen Winkels

*) Vgl. *C. Neumann:* Die elektrischen Kräfte (Leipzig 1873), Seite 25. Aus der daselbst genannten *Hypothese* ergiebt sich nämlich die obige Behauptung über $\delta W$.

**) Unter dem *Mittelpunct* des Conductor $\mathfrak{C}_1$ ist irgend ein bestimmter Punkt desselben zu verstehen, z. B. der Schwerpunct seiner ponderablen Masse.

$\varphi$, unter welchem eine durch die $x$-Axe gehende und mit $\mathfrak{C}_1$ verbundene Ebene gegen die $xy$-Ebene geneigt ist. Lässt man den Winkel $\varphi$ um $d\varphi$ anwachsen, so wird die bei dieser unendlich kleinen Drehung von den elektrischen Kräften verrichtete *ponderomotorische Arbeit* $dL$, nach (15.), den Werth haben:

$$(17.)\qquad dL = \tfrac{1}{2}\left(C_1{}^2\frac{d\alpha_{11}}{d\varphi} + 2\,C_1C_2\frac{d\alpha_{12}}{d\varphi} + \cdots\right)d\varphi.$$

Und hieraus folgt, dass das auf den Conductor $\mathfrak{C}_1$ von den übrigen Conductoren in Bezug auf die $x$-Axe ausgeübte Drehungsmoment $\Delta$ den Werth hat:

$$(17.a)\qquad \Delta = \tfrac{1}{2}\left(C_1{}^2\frac{d\alpha_{11}}{d\varphi} + 2\,C_1C_2\frac{d\alpha_{12}}{d\varphi} + \cdots\right);$$

wie sich solches z. B. ergiebt aus dem nächstfolgenden Aufsatz [Satz (3.), Seite 37].

§ 3.

## Historisches.

Aehnliche Betrachtungen, wie wir sie in den vorhergehenden §§ angestellt haben, sind bereits im Jahre 1845 von *W. Thomson* angestellt worden. Diese Betrachtungen sind von *Thomson* selber in seinem 1872 erschienenem Werke*) folgendermassen reproducirt worden:

»*The »»mechanical value«« of a distribution of electri-»city on a group of insulated conductors may be easily shown to »be equal to half the sum of the products obtained by multiplying »the quantity of electricity on each conductor into the potential within »it**). Hence if $E_1$ and $E_2$ denote the quantities of electricity on »the two spheres in the present case, and if $W$ denote the mechani-»cal value of the distribution of electricity on them, we have:*

$$(I.)\qquad W = \tfrac{1}{2}(E_1C_1 + E_2C_2).\text{***})$$

»*Now if the two spheres, kept insulated, be pushed towards one*

---

*) *W. Thomson: Reprint of Papers on Electrostatics and Magnetism, London 1872*, daselbst Seite 92.

**) Diese *innern Potentiale* sind dieselben, welche wir im Vorhergehenden bezeichnet haben als die *elektrischen Spannungen* der einzelnen Conductoren.

***) $C_1$ und $C_2$ sind die *elektrischen Spannungen* der beiden Kugeln. — Man wird entschuldigen, dass ich, um unnöthige Discontinuitäten zu ver-

»*another, so as to diminish the distance between their centres from* $x$ »*to* $x - dx$, *the quantity of work that will have to be spent will be* »$F dx$, *since* $F$ *denotes the repulsive force against which this rela-* »*tive motion is effected. But the mechanical value of the distribu-* »*tion in the altered circumstances must be increased by an amount* »*equal to the work spent in producing no other effect but this alte-* »*ration. Hence*

(II.) $$F dx = - dW,$$

»*and therefore:*

(III.) $$F = - \frac{1}{2} \frac{d(E_1 C_1 + E_2 C_2)}{dx},$$

»*where* $C_1$ *and* $C_2$ *are to be considered as varying with* $x$, *and* $E_1$ »*and* $E_2$ *as constants.*«

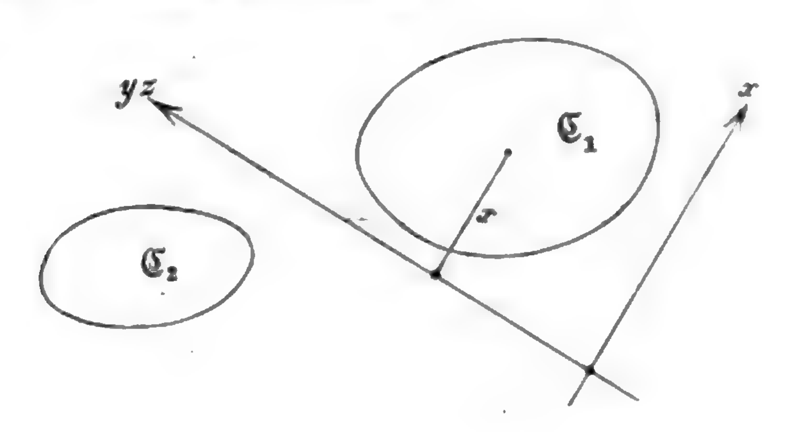
## § 4.

## Anwendung auf ein System von zwei Conductoren.

Für den Fall von *zwei* Conductoren $\mathfrak{C}_1$ und $\mathfrak{C}_2$ nehmen die Formeln (14.d) die Gestalt an:

(18.) $$E_1 = \alpha_{11} C_1 + \alpha_{12} C_2, \quad E_2 = \alpha_{21} C_1 + \alpha_{22} C_2.$$

Wir wollen nun ein rechtwinkliges Coordinatensystem einführen; und zwar mag die $yz$-Ebene *zwischen* den beiden Conductoren $\mathfrak{C}_1$ und $\mathfrak{C}_2$ hindurchgehen, und die positive $x$-Axe auf der Seite des Conductors $\mathfrak{C}_1$ sich befinden. *Dies vorausgesetzt, wollen wir die- diejenige Wirkung X in Untersuchung ziehen, welche* $\mathfrak{C}_2$ *auf* $\mathfrak{C}_1$ *ausübt in der Richtung der* $x$-*Axe.*




meiden, die *Thomson*'sche Bezeichnungsweise ein wenig geändert habe. Denn *Thomson* braucht statt $C_1$, $C_2$ und $E_1$, $E_2$ respective die Buchstaben $u$, $v$ und $D$, $E$.

Um näher auf die Sache einzugehen, wollen wir (ähnlich wie früher) annehmen, der Conductor $\mathfrak{C}_2$ sei *fest*, hingegen der Conductor $\mathfrak{C}_1$ sich selber parallel beweglich in der Richtung der $x$-Axe. Dann sind $\alpha_{11}$, $\alpha_{12}$, $\alpha_{22}$ nur abhängig von der $x$-Coordinate des Mittelpunktes von $\mathfrak{C}_1$. Bezeichnen wir also diese Coordinate mit $x$ selber, so wird die gesuchte Kraft $X$, nach (16.a), den Werth haben:

$$(19.) \qquad X = \tfrac{1}{2}\left(C_1{}^2 \frac{d\alpha_{11}}{dx} + 2\, C_1 C_2 \frac{d\alpha_{12}}{dx} + C_2{}^2 \frac{d\alpha_{22}}{dx}\right).$$

Dieser Formel zufolge ist die Kraft $X$ erstens eine Function von $\frac{d\alpha_{11}}{dx}$, $\frac{d\alpha_{12}}{dx}$, $\frac{d\alpha_{22}}{dx}$, die ihrerseits abhängen von den augenblicklichen *geometrischen Verhältnissen*, und zweitens eine Function von $C_1$, $C_2$, die ihrerseits abhängen von den *elektrischen Ladungen*. Bei der gegenwärtigen Betrachtung wollen wir die *geometrischen Verhältnisse*, mithin auch

$$(20.) \qquad \frac{d\alpha_{11}}{dx}, \quad \frac{d\alpha_{12}}{dx}, \quad \frac{d\alpha_{22}}{dx}$$

*constant* erhalten, und untersuchen, in welcher Weise die Kraft $X$ variirt, sobald man die elektrischen Ladungen $E_1$, $E_2$, und mittelst dieser die elektrischen Spannungen $C_1$, $C_2$ sich ändern lässt.

Machen wir zunächst $C_2 = 0$, so reducirt sich die Kraft $X$ (19.) auf

$$X = \tfrac{1}{2}\, C_1{}^2 \frac{d\alpha_{11}}{dx}.$$

In diesem Specialfall: $C_2 = 0$, sind aber (nach dem IV. Satz Seite 23) auf beiden Conductoren *monogene* Vertheilungen vorhanden, und zwar von *entgegengesetztem* Vorzeichen, so dass also zwischen den Conductoren eine gegenseitige *Anziehung* stattfindet. Und hieraus folgt mit Rücksicht auf die festgesetzten geometrischen Verhältnisse (vgl. die Figur) sofort, dass die Kraft $X$ in diesem Specialfalle *negativ* ist. Somit ersehen wir aus der letzten Formel, dass die Constante $\frac{d\alpha_{11}}{dx}$ ebenfalls *negativ* ist.

Analoges lässt sich offenbar zeigen hinsichtlich der Constanten $\frac{d\alpha_{22}}{dx}$. Also:

$$\frac{d\alpha_{11}}{dx} = \text{neg.}$$
(21.)
$$\frac{d\alpha_{22}}{dx} = \text{neg.}$$

Man sieht, dass die vorausgesetzten geometrischen Verhältnisse von Wichtigkeit sind. Denn die Ableitung dieser Formeln (21.) würde *defect* werden, sobald wir die Voraussetzung, dass die $yz$-Ebene *zwischen* den beiden Conductoren liegt, aufgeben wollten.

Solches vorausgeschickt, legen wir uns die Frage vor, *ob man, wenn die geometrischen Verhältnisse, und überdies $C_1$ gegeben sind, die Spannung $C_2$ in solcher Weise einzurichten vermag, dass die Kraft $X$ (19.) verschwindet.* Dabei mag der Bequemlichkeit willen

(22.) $$C_1 = 1 \quad \text{und} \quad C_2 = C$$

gesetzt werden, so dass also $X$ übergeht in:

(23.) $$X = \frac{1}{2}\underbrace{\left(\frac{d\alpha_{11}}{dx} + 2\,C\,\frac{d\alpha_{12}}{dx} + C^2\,\frac{d\alpha_{22}}{dx}\right)}_{f\,(C)};$$

auch mag zur Abkürzung das Trinom rechter Hand mit $f(C)$ bezeichnet werden. *Da $f(C)$ in Bezug auf $C$ quadratisch ist, so existiren zwei (und nur zwei) Werthe von $C$, für welche $f(C)$ verschwindet, mithin $X = 0$ wird.* Es fragt sich nur noch, ob diese Werthe reell oder imaginär sind.

Die Werthe des Trinoms $f(C)$ sind ihrem Vorzeichen nach leicht bestimmbar für $C = -\infty, 0, +1, +\infty$. Zunächst folgt nämlich aus (23.), mit Hinblick auf (21.), sofort:

(24.) $$\begin{aligned} f(-\infty) &= \text{neg.} \\ f(0) &= \text{neg.} \\ f(+\infty) &= \text{neg.} \end{aligned}$$

Was ferner $f(1)$ betrifft, so repräsentirt dieses $f(1)$, nach (23.), denjenigen Specialwerth, welchen die Kraft $X$ annimmt für $C = 1$, d. i. [vgl. (22.)] für $C_1 = C_2$. In diesem Specialfall: $C_1 = C_2$ haben aber die Conductoren *monogene* Belegungen von *gleichem* Vorzeichen (II. Satz, Seite 22); so dass also zwischen ihnen eine gegenseitige *Abstossung* stattfindet, mithin $X$ (vgl. die Figur)

*positiv* ist. Demgemäss wird also das diesen Specialwerth von $X$ repräsentirende $f(1)$ ebenfalls *positiv* sein. Demgemäss ist die Tabelle (24.) in folgender Weise zu vervollständigen:

$$\begin{aligned} f(-\infty) &= \text{neg.}, \\ f(0) &= \text{neg.}, \\ f(1) &= \text{pos.}, \\ f(+\infty) &= \text{neg.} \end{aligned} \tag{25.}$$

Und hieraus folgt sofort, dass die in Frage stehenden Wurzeln der Gleichung $f(C) = 0$ beide *reell* sind, und dass die eine derselben zwischen 0 und 1, die andern zwischen 1 und $+\infty$ liegt*).

Es giebt also immer *zwei*, und nur zwei Werthe von $C$, für welche $X = 0$ wird. Dies überträgt sich unmittelbar auf den Quotienten der beiden Ladungen $E_1$ und $E_2$; denn dieser Quotient steht nach (18.) und (22.) zu $C$ in der Beziehung:

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{a_{11} + a_{12} C}{a_{21} + a_{22} C}.$$

Wir gelangen somit zu folgendem Resultat:

*Denkt man sich zwei Conductoren von beliebiger Gestalt, die isolirt und mit den Elektricitätsmengen $E_1$, $E_2$ geladen sind, so kann man, falls die räumliche Lage der Conductoren gegeben, und irgend eine bestimmte Richtung als x-Axe festgesetzt ist, den Quotienten $\frac{E_1}{E_2}$ immer so einrichten, dass die von dem einen Conductor auf den andern in der Richtung dieser x-Axe ausgeübte Wirkung verschwindet. Und zwar existiren stets z w e i Werthe dieses Quotienten, für welche ein solches Verschwinden eintritt.*

*Dabei ist jedoch vorausgesetzt, die festgesetzte x-Axe stehe senkrecht gegen irgend eine Ebene, die z w i s c h e n den beiden Conductoren hindurchgeht.* (Vgl. die Figur auf Seite 30.)

Dass sich aus diesem Satz durch Anwendung auf zwei *kugelförmige* Conductoren der *Bobylew*'sche Satz ergiebt, bedarf keiner weiteren Erläuterung.

---

*) Die Gleichung $f(C) = 0$, d. i.

$$\frac{d\alpha_{11}}{dx} + 2C\frac{d\alpha_{12}}{dx} + C^2\frac{d\alpha_{22}}{dx} = 0$$

hat also zwei Wurzeln, die *reell* und *positiv* sind. Und hieraus folgt mit Rücksicht auf (21.), dass $\frac{d\alpha_{12}}{dx}$ = pos. ist. Dies nur beiläufig.

## § 5.

## Beiläufige Bemerkung.

Für ein System von *beliebig vielen* Conductoren $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_2$, $\cdots$ $\mathfrak{C}_n$ (jeder von beliebiger Gestalt) lassen sich leicht folgende Sätze ableiten, die analog sind den Sätzen Seite 22 und 23.

**I. Satz.** — *Sind die Conductoren* $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_2$, $\cdots$ $\mathfrak{C}_n$ *beliebig geladen, so wird* (falls keine äusseren Kräfte influiren) *immer wenigstens auf einem derselben eine monogene Vertheilung anzutreffen sein.*

**II. Satz.** — *Haben insbesondere alle Conductoren* $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_2$, $\cdots$ $\mathfrak{C}_n$ *gleiche elektrische Spannung, so finden auf allen monogene Belegungen statt; auch werden alle diese Belegungen gleiches Vorzeichen haben.*

**III. Satz.** — *Hat der Conductor* $\mathfrak{C}_1$ *die kleinste, und der Conductor* $\mathfrak{C}_n$ *die grösste elektrische Spannung, und ist die erstere negativ, die letztere positiv, so finden auf* $\mathfrak{C}_1$ *und* $\mathfrak{C}_n$ *monogene Vertheilungen statt, und zwar von entgegengesetztem Vorzeichen; während gleichzeitig die Vertheilungen auf den übrigen Conductoren* $\mathfrak{C}_2$, $\mathfrak{C}_3$, $\mathfrak{C}_4$, $\cdots$ $\mathfrak{C}_{n-1}$ *im Allgemeinen wahrscheinlich amphigen sein werden.*

**IV. Satz.** — *Ist die elektrische Spannung des Conductors* $\mathfrak{C}_1$ *positiv, hingegen die Spannung aller übrigen Conductoren* $\mathfrak{C}_2$, $\mathfrak{C}_3$, $\cdots$ $\mathfrak{C}_n$ *gleich Null, so finden auf allen Conductoren monogene Belegungen statt; und zwar wird die monogene Belegung von* $\mathfrak{C}_1$ *eine positive sein, während die monogenen Belegungen der übrigen Conductoren* $\mathfrak{C}_2$, $\mathfrak{C}_3$, $\cdots$ $\mathfrak{C}_n$ *durchweg negativ sind.*

Der Beweis dieser Sätze ergiebt sich äusserst leicht mittelst der schon bei einer früheren Gelegenheit von mir benutzten Methoden*).

Der letzte von diesen Sätzen ist von besonderer Wichtigkeit für die im Vorhergehenden (Seite 27) erwähnten linearen Gleichungen:

---

*) *C. Neumann: Unters. üb. das Log. und Newt. Potential,* (Leipzig 1877), daselbst Seite 96, 97.

$$(G.)\qquad \begin{aligned} E_1 &= \alpha_{11} C_1 + \alpha_{12} C_2 \cdots + \alpha_{1n} C_n, \\ E_2 &= \alpha_{21} C_1 + \alpha_{22} C_2 \cdots + \alpha_{2n} C_n, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ E_n &= \alpha_{n1} C_1 + \alpha_{n2} C_2 \cdots + \alpha_{nn} C_n. \end{aligned}$$

Wendet man nämlich diese Gleichungen an auf den Fall des IV. Satzes, setzt man also $C_1 =$ pos., z. B. $= 1$, hingegen $C_2 = C_3 = \cdots = C_n = 0$, so folgt:

$$(H.)\qquad \begin{aligned} E_1 &= \alpha_{11}, \\ E_2 &= \alpha_{21}, \\ &\cdots\cdots \\ E_n &= \alpha_{n1}; \end{aligned}$$

während gleichzeitig aus dem Inhalt jenes Satzes folgt, dass $E_1$ *positiv*, hingegen $E_2, E_3, \cdots E_n$ *negativ* sind. Und mit Rücksicht hierauf erkennen wir aus den Gleichungen (H.), dass $\alpha_{11}$ *positiv*, hingegen $\alpha_{21}$ z. B. *negativ* ist. U. s. w.

Wir gelangen somit zu dem Satz, *dass in den Gleichungen* (G.) *die Coefficienten $\alpha_{hh}$ sämmtlich positiv, hingegen die Coefficienten $\alpha_{hj}$ durchweg negativ sind.*

---

**C. Neumann,** *Ueber das Weber'sche Gesetz**).

Sind $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \cdots \mathfrak{A}_n$ und $\mathfrak{K}$ starre Körper, die in irgend welchen Bewegungen begriffen sind, und bezeichnet $W$ das von $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \cdots \mathfrak{A}_n$ auf $\mathfrak{K}$ ausgeübte *Potential*, so wird man mittelst dieses Potentiales $W$ auch die *Kräfte* anzugeben im Stande sein, welche das System $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \cdots \mathfrak{A}_n$ auf den Körper $\mathfrak{K}$ ausübt. So z. B. gelten folgende Sätze:

*Ist der Körper $\mathfrak{K}$ nur beweglich längs eines gegebenen Geleises, so ist die auf ihn in der Richtung $\xi$ dieses Geleises ausgeübte translatorische Kraft* $= -\dfrac{\partial W}{\partial \xi}$.

*) Vorgetragen in der Sitzung am 28. April 1880.

*Ist andererseits der Körper $\mathfrak{K}$ nur drehbar um eine gegebene feste Axe, so ist das auf ihn in Bezug auf diese Axe ausgeübte Drehungsmoment* $= -\frac{\partial W}{\partial \varphi}$, *wo* $\varphi$ *den Drehungswinkel vorstellt.*

Bei diesen Sätzen ist vorausgesetzt, dass die einzelnen Elemente der betrachteten Körper entweder nach dem *Newton*'schen Gesetz oder doch wenigstens nach einem Gesetz aufeinander wirken, welches *nur von der Entfernung* abhängt. — Ich werde im Folgenden zeigen, dass einigermassen analoge Gesetze auch dann stattfinden, wenn jene Wirkungen dem *Weber*'schen Gesetz entsprechen. Dabei wird es angemessen sein, zunächst einige allgemeine Betrachtungen voranzuschicken.

§ 1.

## Ueber die Arbeit der auf einen starren Körper einwirkenden Kräfte.

Ist $m$ irgend ein Theilchen des starren Körpers $\mathfrak{K}$, sind ferner (unter Zugrundelegung eines absolut festen Axensystemes) $x, y, z$ und $x + dx$, $x + dy$, $z + dz$ die Coordinaten dieses Theilchens in zwei aufeinander folgenden Zeitaugenblicken $t$ und $t + dt$, und sind endlich $mX$, $mY$, $mZ$ die auf das Theilchen einwirkenden Kräfte, so versteht man bekanntlich unter der während der Zeit $dt$ auf den Körper ausgeübten *Arbeit* folgenden Ausdruck:

(1.) $$dL = \Sigma m (Xdx + Ydy + Zdz),$$

die Summation ausgedehnt über alle Elemente $m$ des Körpers.

Nehmen wir zunächst an, der Körper bewege sich längs eines *festen Geleises*, und dieses Geleise habe die Richtung der $x$-Axe. Dann haben $dx$, $dy$, $dz$ die Werthe:

$$dx = d\xi,$$
$$dy = 0,$$
$$dz = 0,$$

wo $d\xi$ für alle Elemente $m$ des ganzen Körpers *ein und dieselbe* Grösse vorstellt. Somit folgt aus (1.):

(2.) $$dL = [\Sigma mX]\, d\xi;$$

also der Satz: *Bei einer translatorischen Bewegung ist die auf*

*den Körper ausgeübte Arbeit gleich der* (durch $d\xi$ dargestellten) *kleinen Verschiebung, multiplicirt mit der entsprechenden translatorischen Kraft.*

Nehmen wir andererseits an, die Bewegung des Körpers bestehe in einer *Rotation* um die $x$-Axe. Dann haben $dx$, $dy$, $dz$ die Werthe:

$$dx = 0,$$
$$dy = -z\,d\varphi,$$
$$dz = +y\,d\varphi,$$

wo $d\varphi$ den Drehungswinkel vorstellt. Somit folgt aus (1.):

(3.) $$dL = [\Sigma m\,(yZ - zY)]\,d\varphi;$$

also der Satz: *Bei einer Rotationsbewegung ist die auf den Körper ausgeübte Arbeit gleich dem* (durch $d\varphi$ dargestellten) *kleinen Drehungswinkel, multiplicirt mit dem zugehörigen Drehungsmoment.*

Befindet sich endlich der betrachtete starre Körper in einer *ganz beliebigen* Bewegung, so kann diese Bewegung während eines Zeitelementes $dt$ immer als zusammengesetzt angesehen werden aus drei den Axen $x$, $y$, $z$ entsprechenden Verschiebungen und aus drei um diese Axen bewerkstelligten Drehungen. Bezeichnet man die Grössen dieser unendlich kleinen Verschiebungen und Drehungen respective mit $d\xi$, $d\eta$, $d\zeta$ und $d\alpha$, $d\beta$, $d\gamma$, so gelten für die Zuwüchse der Corrdinaten $x$, $y$, $z$ des Theilchens $m$ die Formeln:

$$dx = d\xi + z\,d\beta - y\,d\gamma,$$
$$dy = d\eta + x\,d\gamma - z\,d\alpha,$$
$$dz = d\zeta + y\,d\alpha - x\,d\beta.$$

Dies in (1.) substituirt, ergiebt sich:

(4.) $$\begin{aligned} dL = [\Sigma mX]\,d\xi &+ [\Sigma m\,(yZ - zY)]\,d\alpha \\ + [\Sigma mY]\,d\eta &+ [\Sigma m\,(zX - xZ)]\,d\beta \\ + [\Sigma mZ]\,d\zeta &+ [\Sigma m\,(xY - yX)]\,d\gamma; \end{aligned}$$

also der Satz: *Befindet sich der Körper in ganz beliebiger Bewegung, so ist die auf ihn ausgeübte Arbeit gleich der Summe seiner den drei Coordinatenaxen entsprechenden Verschiebungen und Drehungen, jede multiplicirt mit der zugehörigen translatorischen Kraft, respective dem zugehörigen Drehungsmoment.*

Im Folgenden werden wir namentlich Gebrauch machen von den bei (2.), (3.) aufgestellten Sätzen, indem wir dieselben benutzen, um die Berechnung der *translatorischen Kraft*, resp. des *Drehungsmomentes* zurückzuführen auf die Berechnung der *Arbeit*.

§ 2.

## Kräfte, die dem Newton'schen Gesetz entsprechen, oder wenigstens nur von den Entfernungen abhängen.

Mag die Beweglichkeit des starren Körpers $\mathfrak{K}$ eine freie sein, oder mag sie irgend welchen Beschränkungen unterliegen, — immer werden wir die räumliche Lage des Körpers abhängig machen können von irgend welchen Parametern $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \cdots$ Und denken wir uns also im Innern des Körpers irgend ein Theilchen $m$ markirt, so werden die rechtwinkligen Coordinaten $x, y, z$ dieses Theilchens bestimmte Functionen von $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \cdots$ sein. Sind also z. B. $d\alpha, d\beta, d\gamma, d\delta, \cdots$ die Zuwüchse dieser Parameter während des Zeitelementes $dt$, so gelten für die correspondirenden Zuwüchse jener Coordinaten die Formeln:

$$(5.)\qquad \begin{aligned} dx &= \frac{\partial x}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial x}{\partial \beta} d\beta + \frac{\partial x}{\partial \gamma} d\gamma + \frac{\partial x}{\partial \delta} d\delta + \cdots, \\ dy &= \frac{\partial y}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial y}{\partial \beta} d\beta + \frac{\partial y}{\partial \gamma} d\gamma + \frac{\partial y}{\partial \delta} d\delta + \cdots, \\ dz &= \frac{\partial z}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial z}{\partial \beta} d\beta + \frac{\partial z}{\partial \gamma} d\gamma + \frac{\partial z}{\partial \delta} d\delta + \cdots \end{aligned}$$

Doch wollen wir uns der Einfachheit wegen auf solche Bewegungen beschränken, bei denen (wie z.B. bei der Bewegung längs eines festen Geleises oder bei der Rotation um eine feste Axe) die räumliche Lage des Körpers nur von *einem einzigen* Parameter abhängt. Dann haben wir statt (5.) die einfacheren Formeln:

$$(6.)\qquad \begin{aligned} dx &= \frac{\partial x}{\partial \alpha} d\alpha, \\ dy &= \frac{\partial y}{\partial \alpha} d\alpha, \\ dz &= \frac{\partial z}{\partial \alpha} d\alpha. \end{aligned}$$

Und demgemäss wird in diesem Falle die von den Kräften $mX$, $mY$, $mZ$ auf den Körper ausgeübte Arbeit (1.) den Werth haben:

(7.) $$dL = \left[\Sigma\, m \left(X \frac{\partial x}{\partial \alpha} + Y \frac{\partial y}{\partial \alpha} + Z \frac{\partial z}{\partial \alpha}\right)\right] d\alpha.$$

Repräsentirt nun $mV$ das *Potential* der Kräfte $mX$, $mY$, $mZ$, so ist

(8.) $$mX = -m \frac{\partial V}{\partial x}, \quad mY = -m \frac{\partial V}{\partial y}, \quad mZ = -m \frac{\partial V}{\partial z},$$

und folglich:

(9.) $$dL = -\left[\Sigma\, m \frac{\partial V}{\partial \alpha}\right] d\alpha = -\frac{\partial (\Sigma\, m V)}{\partial \alpha}\, d\alpha,$$

oder falls man das auf den *ganzen Körper* ausgeübte Potential $\Sigma\, mV$ mit $W$ bezeichnet:

(10.) $$dL = -\frac{\partial W}{\partial \alpha}\, d\alpha.$$

Bringt man diese Formel (10.) in Anwendung auf den Specialfall der *translatorischen Bewegung*, indem man $\alpha = \xi$ setzt, so ergiebt sich:

$$dL = -\frac{\partial W}{\partial \xi}\, d\xi;$$

und hieraus durch Vergleichung mit (2.):

(11.) $$\Sigma\, mX = -\frac{\partial W}{\partial \xi}.$$

Wendet man andererseits die Formel (10.) an auf den Speciallfall der *Rotationsbewegung*, indem man $\alpha = \varphi$ setzt, so folgt:

$$dL = -\frac{\partial W}{\partial \varphi}\, d\varphi;$$

und hieraus durch Vergleichung mit (3.):

(12.) $$\Sigma\, m\,(yZ - zY) = -\frac{\partial W}{\partial \varphi}.$$

Diese Formeln (11.) und (12.) repräsentiren die in der Einleitung (Seite 35, 36) genannten Sätze.

## § 3.

## Kräfte, die dem Weber'schen Gesetz entsprechen.

Beschränken wir uns wiederum auf den Fall, dass die räumliche Lage des betrachteten starren Körpers $\mathfrak{K}$ nur von *einem einzigen* Parameter abhängt, und bezeichnen wir diesen mit $\alpha$, so erhalten wir ebenso wie in (7.) die Formel:

$$(13.)\qquad dL = \left[\Sigma\, m \left(X\frac{\partial x}{\partial \alpha} + Y\frac{\partial y}{\partial \alpha} + Z\frac{\partial z}{\partial \alpha}\right)\right] d\alpha.$$

Entsprechen nun aber die Kräfte $mX$, $mY$, $mZ$ dem *Weber*'schen Gesetz, so erhalten wir, falls $mV$ das *Potential* dieser Kräfte vorstellt, an Stelle von (8.) die etwas complicirteren Formeln:

$$(14.)\qquad \begin{aligned} mX &= -m\left(\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial V}{\partial x'}\right), \\ mY &= -m\left(\frac{\partial V}{\partial y} - \frac{d}{dt}\frac{\partial V}{\partial y'}\right), \\ mZ &= -m\left(\frac{\partial V}{\partial z} - \frac{d}{dt}\frac{\partial V}{\partial z'}\right), \end{aligned}$$

wo $x'$, $y'$, $z'$ für $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ gesetzt sind.

Aus (14.) folgt durch Multiplication mit $\frac{\partial x}{\partial \alpha}$, $\frac{\partial y}{\partial \alpha}$, $\frac{\partial z}{\partial \alpha}$ und Addition:

(15.)

$$m\left(X\frac{\partial x}{\partial \alpha} + \cdots\right) = \left\{\begin{aligned} &- m\left(\frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \alpha} + \cdots\right) + m\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial V}{\partial x'}\frac{\partial x}{\partial \alpha} + \cdots\right) \\ &- m\left(\frac{\partial V}{\partial x'}\cdot\frac{d}{dt}\frac{\partial x}{\partial \alpha} + \cdots\right) \end{aligned}\right\}.$$

Nun ist offenbar:

$$(\text{A.})\qquad x' = \frac{\partial x}{\partial \alpha}\alpha', \qquad \text{wo } \alpha' = \frac{d\alpha}{dt};$$

$$(\text{B.})\qquad \text{mithin: } \frac{\partial x'}{\partial \alpha'} = \frac{\partial x}{\partial \alpha}.$$

Ferner folgt aus (A.):

$$\frac{\partial x'}{\partial \alpha} = \frac{\partial^2 x}{\partial \alpha^2}\alpha',$$

$$(\text{C.})\qquad \text{d. i. } \frac{\partial x'}{\partial \alpha} = \frac{d}{dt}\frac{\partial x}{\partial \alpha}.$$

Durch Anwendung dieser Relationen (B.), (C.) geht aber die Formel (15.) über in:

(16.)
$$m\left(X\frac{\partial x}{\partial\alpha}+\cdots\right)=\left\{\begin{array}{l}-m\left(\frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial\alpha}+\cdots\right)+m\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial V}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial\alpha'}+\cdots\right)\\ -m\left(\frac{\partial V}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial\alpha}+\cdots\right)\end{array}\right\},$$

d. i. in:

(17.) $$m\left(X\frac{\partial x}{\partial\alpha}+\cdots\right)=-m\frac{\partial V}{\partial\alpha}+m\frac{d}{dt}\frac{\partial V}{\partial\alpha'}.$$

Dies substituirt in (13.) erhalten wir:

(19.) $$dL=-\left[\Sigma\, m\left(\frac{\partial V}{\partial\alpha}-\frac{d}{dt}\frac{\partial V}{\partial\alpha'}\right)\right]d\alpha,$$

oder falls wir das auf den *ganzen Körper* ausgeübte Potential $\Sigma mV$ mit $W$ bezeichnen:

(20.) $$dL=-\left[\frac{\partial W}{\partial\alpha}-\frac{d}{dt}\frac{\partial W}{\partial\alpha'}\right]d\alpha.$$

Bringen wir nun diese Formel (20.) in Anwendung auf den speciellen Fall der *translatorischen Bewegung*, indem wir $\alpha=\xi$ setzen, so folgt:

$$dL=-\left[\frac{\partial W}{\partial\xi}-\frac{d}{dt}\frac{\partial W}{\partial\xi'}\right]d\xi;$$

und hieraus durch Vergleichung mit (2.):

(21.) $$\Sigma\, mX=-\left[\frac{\partial W}{\partial\xi}-\frac{d}{dt}\frac{\partial W}{\partial\xi'}\right].$$

Andererseits können wir unsere allgemeine Formel (20.) anwenden auf den Specialfall der Rotationsbewegung, indem wir $\alpha=\varphi$ setzen. Alsdann folgt:

$$dL=-\left[\frac{\partial W}{\partial\varphi}-\frac{d}{dt}\frac{\partial W}{\partial\varphi'}\right]d\varphi;$$

und hieraus durch Vergleichung mit (3.):

(22.) $$\Sigma\, m(yZ-zY)=-\left[\frac{\partial W}{\partial\varphi}-\frac{d}{dt}\frac{\partial W}{\partial\varphi'}\right].$$

Diese Formeln (21.), (22.) sind vollkommen analog den früheren Formeln (11.), (12.), und repräsentiren die in der Einleitung (Seite 37, 38) in Aussicht gestellten Sätze.

Nachträglich erkennen wir leicht, dass man zu diesen Sätzen (21.), (22.) etwas schneller hätte gelangen können mittelst des *Hamilton'schen Princips*. Doch dürfte der von uns eingeschlagene Weg seinerseits eine etwas grössere Anschaulichkeit für sich haben.

---

**C. Neumann,** *Ueber die Brechung eines unendlich dünnen regulären Strahlenbündels* *).

Strahlen, die von einem leuchtenden Punkt ausgehen, und beliebig viele Brechungen erleiden, behalten fortdauernd die Eigenschaft, *ein orthogonales Flächensystem zu besitzen,* — vorausgesetzt, dass die von ihnen durchlaufenen Medien sämmtlich *homogen* und *unkrystallinisch* sind. Dieser bekannte, schon von *Malus* aufgestellte Satz kann, falls man Strahlen, die zu irgend welcher Fläche *normal* stehen, kurzweg als ein *reguläres Strahlenbündel* bezeichnet, etwas bequemer und zugleich allgemeiner auch so ausgesprochen werden:

*Ein Strahlenbündel wird, falls es anfangs regulär war, auch nach beliebig vielen Brechungen regulär sein, vorausgesetzt, dass die durchlaufenen Medien sämmtlich homogen und unkrystallinisch sind.*

Beschränken wir uns auf ein *unendlich dünnes* reguläres Strahlenbündel, und bezeichnen wir den mittleren Strahl des Bündels als *Hauptstrahl*, so werden alle Strahlen dieses unendlich dünnen Bündels sich anlehnen an zwei bestimmte gerade Linien, welche den Hauptstrahl schneiden, gegen denselben senkrecht stehen, und auch gegen einander senkrecht stehen **). Diese beiden Linien (gewissermassen die Leitlinien des Bündels) werden die *Brennlinien* genannt; und die beiden Punkte, in denen der Hauptstrahl von diesen Brennlinien geschnitten wird, heissen die *Brennpunkte*.

---

*) Vorgetragen in der Sitzung vom 1. März 1880. Eingereicht im April 1880.

**) Man vergleiche die bekannten Untersuchungen von *Kummer*, in Crelle's Journal, Bd. 57.

Lassen wir dieses unendlich dünne und reguläre Strahlenbündel auf eine brechende Fläche fallen, so wird dasselbe nach erlittener Brechung wiederum regulär sein (zufolge des vorhin genannten Malus'schen Satzes), also wiederum zwei zu einander und zum Hauptstrahl senkrechte Brennlinien haben, — vorausgesetzt, dass die in Betracht kommenden Medien homogen und unkrystallinisch sind. Wir wollen nun die Brennlinien des gebrochenen Bündels zu finden suchen, falls diejenigen des einfallenden Bündels gegeben sind. Wir stellen uns also folgende

*Aufgabe: Zwei homogene und unkrystallinische Medien $M$ und $M_1$ mit den Lichtgeschwindigkeiten $g$ und $g_1$, also mit den Brechungsindices*

(1.) $$n = \frac{1}{g} \quad \text{und} \quad n_1 = \frac{1}{g_1}$$

*grenzen an einander in einer gegebenen Fläche*

(2.) $$f(x, y, z) = 0.$$

*Ein das Medium $M$ durchschreitendes unendlich dünnes und reguläres Strahlenbündel, dessen Hauptstrahl $\Sigma$, und dessen Brennlinien $\sigma$, $\sigma'$ gegeben sind, wird von der Fläche (2.) gebrochen, und verwandelt sich also bei seinem Uebergange in das Medium $M_1$ in ein gewisses anderes ebenfalls reguläres Strahlenbündel, dessen Hauptstrahl mit $\Sigma_1$, und dessen Brennlinien mit $\sigma_1$, $\sigma'_1$ bezeichnet werden mögen. — Die Aufgabe besteht darin, $\Sigma_1$, $\sigma_1$, $\sigma'_1$ zu finden, falls $\Sigma$, $\sigma$, $\sigma'$ gegeben sind.*

Um diese Aufgabe analytisch einzukleiden, bezeichnen wir den sogenannten *Einfalls*punct, d. i. denjenigen Punkt, in welchem die brechende Fläche $f(x, y, z) = 0$ von $\Sigma$ und $\Sigma_1$ getroffen wird, mit $O$, ferner die Entfernungen der Brennlinien $\sigma$. $\sigma'$, $\sigma_1$, $\sigma'_1$ von $O$ resp. mit $l$, $l'$, $l_1$, $l'_1$; wobei aber Rücksicht genommen werden soll auf das *Vorzeichen*. Es mögen nämlich unter $l$, $l'$ die Abscissen der Brennlinien $\sigma$, $\sigma'$ verstanden werden, diese Abscissen gerechnet von $O$ aus längs $\Sigma$ *in der Richtung des fortschreitenden Lichtes*. Und ebenso sollen unter $l_1$, $l_1'$ die Abscissen der Linien $\sigma_1$, $\sigma'_1$ verstanden werden, diese Abscissen gerechnet von $O$ aus längs $\Sigma_1$ und wiederum *in der Richtung des fortschreitenden Lichtes*. Ausserdem werde gesetzt:

(3.) $$L = \frac{1}{l} \text{ und } L' = \frac{1}{l'},$$

(3.a) $$L_1 = \frac{1}{l_1} \quad \text{und} \quad L_1 = \frac{1}{l'_1}.$$

Endlich mögen die Azimuthe der Ebenen $\Sigma\sigma$ und $\Sigma_1\sigma_1$ gegen die Ebene $\Sigma\Sigma_1$ respective mit $\chi$ und $\chi_1$ bezeichnet werden.

*Alsdann besteht unsere Aufgabe darin,* $L_1$, $L'_1$, $\chi_1$ *als Functionen von* $L$, $L'$, $\chi$ *darzustellen.*

§ 1.

## Die Formeln für die Brechung eines Lichtstrahles.

Sind $(a, b, c)$ und $(a_1, b_1, c_1)$ zwei gegebene Puncte diesseits und jenseits der brechenden Fläche $f$, und denkt man sich von $(a, b, c)$ unendlich viele Strahlen ausgehend, so wird unter all' diesen Strahlen einer sein, welcher nach erlittener Brechung durch $(a_1, b_1, c_1)$ hindurchgeht. Bezeichnet man den Punct, in welchem die Fläche $f$ von diesem spiecellen Strahl getroffen wird, mit $(x, y, z)$, so kann zur Berechnung von $(x, y, z)$ das bekannte Princip

(4.) $$nr + n_1 r_1 = \textit{Minimum}$$

in Anwendung gebracht werden. Denn unter allen von $(a, b, c)$ nach $(a_1, b_1, c_1)$ führenden Wegen wird der Lichtstrahl denjenigen auswählen, welcher *den kleinsten Zeitaufwand* erfordert. Dieser Zeitaufwand aber drückt sich aus durch $nr + n_1 r_1$, falls man nämlich unter $r$ und $r_1$ die Entfernungen des Punctes $(x, y, z)$ resp. von $(a, b, c)$ und $(a_1, b_1, c_1)$ versteht. Dabei haben $n$ und $n_1$ die in (1.) genannte Bedeutung.

Aus (4.) folgt nun sofort:

$$n\frac{\partial r}{\partial x} + n_1\frac{\partial r_1}{\partial x} = \lambda\frac{\partial f}{\partial x},$$

$$n\frac{\partial r}{\partial y} + n_1\frac{\partial r_1}{\partial y} = \lambda\frac{\partial f}{\partial y},$$

$$n\frac{\partial r}{\partial z} + n_1\frac{\partial r_1}{\partial z} = \lambda\frac{\partial f}{\partial z}, \qquad f(x, y, z) = 0,$$

wo $f=0$ oder $f(x, y, z) = 0$ die Gleichung der brechenden Fläche, und $\lambda$ einen unbekannten Factor vorstellt. Bezeichnet man die Richtungscosinus von $r$ und $r_1$ (und zwar in der Richtung des fortschreitenden Lichtes), mit $\mathsf{A}, \mathsf{B}, \Gamma$ und $\mathsf{A}_1, \mathsf{B}_1, \Gamma_1$, so nehmen diese Gleichungen folgende Gestalt an:

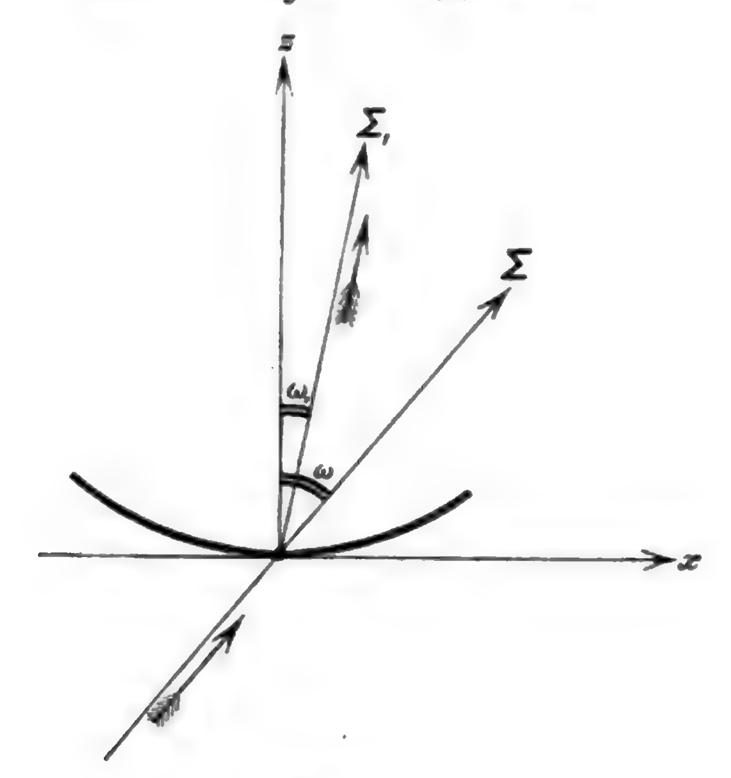
$$(5.)\quad \begin{cases} n\mathsf{A} - n_1\mathsf{A}_1 = \lambda \frac{\partial f}{\partial x}, \\ n\mathsf{B} - n_1\mathsf{B}_1 = \lambda \frac{\partial f}{\partial y}, \\ n\Gamma - n_1\Gamma_1 = \lambda \frac{\partial f}{\partial z}, \qquad f(x, y, z) = 0. \end{cases}$$

Sind $\mathsf{A}$, $\mathsf{B}$, $\Gamma$ und $x$, $y$, $z$ gegeben, so bestimmen sich mittelst dieser Gleichungen (5.) die Werthe von $\mathsf{A}_1$, $\mathsf{B}_1$, $\Gamma_1$. Und bezeichnet man die analogen Grössen für irgend einen Nachbarstrahl mit $\mathsf{A} + d\mathsf{A}$, $\mathsf{B} + d\mathsf{B}$, $\Gamma + d\Gamma$, $x + dx$, $y + dy$, $z + dz$, $\mathsf{A}_1 + d\mathsf{A}_1$, $\mathsf{B}_1 + d\mathsf{B}_1$, $\Gamma_1 + d\Gamma$, so ergeben sich für die Differentiale $d\mathsf{A}$, $d\mathsf{B}$, etc. aus (5.) folgende Formeln:

$$(5.a)\quad \begin{cases} n\,d\mathsf{A} - n_1 d\mathsf{A}_1 = \lambda \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dy + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} dz\right) + \frac{\partial f}{\partial x} d\lambda, \\ n\,d\mathsf{B} - n_1 d\mathsf{B}_1 = \lambda \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} dx + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} dz\right) + \frac{\partial f}{\partial y} d\lambda, \\ n\,d\Gamma - n_1 d\Gamma_1 = \lambda \left(\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} dx + \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} dy + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} dz\right) + \frac{\partial f}{\partial z} d\lambda, \end{cases}$$

und daneben die Formel:

$$(5.b)\qquad \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz = 0.$$




Figur 1.

Wir wollen nun den Punct $(x, y, z)$ zum Anfangspunct des Coordinatensystems nehmen, also $x = y = z = 0$ setzen, und

die in diesem Punct auf der Fläche errichtete Normale zur $z$-Axe nehmen. Gleichzeitig können wir uns die gegebene Fläche ersetzt denken durch das dieselbe in jenem Puncte osculirende Paraboloid. Dann wird:

$$f = \frac{ax^2 + by^2 + 2cxy}{2} - z = 0, \tag{6.}$$

wo $a, b, c$ Constanten sind. Und gleichzeitig gehen alsdann die Formeln (5.), (5.a) und (5.b) über in*):

$$\left\{\begin{array}{l} n\mathsf{A} - n_1\mathsf{A}_1 = 0, \\ n\mathsf{B} - n_1\mathsf{B}_1 = 0, \\ n\Gamma - n_1\Gamma_1 = -\lambda, \end{array}\right. \tag{7.}$$

$$\left\{\begin{array}{l} n\,d\mathsf{A} - n_1 d\mathsf{A}_1 = \lambda(a\,dx + c\,dy), \\ n\,d\mathsf{B} - n_1 d\mathsf{B}_1 = \lambda(c\,dx + b\,dy), \\ n\,d\Gamma - n_1 d\Gamma_1 = -d\lambda, \text{ und daneben: } \quad dz = 0. \end{array}\right. \tag{7.a}$$

Denken wir uns die Richtung $(\mathsf{A}, \mathsf{B}, \Gamma)$ durch zwei Winkel bestimmt, nämlich durch den Einfallswinkel $\omega$ und das Azimuth $\varphi$ der Einfallsebene, so wird:

$$\begin{array}{ll} \mathsf{A} = \sin\omega\cos\varphi, & d\mathsf{A} = \cos\omega\cos\varphi\,d\omega - \sin\omega\sin\varphi\,d\varphi, \\ \mathsf{B} = \sin\omega\sin\varphi, & d\mathsf{B} = \cos\omega\sin\varphi\,d\omega + \sin\omega\cos\varphi\,d\varphi, \\ \Gamma = \cos\omega, & d\Gamma = -\sin\omega\,d\omega; \end{array}$$

und in analoger Weise lassen sich $\mathsf{A}_1, \mathsf{B}_1, \Gamma_1$ ausdrücken durch den Brechungswinkel $\omega_1$ und das Azimuth $\varphi_1$ der durch die Normale $z$ und den gebrochenen Strahl gelegten Ebene. Substituiren wir diese Werthe in die aus (7.) entspringende Gleichung:

$$\frac{\mathsf{B}}{\mathsf{A}} = \frac{\mathsf{B}_1}{\mathsf{A}_1},$$

so folgt:

$$\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}\varphi_1, \text{ mithin: } \varphi = \varphi_1.$$

Es liegen also die beiden Strahlen $(\mathsf{A}, \mathsf{B}, \Gamma)$ und $(\mathsf{A}_1, \mathsf{B}_1, \Gamma_1)$ und die Normale $z$ in *ein und derselben* Ebene. Nehmen wir diese Ebene, d. i. die Einfallsebene, zur $xz$-Ebene, so wird $\varphi = \varphi_1 = 0$;

---

*) Es wird alsdann $\lambda \frac{\partial f}{\partial x} = \lambda(ax + cy)$, also $= 0$, weil $x = y = z = 0$ gesetzt werden soll. U. s. w. Noch sei bemerkt, dass in beistehender Figur die Strahlen $(\mathsf{A}, \mathsf{B}, \Gamma)$ und $(\mathsf{A}_1, \mathsf{B}_1, \Gamma_1)$ resp. mit $\Sigma$ und $\Sigma_1$ bezeichnet sind.

so dass sich also für $\mathsf{A}$, $\mathsf{B}$, $\Gamma$, $d\mathsf{A}$, $d\mathsf{B}$, $d\Gamma$ die Werthe ergeben:

$$(8.)\qquad \begin{aligned} \mathsf{A} &= \sin\omega, & d\mathsf{A} &= \cos\omega\, d\omega, \\ \mathsf{B} &= 0 & d\mathsf{B} &= \sin\omega\, d\varphi, \\ \Gamma &= \cos\omega, & d\Gamma &= -\sin\omega\, d\omega, \end{aligned}$$

und für $\mathsf{A}_1, \mathsf{B}_1, \Gamma_1, d\mathsf{A}_1, d\mathsf{B}_1, d\Gamma_1$ die analogen Werthe:

$$(9.)\qquad \begin{aligned} \mathsf{A}_1 &= \sin\omega_1, & d\mathsf{A}_1 &= \cos\omega_1 d\omega_1, \\ \mathsf{B}_1 &= 0, & d\mathsf{B}_1 &= \sin\omega_1 d\varphi_1, \\ \Gamma_1 &= \cos\omega_1, & d\Gamma_1 &= -\sin\omega_1 d\omega_1. \end{aligned}$$

Durch Substitution dieser Werthe in (7.), (7.a) folgt sofort:

$$(10.)\qquad \begin{cases} n\sin\omega - n_1\sin\omega_1 = 0, \\ \qquad\qquad\qquad\quad 0 = 0, \\ n\cos\omega - n_1\cos\omega_1 = -\lambda, \end{cases}$$

$$(10.\text{a})\ \begin{cases} n\cos\omega\, d\omega - n_1\cos\omega_1 d\omega_1 = \lambda(a\,dx + c\,dy), \\ n\sin\omega\, d\varphi - n_1\sin\omega_1 d\varphi_1 = \lambda(c\,dx + b\,dy), \\ -n\sin\omega\, d\omega + n_1\sin\omega_1 d\omega_1 = -d\lambda, \text{ u. daneb. } dz = 0. \end{cases}$$

Mittelst dieser Gleichungen kann man, wenn ein unendlich dünnes Bündel einfallender Strahlen gegeben ist, das ihm zugehörige gebrochene Strahlenbündel berechnen. Dabei mögen die in der $xz$-Ebene liegenden, den Winkeln $\omega$ und $\omega_1$ entsprechenden Strahlen $(\mathsf{A}, \mathsf{B}, \Gamma)$ und $(\mathsf{A}_1, \mathsf{B}_1, \Gamma_1)$ als die *Hauptstrahlen* der beiden Bündel angesehen und mit $\Sigma$ und $\Sigma_1$ bezeichnet werden.

## § 2.

## Das einfallende Strahlenbündel.

Der Hauptstrahl $\Sigma$ hat den Einfallspunkt $(0, 0, 0)$ und die Richtungscosinus $(\mathsf{A}, \mathsf{B}, \Gamma)$. Denken wir uns also von $(0, 0, 0)$ aus auf dem Strahle $\Sigma$ *und in der Richtung des fortschreitenden Lichtes* zwei Abscissen $l$, $l'$ aufgetragen, und in den Endpunkten dieser Abcissen auf dem Strahle $\Sigma$ zwei zu einander senkrechte Perpendikel $\sigma$, $\sigma'$ errichtet, und nehmen wir ausserdem an, dass das Azimuth der Ebene $\Sigma\sigma$ gegen die Einfallsebene, d. i. gegen die $xz$-Ebene den Werth $\chi$ habe, so werden $\sigma$ und $\sigma'$ die *gegebenen Brennlinien* des einfallenden Strahlenbündels vorstellen. Hienach lassen sich die Richtungscosinus $(\alpha, \beta, \gamma)$ und $(\alpha', \beta', \gamma')$

der Brennlinien $\sigma$ und $\sigma'$ leicht berechnen. Fügt man dabei noch die in (8.), angegebenen Werthe hinzu, so erhält man folgende Tabelle*):

(11.)

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\alpha = \cos\omega\cos\chi$ | $\alpha' = -\cos\omega\sin\chi$ | $\mathsf{A} = \sin\omega$ | $d\mathsf{A} = \cos\omega\, d\omega$ |
| $\beta = \sin\chi$ | $\beta' = \cos\chi$ | $\mathsf{B} = 0$ | $d\mathsf{B} = \sin\omega\, d\varphi$ |
| $\gamma = -\sin\omega\cos\chi$ | $\gamma' = \sin\omega\sin\chi$ | $\Gamma = \cos\omega$ | $d\Gamma = -\sin\omega\, d\omega$ |

woraus beiläufig folgt:

$$(12.)\quad \begin{aligned} \alpha' d\mathsf{A} + \beta' d\mathsf{B} + \gamma' d\Gamma &= -\sin\chi\, d\omega + \cos\chi(\sin\omega\, d\varphi), \\ \alpha\, d\mathsf{A} + \beta\, d\mathsf{B} + \gamma\, d\Gamma &= \cos\chi\, d\omega + \sin\chi(\sin\omega\, d\varphi). \end{aligned}$$

Soll nun irgend ein Strahl mit dem Einfallspunkt $(dx, dy, dz)$ und den Richtungscosinus $(\mathsf{A} + d\mathsf{A}, \mathsf{B} + d\mathsf{B}, \Gamma + d\Gamma)$ dem gegebenen Strahlenbündel angehören, so muss derselbe die gegebenen Brennlinien $\sigma$ und $\sigma'$ *berühren*. Bezeichnet man diese unbekannten Berührungspunkte vorläufig mit $(\xi, \eta, \zeta)$ und $(\xi', \eta', \zeta')$, so kann man vom Anfangspunkt $(0, 0, 0)$ aus zum Punkte $(\xi, \eta, \zeta)$ in *doppelter* Weise gelangen. Denn einerseits kann man von $(0, 0, 0)$ aus längs des Hauptstrahles $\Sigma(\mathsf{A}, \mathsf{B}, \Gamma)$ die Abscisse $l$ durchlaufen, und sodann längs der Brennlinie $\sigma(\alpha, \beta, \gamma)$ nach $(\xi, \eta, \zeta)$ wandern; in solcher Weise ergiebt sich:

$$\begin{aligned} \xi &= \mathsf{A}l + \alpha\, d\sigma, \\ \eta &= \mathsf{B}l + \beta\, d\sigma, \\ \zeta &= \Gamma l + \gamma\, d\sigma, \end{aligned}$$

wo $d\sigma$ die durchlaufene (unendlich kleine) Strecke der Brennlinie vorstellt. Andererseits aber kann man von $(0, 0, 0)$ aus zunächst zum Punkte $(dx, dy, dz)$ fortschreiten, und sodann von hier aus längs des Strahles $(\mathsf{A} + d\mathsf{A}, \mathsf{B} + d\mathsf{B}, \Gamma + d\Gamma)$ nach $(\xi, \eta, \zeta)$ gelangen; hierbei ergiebt sich:

$$\begin{aligned} \xi &= dx + (\mathsf{A} + d\mathsf{A})(l + dl), \\ \eta &= dy + (\mathsf{B} + d\mathsf{B})(l + dl), \\ \zeta &= dz + (\Gamma + d\Gamma)(l + dl), \end{aligned}$$

---

*) Dass die in dieser Tabelle für $\alpha, \beta, \gamma$ und $\alpha', \beta', \gamma'$ angegebenen Werthe die richtigen sind, lässt sich am bequemsten *a posteriori* nachweisen. In der That lässt sich leicht zeigen, dass bei Annahme dieser Werthe sowohl den Bedingungen genügt wird:

$$(\sigma, \Sigma) = (\sigma', \Sigma) = (\sigma, \sigma') = 90^0,$$

als auch der Bedingung:

$$(\sigma\Sigma, xz) = (\sigma', y) = \chi.$$

wo $(l + dl)$ die auf dem Strahl $(\mathsf{A} + d\mathsf{A}, \mathsf{B} + d\mathsf{B}, \Gamma + d\Gamma)$ durchlaufene Strecke vorstellt. — Durch Vergleichung dieser beiderlei Ausdrücke für $\xi$, $\eta$, $\zeta$ ergiebt sich:

$$\begin{aligned}\alpha\, d\sigma &= dx + l d\mathsf{A} + \mathsf{A} dl,\\ \beta\, d\sigma &= dy + l d\mathsf{B} + \mathsf{B} dl,\\ \gamma\, d\sigma &= dz + l d\Gamma + \Gamma dl,\end{aligned}$$

und hieraus durch Multiplication mit $\alpha'$, $\beta'$, $\gamma'$ und Addition:

$$0 = (\alpha' dx + \beta' dy + \gamma' dz) + l(\alpha' d\mathsf{A} + \beta' d\mathsf{B} + \gamma' d\Gamma).$$

In ganz analoger Weise kann man ferner den Berührungspunkt $(\xi', \eta', \zeta')$ behandeln, und gelangt alsdann dann zu folgender Formel:

$$0 = (\alpha\, dx + \beta\, dy + \gamma dz) + l'(\alpha\, d\mathsf{A} + \beta\, d\mathsf{B} + \gamma\, d\Gamma).$$

Die beiden letzten Formeln gewinnen durch Substitution der Werthe (11.), (12.), sowie durch Substitution des in (10.a) notirten Werthes $dz = 0$, und wenn man ausserdem

$$\frac{1}{l} = L \quad \text{und} \quad \frac{1}{l'} = L'$$

setzt, folgende Gestalt:

$$\begin{aligned}-\sin\chi\, d\omega + \cos\chi\,(\sin\omega\, d\varphi) &= -L(-\sin\chi\cos\omega\, dx + \cos\chi\, dy),\\ \cos\chi\, d\omega + \sin\chi\,(\sin\omega\, d\varphi) &= -L'\,(\cos\chi\,\cos\omega\, dx + \sin\chi\, dy);\end{aligned}$$

und hieraus folgt durch Auflösung nach $d\omega$ und $\sin\omega\, d\varphi$ sofort:

$$\begin{aligned}d\omega &= -\,[(L\sin^2\chi + L'\cos^2\chi)\,\cos\omega\, dx\\ &\qquad + (L' - L)\,\sin\chi\cos\chi\, dy],\\ \sin\omega\, d\varphi &= -\,[(L' - L)\,\sin\chi\cos\chi\cos\omega\, dx\\ &\qquad + (L\cos^2\chi + L'\sin^2\chi)\; dy],\end{aligned}$$

d. i.

$$(13.)\qquad \begin{cases} d\omega = -\,(A\cos\omega\, dx + C dy),\\ \sin\omega\, d\varphi = -\,(C\cos\omega\, dx + B dy),\end{cases}$$

wo $A$, $B$, $C$ die Bedeutungen haben.

$$(14.\text{a})\qquad \begin{aligned}A &= L\sin^2\chi + L'\cos^2\chi,\\ B &= L\cos^2\chi + L'\sin^2\chi,\\ C &= (L' - L)\sin\chi\cos\chi.\end{aligned}$$

Hieraus folgt, wie sogleich bemerkt sein mag:

$$(14.b)\qquad \begin{aligned} L + L' &= A + B,\\ LL' &= AB - C^2, \quad \operatorname{tg} 2\chi = \frac{2C}{A-B}; \end{aligned}$$

so dass also $L$, $L'$ die beiden Wurzeln der quadratischen Gleichung sind:

$$(14.c)\qquad (L - A)(L - B) = C^2.$$

## § 3.

## Das gebrochene Strahlenbündel.

Die Formeln (13.), (14.a, b, c) charakterisiren das unendlich dünne *einfallende* Strahlenbündel. Aus diesem ergiebt sich das zugehörige *gebrochene* Bündel mittelst der Formeln (10.a):

$$\begin{aligned} n_1 \cos\omega_1\, d\omega_1 &= n \cos\omega\, d\omega - \lambda\,(a\,dx + c\,dy),\\ n_1 \sin\omega_1\, d\varphi_1 &= n \sin\omega\, d\varphi - \lambda\,(c\,dx + b\,dy); \end{aligned}$$

substituirt man nämlich hier für $d\omega$, $d\varphi$ die Werthe (13.), so erhält man:

$$\begin{aligned} n_1 \cos\omega_1 d\omega_1 &= -\, n \cos\omega\,(A \cos\omega\, dx + C\,dy) - \lambda\,(a\,dx + c\,dy),\\ n_1 \sin\omega_1 d\varphi_1 &= \qquad\quad -\, n\,(C \cos\omega\, dx + B\,dy) - \lambda\,(c\,dx + b\,dy), \end{aligned}$$

d. i.

$$(15.)\qquad \begin{cases} d\omega_1 = -\,(A_1 \cos\omega_1 dx + C_1 dy),\\ \sin\omega_1 d\varphi_1 = -\,(C_1 \cos\omega_1 dx + B_1 dy), \end{cases}$$

wo $A_1$, $B_1$, $C_1$ die Werthe haben:

$$A_1 = \frac{n A \cos^2\omega + \lambda a}{n_1 \cos^2\omega_1},$$

$$B_1 = \frac{n B + \lambda b}{n_1},$$

$$C_1 = \frac{n C \cos\omega + \lambda c}{n_1 \cos\omega_1}.$$

Mehr symmetrisch gestalten sich diese Formeln für $A_1$, $B_1$, $C_1$, wenn man denselben folgende Gestalt giebt:

$$(16.)\qquad \begin{cases} n_1 A_1 \cos^2\omega_1 - n A \cos^2\omega = \lambda a,\\ n_1 B_1 \qquad\qquad - n B \qquad\quad = \lambda b,\\ n_1 C_1 \cos\omega_1 \;\; - n C \cos\omega \;\; = \lambda c. \end{cases}$$

Die Formeln (15.) für das *gebrochene* Bündel sind von demselben Charakter wie die Formeln (13.) für das *einfallende* Bündel. Bezeichnet man also, wie schon früher festgesetzt wurde, die Abscissen für die Brennlinien des *gebrochenen* Bündels mit $l_1$, $l_1'$, und die reciproken Werthe dieser Abscissen mit $L'$, $L_1'$, so werden offenbar die in (15.) enthaltenen Coefficienten $A_1$, $B_1$, $C_1$ zu $L_1$, $L_1'$ in derselben Beziehung stehen, wie die in (13.) enthaltenen Coefficienten $A$, $B$, $C$ zu $L$, $L'$. Es werden also folgende mit (14.a) analoge Relationen stattfinden:

$$(17.a)\qquad \begin{aligned} A_1 &= L_1 \sin^2\chi_1 + L_1' \cos^2\chi_1, \\ B_1 &= L_1 \cos^2\chi_1 + L_1' \sin^2\chi_1, \\ C_1 &= (L_1' - L_1) \sin\chi_1 \cos\chi_1, \end{aligned}$$

wo $\chi_1$ dasjenige Azimuth vorstellt, unter welchem die durch den Hauptstrahl $\Sigma_1$ und die Brennlinie $\sigma_1$ gelegte Ebene gegen die Einfallsebene d. i. gegen die $xz$-Ebene geneigt ist.

Aus (17.a) folgt sofort:

$$(17.b)\qquad \begin{aligned} L_1 + L_1' &= A_1 + B_1, \\ L_1 L_1' &= A_1 B_1 - C_1^2, \qquad \operatorname{tg} 2\chi_1 = \frac{2\,C_1}{A_1 - B_1}; \end{aligned}$$

so dass also $L_1$, $L_1'$, die beiden Wurzeln der quadratischen Gleichung sind:

$$(17.c)\qquad (L_1 - A_1)(L_1 - B_1) = C_1^2.$$

*Hiermit ist unsere Aufgabe*) im Allgemeinen gelöst. Denn die Formeln* (16.) *repräsentiren die gesuchten Relationen zwischen* $A$, $B$, $C$ *und* $A_1$, $B_1$, $C_1$ *oder (was auf dasselbe hinauskommt) zwischen* $l$, $l'$, $\chi$ *und* $l_1$, $l_1'$, $\chi_1$.

## § 4.

## Anwendung auf die Kugelfläche.

Die brechende Fläche sei dargestellt durch die Kugelfläche

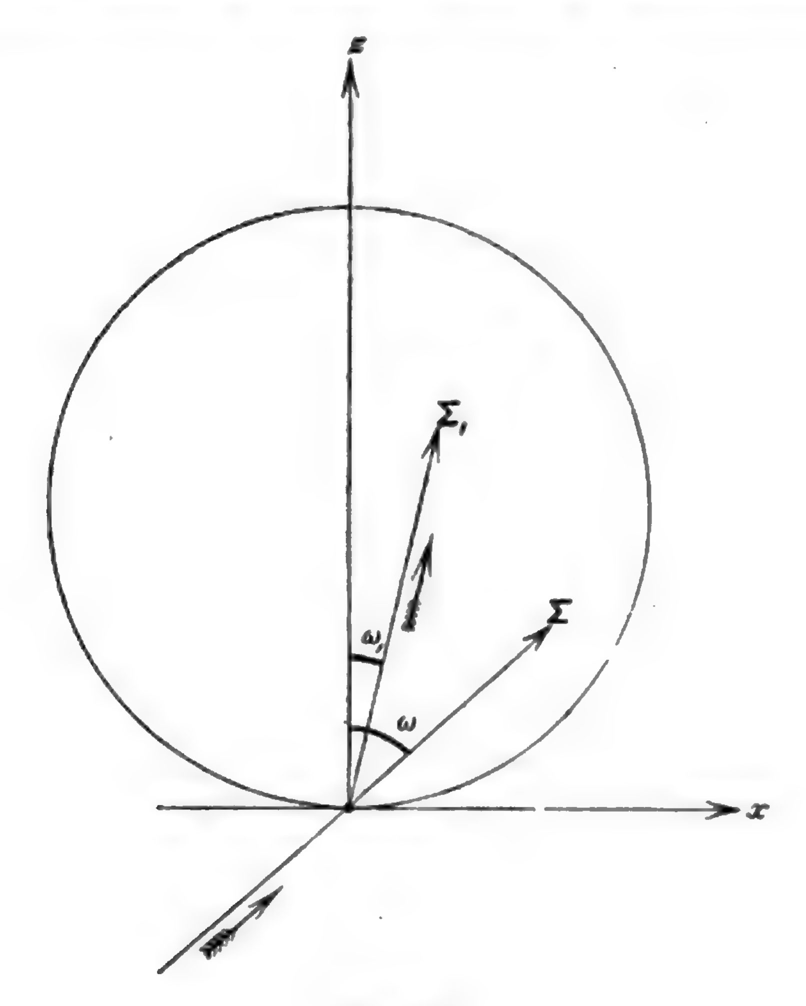
$$(18.)\qquad x^2 + y^2 + (z - r)^2 = r^2$$

d. i.

$$(18.a)\qquad x^2 + y^2 + z^2 - 2rz = 0,$$

*) Vgl. Seite 43.

wo $r$ den Radius vorstellt. Und der Einfallspunkt des Hauptstrahles liege wieder im Anfangspunkt des Coordinatensystems.




Figur 2.

Alsdann wird das die Kugelfläche in diesem Punkte osculirende Paraboloid die Gleichung haben:

$$\text{(19.)} \qquad \frac{x^2+y^2}{2r} - z = 0;$$

so dass also [vgl. (6.)] die Coefficienten $a$, $b$, $c$ im gegenwärtigen Fall die Werthe haben:

$$a = b = \frac{1}{r}, \qquad c = 0.$$

Setzt man ausserdem zur Abkürzung $\frac{1}{r} = R$, so gewinnen die Gleichungen (16.) folgende Gestalt:

$$\text{(20.)} \qquad \begin{cases} n_1 A_1 \cos^2 \omega_1 - n A \cos^2 \omega = \lambda R, \\ n_1 B_1 \qquad\qquad - n B \qquad\qquad = \lambda R, \\ n_1 C_1 \cos \omega_1 \quad - n C \cos \omega \quad = 0, \end{cases}$$

wo zwischen $n$, $n_1$, $\omega$, $\omega_1$, $\lambda$ die in (10.) angegebenen Relationen stattfinden:

$$n : n_1 = \frac{1}{\sin\omega} : \frac{1}{\sin\omega_1},$$

$$\lambda = n_1 \cos\omega_1 - n \cos\omega.$$

Mit Rücksicht auf diese Relationen kann man die Formeln (20.) auch so schreiben:

$$(21.)\quad \begin{cases} n_1 (A_1 \cos^2\omega_1 - R\cos\omega_1) = n\,(A\cos^2\omega - R\cos\omega), \\ n_1 (B_1 - R\cos\omega_1) = n\,(B - R\cos\omega), \\ n_1 (C_1 \cos\omega_1) = n\,(C\cos\omega). \end{cases}$$

oder auch so:

$$\begin{cases} (22.\mathrm{I}) & \dfrac{A_1\cos^2\omega_1 - R\cos\omega_1}{\sin\omega_1} = \dfrac{A\cos^2\omega - R\cos\omega}{\sin\omega}, \\ (22.\mathrm{II}) & \dfrac{B_1 - R\cos\omega_1}{\sin\omega_1} = \dfrac{B - R\cos\omega}{\sin\omega}, \\ (22.\mathrm{III}) & \dfrac{C_1\cos\omega_1}{\sin\omega_1} = \dfrac{C\cos\omega}{\sin\omega}. \end{cases}$$

*Dies also sind im Falle der Kugelfläche die gesuchten Relationen zwischen $A$, $B$, $C$ und $A_1$, $B_1$, $C_1$, oder (was auf dasselbe hinauskommt) zwischen $l$, $l'$, $\chi$ und $l_1$, $l_1'$, $\chi_1$.* In der That ist, um die Relationen zwischen diesen *letztern* Grössen zu erhalten, nur erforderlich, dass man in (22. I, II, III) an Stelle von $A$, $B$, $C$ und $A_1$, $B_1$, $C_1$ die Ausdrücke (14.a) und (17.a) substituirt, dabei beachtend, dass $L$, $L'$, $L_1$, $L_1'$ die reciproken Werthe von $l$, $l'$, $l_1$, $l_1'$ vorstellen.

## § 5.

## Betrachtung zweier specieller Fälle.

**Erster Fall.** Von den Brennlinien $\sigma$, $\sigma'$ des einfallenden Bündels mag die eine $\sigma$ *senkrecht zur Einfallsebene*, also die andere $\sigma'$ *in der Einfallsebene* liegen. Dann ist offenbar

$$(\alpha.)\qquad \chi = 90^0,$$

also nach (14.a):

$$(\beta.)\qquad A = L,\qquad B = L',\qquad C = 0.$$

Aus der letzten Gleichung $C = 0$ folgt mit Rücksicht auf (**22.III**) sofort: $C_1 = 0$. Und mit Rücksicht hierauf folgt aus (**17. b**): $\operatorname{tg} 2\chi_1 = 0$, also $\chi_1$ selber $= 0^0$ oder $= 90^0$. Eine Untersuchung über die Frage, *welcher* von diesen beiden Werthen der richtige sei, ist glücklicher Weise nicht nöthig. Denn beide Werthe führen zu *demselben* Endresultat. Nehmen wir zunächst

$$(\gamma.) \qquad \chi_1 = 90^0,$$

so wird nach (17.a):

$$(\delta.) \qquad A_1 = L_1, \qquad B_1 = L_1'.$$

Substituiren wir nun die Werthe $(\beta.)$, $(\delta.)$ in (22. I, II), so folgt:

$$(\sigma.) \qquad \frac{L_1 \cos^2\omega_1 - R\cos\omega_1}{\sin\omega_1} = \frac{L\cos^2\omega - R\cos\omega}{\sin\omega},$$

$$(\tau.) \qquad \frac{L_1' - R\cos\omega_1}{\sin\omega_1} = \frac{L' - R\cos\omega}{\sin\omega}.$$

Da, nach $(\alpha.)$, $(\gamma.)$, $\chi = 90^0$ und auch $\chi_1 = 90^0$, so sind $\sigma$ und $\sigma_1$ die zur Einfallsebene *senkrechten* Brennlinien des einfallenden und gebrochenen Bündels. Und die reciproken Abscissen $L$ und $L_1$ dieser Brennlinien hängen also mit einander zusammen durch die Formel $(\sigma.)$; während gleichzeitig die reciproken Abscissen $L'$ und $L_1'$ der *in* der Einfallsebene liegenden Brennlinien $\sigma'$ und $\sigma_1'$ mit einander verbunden sind durch die Formel $(\tau.)$.

Hätten wir in $(\gamma.)$ den Winkel $\chi_1$ nicht $= 90^0$, sondern $= 0^0$ genommen so würden sich statt der Relationen $(\delta.)$ folgende ergeben haben: $A_1 = L_1'$ und $B_1 = L_1$ u. s. w. Und wir übersehen leicht, dass sich hiebei *genau dieselben Resultate* wie vorhin ergeben haben würden, nur mit etwas *anderer Bezeichnung*. — Wir gelangen also zu folgendem Satz:

*Besitzt das auf die Kugelfläche fallende Strahlenbündel zwei Brennlinien, von denen die eine senkrecht zur Einfallsebene, mithin die andere in dieser Ebene liegt, so gilt Gleiches auch von dem gebrochenen Bündel. Und zwar sind in diesem Fall die Abscissen $l$ und $l_1$ der zur Einfallsebene senkrechten Brennlinien mit einander verbunden durch die Formel* $(\sigma.)$:

$$\left(\frac{\cos\omega_1}{l_1} - \frac{1}{r}\right)\frac{\cos\omega_1}{\sin\omega_1} = \left(\frac{\cos\omega}{l} - \frac{1}{r}\right)\frac{\cos\omega}{\sin\omega},$$

*oder, einfacher ausgedrückt, durch die Formel:*

$$(\sigma\sigma.) \qquad \frac{r \cos \omega_1 - l_1}{l_1 \operatorname{tg} \omega_1} = \frac{r \cos \omega - l}{l \operatorname{tg} \omega}.$$

*Und andererseits sind die Abscissen l und $l_1$*) der in der Einfallsebene gelegenen Brennebenen mit einander verbunden durch die Formel (τ.):*

$$\left(\frac{1}{l_1} - \frac{\cos \omega_1}{r}\right) \frac{1}{\sin \omega_1} = \left(\frac{1}{l} - \frac{\cos \omega}{r}\right) \frac{1}{\sin \omega},$$

*d. i. durch die Formel:*

$$(\tau\tau.) \qquad \frac{r - l_1 \cos \omega_1}{l_1 \sin \omega_1} = \frac{r - l \cos \omega}{l \sin \omega}.$$

*In diesen Formeln bezeichnet $\omega$ den Einfallswinkel, $\omega_1$ den Brechungswinkel, und r den Radius der gegebenen Kugelfläche.*

**Zweiter Fall.** Die Strahlen des einfallenden Bündels mögen sämmtlich von *ein und demselben* Punkt ausgehen. Alsdann besitzt das Bündel zwei auf einander senkrechte *durch diesen Punkt* gehende Brennlinien, von denen man sich die eine *senkrecht* zur Einfallsebene, die andere *in* dieser Ebene gelegen vorstellen kann. Hieraus folgt, dass der gegenwärtige Fall sich dem vorhergehenden unmittelbar subsumirt. Der einzige Unterschied wird darin bestehen, dass die beiden Grössen $L$ und $L'$, welche im vorhergehenden Fall *verschiedene* Werthe hatten, im gegenwärtigen Fall *einander gleich* sind.

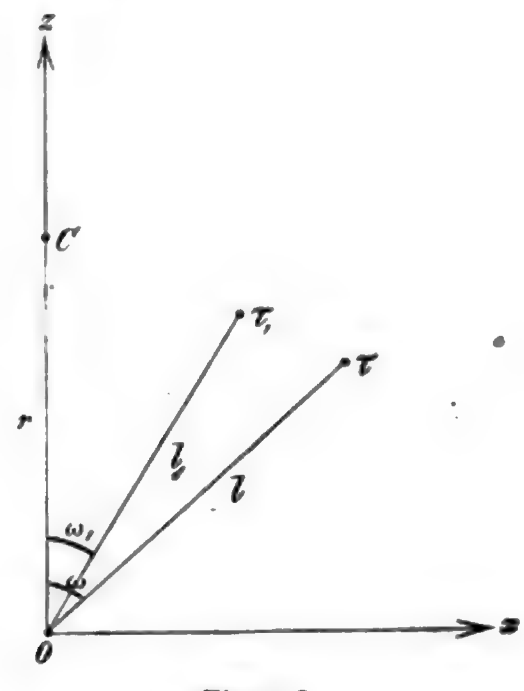
## § 6.

## Geometrische Constructionen. (Die in der Einfallsebene liegenden Brennlinien.)

Betrachtet man zunächst die *in der Einfallsebene* liegenden Brennlinien, deren Abscissen $l$, $l_1$ der Formel (ττ.) unterworfen sind, und bezeichnet man die Mittelpunkte dieser Brennlinien, d. i. die Endpunkte der Abscissen $l$ und $l_1$ resp. mit $\tau$ und $\tau_1$,

*) Der Bequemlichkeit willen unterdrücken wir jetzt die Accente.

ferner die Coordinaten dieser Punkte in Bezug auf das in beistehender Figur angegebene Axensystem resp. mit $x$, $z$ und $x_1$,




Figur 3.

$z_1$, endlich die Coordinaten des Kugelcentrums $C$ in Bezug auf ebendasselbe Axensystem mit $X$, $Z$, so ist offenbar:

$$x = l \sin \omega, \quad x_1 = l_1 \sin \omega_1, \quad X = 0,$$
$$z = l \cos \omega, \quad z_1 = l_1 \cos \omega_1, \quad Z = r.$$

Demgemäss kann die Formel ($\tau\tau$.) auch so geschrieben werden:

$$\frac{Z - z_1}{X - x_1} = \frac{Z - z}{X - x}.$$

*Und hieraus folgt, dass die drei Punkte $C$, $\tau$, $\tau_1$ in gerader Linie liegen. Sind also $C$ und $\tau$ gegeben, so kann man $\tau_1$ sofort construiren.*

§ 7.

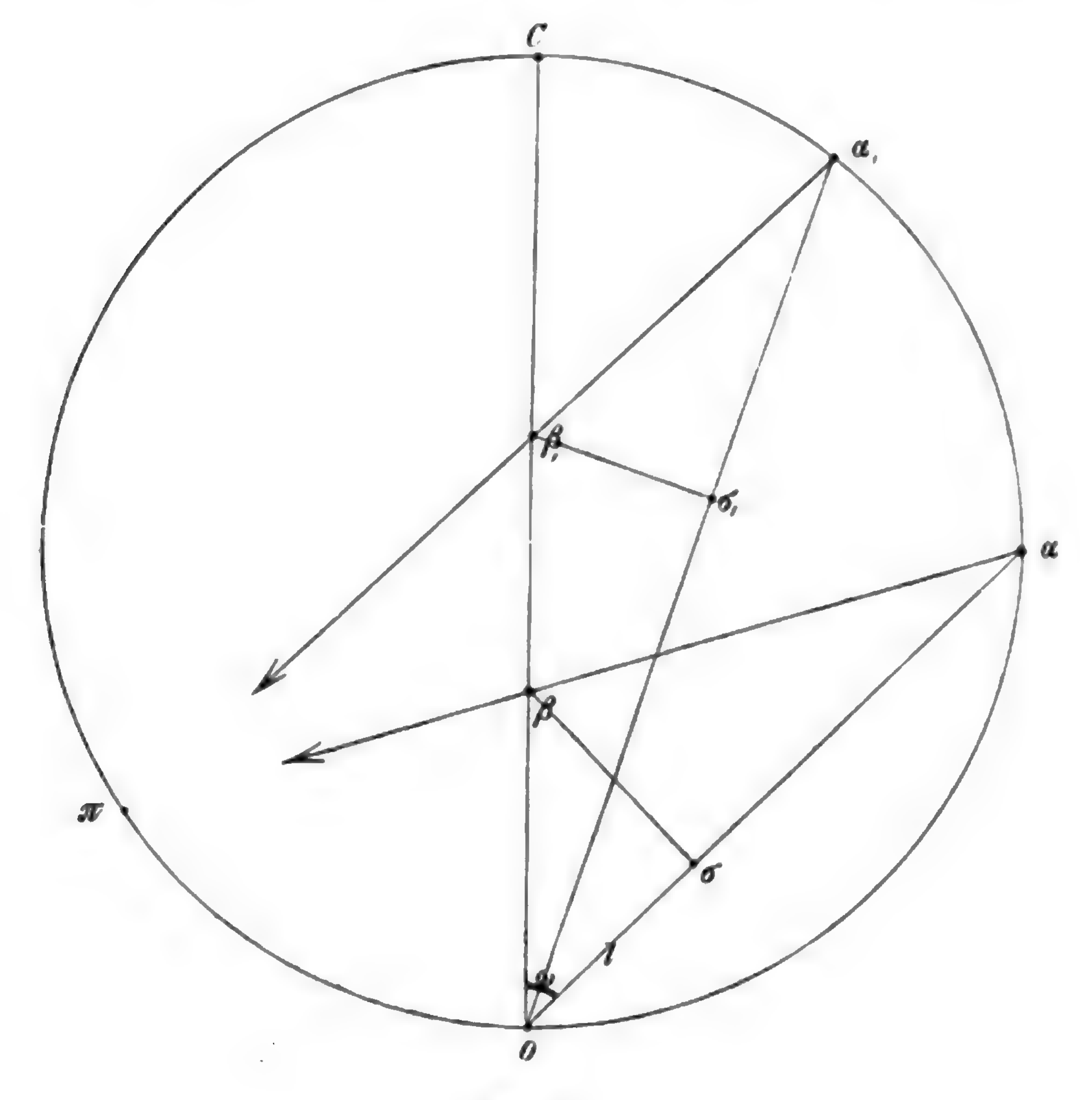
## Geometrische Constructionen. (Die zur Einfallsebene senkrechten Brennlinien.)

**Erste Construction.** Ebenso wie bisher sei $C$ das Centrum der brechenden Kugelfläche, und $O$ der Einfallspunkt. Ferner sei $O\sigma$ die Verlängerung des einfallenden Bündels, und $O\sigma_1$ das gebrochene Bündel. Und gleichzeitig mögen $\sigma$ und $\sigma_1$ die zur

*Einfallsebene senkrechten* Brennlinien dieser beiden Bündel vorstellen *). Die Abscissen $l = (O\sigma)$ und $l_1 = (O\sigma_1)$ dieser Brennlinien sind mit einander verbunden durch die Relation ($\sigma\sigma$.)

$$\text{(I.)} \qquad \frac{r\cos\omega - l}{l\,\mathrm{tg}\,\omega} = \frac{r\cos\omega_1 - l_1}{l_1\,\mathrm{tg}\,\omega_1},$$

wo $\omega = (CO\sigma)$ der Einfallswinkel, und $\omega_1 = (CO\sigma_1)$ der Brechungswinkel ist, während $r = (OC)$ den Radius den Kugelfläche vorstellt.




Figur 4.

Construiren wir nun um $OC$ als Durchmesser einen in der Einfallsebene liegenden Hülfskreis, und verstehen wir unter $\alpha$

*) Genauer ausgedrückt: Es sollen $\sigma$ und $\sigma_1$ diejenigen *Punkte* sein, in welchen die Einfallsebene d. i. die Ebene unserer Zeichnung von jenen (zu ihr senkrechten) Brennlinien getroffen wird.

und $\alpha_1$ diejenigen Punkte, in denen dieser Hülfskreis resp. von $O\sigma$ und $O\sigma_1$ getroffen wird, ferner unter $\beta$, $\beta_1$ diejenigen Punkte, in denen der Durchmesser $OC$ getroffen wird von zwei auf $O\sigma$ und $O\sigma_1$ resp. in $\sigma$ und $\sigma_1$ errichteten Perpendikeln, so wird offenbar die *linke* Seite der Formel (I.) in folgender Weise umgestaltet werden können:

$$\frac{r\cos\omega - l}{l\,\mathrm{tg}\,\omega} = \frac{(OC)\cos\omega - (O\sigma)}{(O\sigma)\,\mathrm{tg}\,\omega} = \frac{(O\alpha)-(O\sigma)}{(\sigma\beta)} = \frac{(\sigma\alpha)}{(\sigma\beta)}.$$

Und in ähnlicher Weise lässt sich auch die *rechte* Seite der Formel ausdrücken; so dass jene Formel übergeht in

$$\text{(II.)}\qquad \frac{(\sigma\alpha)}{(\sigma\beta)} = \frac{(\sigma_1\alpha_1)}{(\sigma_1\beta_1)},$$

woraus sofort folgt:

$$\text{(III.)}\qquad \Delta(\sigma\alpha\beta) \sim \Delta(\sigma_1\alpha_1\beta_1),$$

also z. B. auch

$$\text{(IV.)}\qquad \text{Winkel}\,(\sigma\alpha\beta) = \text{Winkel}\,(\sigma_1\alpha_1\beta_1).$$

Diese beiden Winkel müssen daher, weil zwei ihrer Schenkel $(\alpha\sigma)$ und $(\alpha_1\sigma_1)$ in einem Punkt $O$ des Hülfskreises einander schneiden, über *demselben Bogen* dieses Kreises stehen. Mit andern Worten: *Die Linien $\alpha\beta$ und $\alpha_1\beta_1$ müssen einander schneiden in einem Punkte jenes Hülfskreises.* (Dieser Punkt ist in unserer Figur mit $\pi$ bezeichnet.)

Dieser Satz führt, falls die Brennlinie $\sigma$ des einfallenden Bündels gegeben ist, zu einer ziemlich einfachen Construction der Brennlinie $\sigma_1$ des gebrochenen Bündels. Bedeutend einfacher aber ist eine

**Zweite Construction,** zu der wir gegenwärtig übergehen wollen. Wir ziehen zunächst denselben Hülfskreis, wie in der vorhergehenden Figur. Auch mögen $O, C, \sigma, \sigma_1, \alpha, \alpha_1$ dieselben Bedeutungen haben, wie dort. Sodann projiciren wir den Durchmesser $OC$ rechtwinklig auf die durch $\alpha, \alpha_1$ gehende Secante, und bezeichnen diese Projection mit $PQ$. Dann ist offenbar*):

$$\text{(1.)}\qquad (\alpha P) = (\alpha_1 Q),$$

*) Bezeichnet man nämlich den Mittelpunkt des Hülfskreises mit $M$, und den Halbirungspunkt der Sehne $\alpha\alpha_1$ mit $\mu$, so sind offenbar $(P\mu)$ und $(\mu Q)$ die rechtwinkligen Projectionen resp. von $(OM)$ und $(MC)$. U. s. w.

mithin auch

$$\text{Bogen } (\alpha\gamma) = \text{Bogen } (\alpha_1 C),$$

und folglich: Winkel $(PO\alpha)$ = Winkel $(\alpha_1 O C)$, d. i.

(2.) $$\text{Winkel } (PO\alpha) = \omega_1.$$

Mit Rücksicht hierauf aber folgt sofort, dass die in den rechtwinkligen Dreiecken $OP\alpha$ und $OP\alpha_1$ bei $\alpha$ und $\alpha_1$ gelegenen Winkel die Werthe haben:

(3.) $$\begin{aligned} \alpha &= 90^0 - \omega_1, \\ \alpha_1 &= 90^0 - \omega. \end{aligned}$$

Dies vorangeschickt kehren wir zurück zu der zu behandelnden Formel $(\sigma\sigma.)$ Seite 55, d. i. zur Formel:

(4.) $$\frac{l \operatorname{tg} \omega}{r \cos \omega - l} = \frac{l_1 \operatorname{tg} \omega_1}{r \cos \omega_1 - l_1}.$$

Bezeichnen wir die Strecken $(\sigma\alpha)$ und $(\sigma_1\alpha_1)$ resp. mit $m$ und $m_1$, so ist z. B. $(O\alpha) = l + m$, d. i.

$$r \cos \omega = l + m.$$

Und führen wir mit Hülfe dieser Relation $m$ an Stelle von $l$ ein, so nimmt die *linke* Seite unserer Formel (4.) die Gestalt an:

$$\frac{l \operatorname{tg} \omega}{r \cos \omega - l} = \frac{(r \cos \omega - m) \operatorname{tg} \omega}{m} = \frac{r \sin \omega}{m} - \operatorname{tg} \omega.$$

Aehnlich kann die *rechte* Seite der Formel umgestaltet werden; so dass also die Formel selber auch so geschrieben werden kann:

(5.) $$\frac{r \sin \omega}{m} - \operatorname{tg} \omega = \frac{r \sin \omega_1}{m_1} - \operatorname{tg} \omega_1,$$

oder auch so:

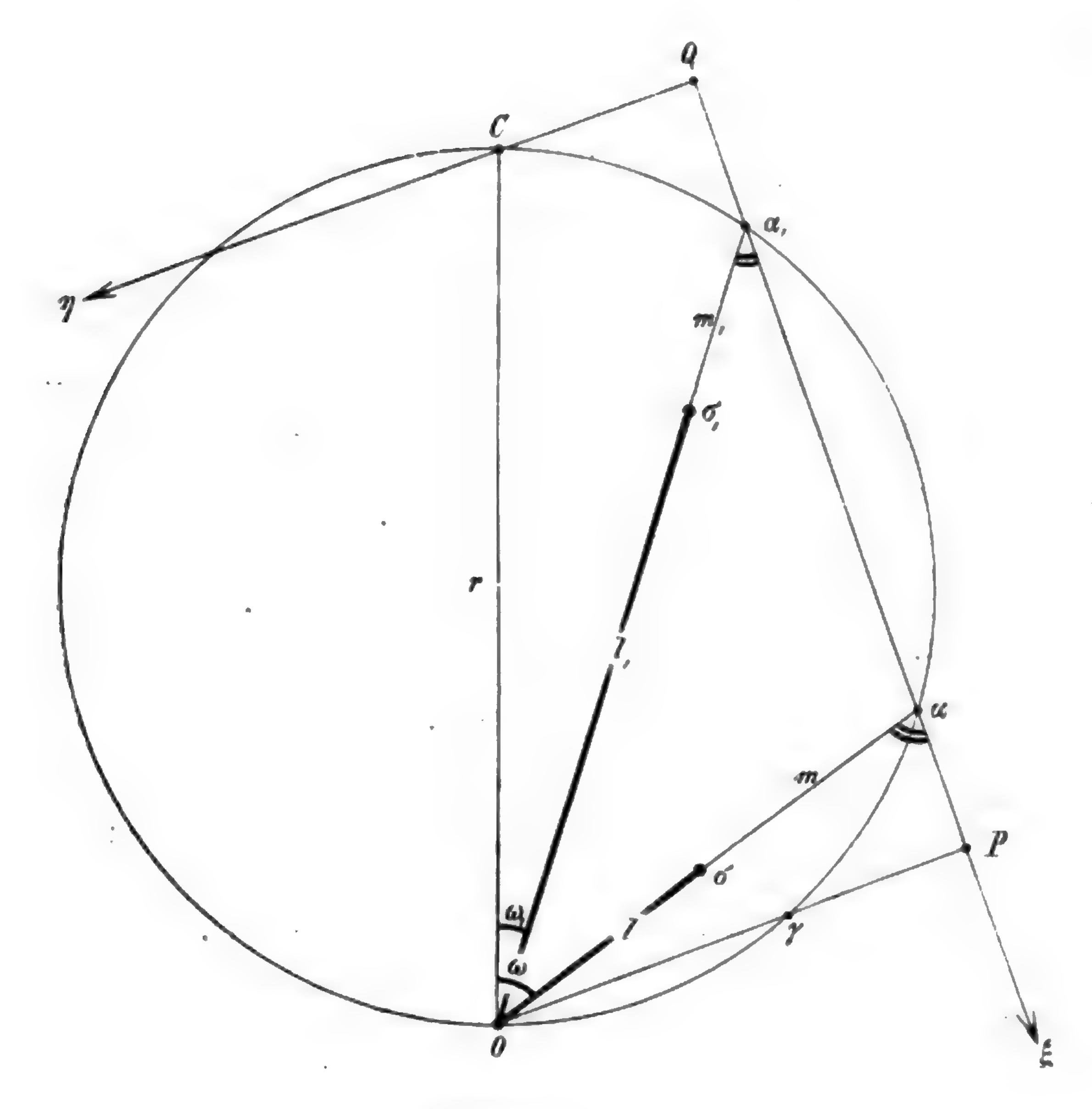
(6.) $$\frac{r \sin \omega}{m} + \operatorname{tg} \omega_1 = \frac{r \sin \omega_1}{m_1} + \operatorname{tg} \omega,$$

oder auch so:

(7.) $$\frac{(r \cos \omega_1) \sin \omega + m \sin \omega_1}{m \cos \omega_1} = \frac{(r \cos \omega) \sin \omega_1 + m_1 \sin \omega}{m_1 \cos \omega}.$$

Hieraus folgt mit Rücksicht auf unsere Figur:

$$(8.)\qquad \frac{(O\alpha_1)\sin\omega + m\sin\omega_1}{m\cos\omega_1} = \frac{(O\alpha)\sin\omega_1 + m_1\sin\omega}{m_1\cos\omega},$$




Figur 5.

also mit Rücksicht auf (3.)

$$(9.)\qquad \frac{(O\alpha_1)\cos\alpha_1 + m\cos\alpha}{m\sin\alpha} = \frac{(O\alpha)\cos\alpha + m_1\cos\alpha_1}{m_1\sin\alpha_1}.$$

Nun ist aber:

$$(O\alpha)\cos\alpha_1 = (P\alpha_1) = (Q\alpha), \text{ [vergl. (1.)]}$$
$$(O\alpha_1)\cos\alpha = (P\alpha) = (Q\alpha_1).$$

Somit nimmt unsere Formel (9.) folgende Gestalt an:

(10.) $$\frac{(Q\alpha) + m\cos\alpha}{m\sin\alpha} = \frac{(Q\alpha_1) + m_1\cos\alpha_1}{m_1\sin\alpha_1},$$

oder endlich, falls man die Coordinaten von $\sigma$ und $\sigma_1$ in Bezug auf das in der Figur angegebene Axensystem $PQC$ resp. mit $\xi, \eta$ und $\xi_1, \eta_1$ bezeichnet, folgende:

(11.) $$\frac{\xi}{\eta} = \frac{\xi_1}{\eta_1}.$$

Und hieraus erkennt man, *dass die Punkte $\sigma$, $\sigma_1$ mit $Q$ in gerader Linie liegen.*

§ 8.

## Resultat der zuletzt angestellten Betrachtungen.

Aus unsern Untersuchungen ergeben sich folgende Sätze:

*1). Besitzt das auf die Kugelfläche fallende (unendlich dünne) Strahlenbündel zwei Brennlinien, von denen die eine senkrecht zur Einfallsebene, mithin die andere in dieser Ebene liegt, so gilt Gleiches auch von dem gebrochenen Bündel.*

*2). Bezeichnet man die Mittelpunkte der in der Einfallsebene liegenden Brennlinien mit $\tau$ und $\tau_1$*), ferner das Centrum der gegebenen Kugelfläche mit $C$, so liegen $C$, $\tau$, $\tau_1$ in gerader Linie.* (Dies der Satz Seite 56; vgl. die dortige Figur 3.)

*3). Um eine analoge Regel zu erhalten für die Mittelpunkte $\sigma$ und $\sigma_1$ der zur Einfallsebene senkrechten Brennlinien**), bezeichne man den Einfallspunkt mit $O$, und beschreibe um $CO$ als Durchmesser einen in der Einfallsebene liegenden Hülfskreis. Man markire sodann diejenigen Punkte $\alpha$ und $\alpha_1$, in denen dieser Hülfskreis von den Linien des einfallenden und gebrochenen Bündels getroffen wird***), ziehe die Secante $\alpha\alpha_1$, und bezeichne den Fusspunkt des*

*) Bezeichnet man die *Hauptstrahlen* der unendlich dünnen Bündel mit $\Sigma$ und $\Sigma_1$, so sollen $\tau$ und $\tau_1$ diejenigen Punkte sein, in welchem die in Rede stehenden Brennlinien von $\Sigma$ und $\Sigma_1$ geschnitten werden.

**) Es sollen also $\sigma$ und $\sigma_1$ diejenigen Punkte vorstellen, in denen diese zur Einfallsebene senkrechten Brennlinien von der Einfallsebene geschnitten werden.

***) Der Hülfskreis wird von der Linie des einfallenden Bündels d. i. vom Hauptstrahl $\Sigma$ in *zwei* Punkten getroffen. Der eine von diesen ist der Einfallspunkt $O$, und der andere soll mit $\alpha$ bezeichnet sein. Ebenso sollen $O$ und $\alpha_1$ diejenigen Punkte vorstellen, in denen der Kreis von der Linie des gebrochenen Bündels d. i. vom Hauptstrahl $\Sigma_1$ getroffen wird.

*von C auf diese Secante herabgelassenen Perpendikels mit Q. Alsdann liegen die drei Punkte Q, $\sigma$, $\sigma_1$ in gerader Linie.* (Dies der Satz Seite 61, oben; vgl. die Figur Seite 60.)

Diese merkwürdigen Sätze, mittelst deren man $\tau_1$ und $\sigma_1$ sofort construiren kann, falls $\tau$ und $\sigma$ gegeben sind, verdanken wir den schönen rein *geometrischen* Untersuchungen des Herrn *Lippich* *).

Wenn ich dieselben hier von Neuem reproducirt habe, so ist solches nur geschehen, um meine analytischen Untersuchungen zu einem gewissen Abschluss zu bringen. Und ich will gerne anerkennen, dass, falls man diese Sätze *allein* ins Auge fasst, die von *Lippich* gegebene rein geometrische Ableitung derselben vor der meinigen den Vorzug verdient.

## §. 9.

## Anhang. Beweis des Malus'schen Satzes.

Die von einem leuchtenden Punkt $O$ ausgehenden Strahlen mögen beliebig viele Reflexionen und Brechungen erleiden, jedoch unter der Voraussetzung, dass jedes der von ihnen durchlaufenen Medien *homogen* und *unkrystallinisch* sei. Wir wollen uns diejenigen Punkte $c$, $c'$, $c''$, ... aufgesucht denken, bis zu denen all' diese Strahlen von $O$ aus in einer *gegebenen Zeit* vordringen, und die von diesen Punkten $c$, $c'$, $c''$, ... gebildete Fläche mit $F$ bezeichnen. Benennen wir also die von den Strahlen eingeschlagenen Wege mit $Oabc$, $Oa'b'c'$, $Oa''b''c''$, ..., indem unter $a$, $a'$, $a''$, ... Punkte verstehen, die *sehr nahe* an $O$ gelegen sind, andrerseits aber unter $b$, $b'$, $b''$, ... Punkte verstehen, die *äusserst nahe* gelegen sind resp. an $c$, $c'$, $c''$, ..., so wird die von den Strahlen zur Durchlaufung dieser Wege aufgewendete Zeit durchweg *ein und dieselbe* sein, was angedeutet sein mag durch die Formel:

$$\text{(I.)} \qquad \mathfrak{Z}(Oabc) = \mathfrak{Z}(Oa'b'c') = \ldots\ldots$$

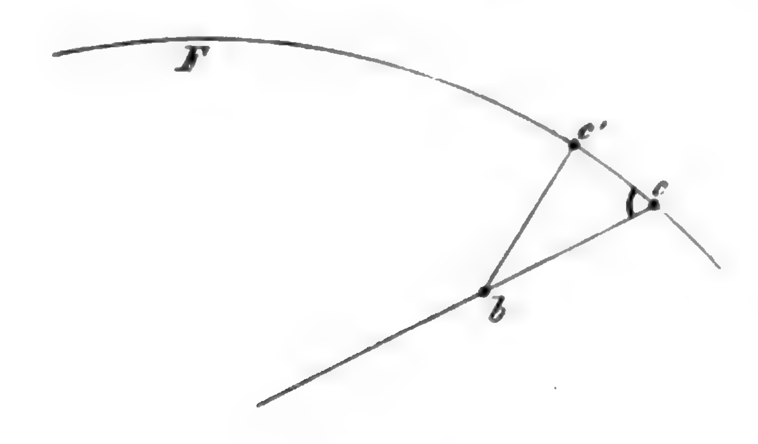
Wir wollen nun die *Hypothese* machen, der Strahl $Oabc$ fiele

---

*) *Lippich: Ueber Brechung und Reflexion unendlich dünner Strahlensysteme an Kugelflächen.* Denkschriften der Kais. Akad. d. Wiss. zu Wien, Math. Classe, XXXVIII, aus dem Jahr 1877.

auf die Fläche $F$ unter einem *schiefen* Winkel, und die Consequenzen aufsuchen, zu denen eine solche Hypothese hinleitet.

Zu diesem Zwecke fällen wir von $b$ ein Perpendikel auf die Fläche $F$. Der Fusspunkt dieses Perpendikels liegt auf der Fläche $F$, gehört also zur Kategorie der Punkte $c'$, $c''$, . . .; und es kann somit z. B. der Punkt $c'$ auf der Fläche $F$ in solcher Weise gewählt gedacht werden, dass er mit jenem Fusspunkt




Figur 6.

*identisch* ist. Alsdann ist $bcc'$ ein bei $c'$ *rechtwinkliges* Dreieck, also die Hypotenuse $bc$ *grösser* als die Kathete $bc'$. Hieraus folgt, dass das Licht zur Durchlaufung des Weges $Oabc$ *mehr* Zeit braucht, als es brauchen würde zur Durchlaufung des Weges $Oabc'$ *); was angedeutet sein mag durch die Formel:

(II.) $$\mathfrak{Z}(Oabc) > \mathfrak{Z}(Oabc').$$

Aus (I.) und (II.) folgt nunmehr sofort:

(III.) $$\mathfrak{Z}(Oa'b'c') > \mathfrak{Z}(Oabc').$$

Somit würde also für den Lichtstrahl $Oa'b'c'$ ein *anderer* Weg $Oabc'$ angebbar sein, auf welchem er in *kürzerer* Zeit von $O$ nach $c'$ hätte gelangen können. Dies aber *widerspricht* einem bekannten allgemeinen Theorem. Folglich ist die von uns gemachte Hypothese, dass der Strahl $Oabc$ auf die Fläche $F$ unter *schiefem* Winkel falle, *unrichtig*, u. s. w.

---

*) Es soll hier unter $Oabc'$ ein Weg verstanden werden, welcher von $O$ bis $b$ mit dem Wege $Oabc$ zusammenfällt, vom Punkte $b$ aus aber nicht mehr durch die Hypotenuse $bc$ sondern durch die Kathete $bc'$ dargestellt ist.

Man bemerkt sofort, dass in Folge dieses Beweises der *Malus*'sche Satz auch noch gültig ist für *nichthomogene* Medien. Nur muss vorausgesetzt werden, dass erstens jedes der durchlaufenen Medien unkrystallinisch ist, und dass zweitens jedes dieser Medien hinsichtlich seiner Beschaffenheit von einer Stelle zur andern in *stetiger Weise* variirt.

---

## Inhaltsverzeichniss zu den vorstehenden drei Aufsätzen.



---

**W. Hankel,** *Über eine directe Umwandlung der Schwingungen der strahlenden Wärme in Elektricität.* *)

Ich werde heute einen allgemeinen Bericht geben über einige Versuche, welche eine directe Umwandlung der Schwingungen der strahlenden Wärme in Electricität darthun; die speciellen Angaben behalte ich einer späteren Abhandlung vor.

Im Jahre 1865 habe ich in den Berichten unserer Gesellschaft **) eine Theorie der elektrischen Erscheinungen durchgeführt, nach welcher die Elektricität in Schwingungen besteht, und zwar in kreisförmigen Schwingungen des Äthers unter Betheiligung der Materie. Die positive und die negative Modification der Elektricität unterscheiden sich nach dieser Ansicht nur durch den Sinn der Drehung, und derselbe kreisförmige Wirbel (wenn ich diesen Ausdruck gebrauchen darf), welcher von der einen Seite gesehen rechtsum, von der anderen gesehen linksum rotirt, stellt infolge dessen auf der einen Seite die positive, auf der andern die negative Modification der Elektricität dar. Sollen nun die gewöhnlichen Wärmeschwingungen direct in Elektricität übergehen, so müssen sie durch den Einfluss der von ihnen durchstrahlten Materie in kreisförmige Bewegungen umgesetzt werden.

Zu der Verwirklichung einer solchen Umwandlung dient die Durchstrahlung des Bergkrystalles in der Richtung seiner Nebenaxen.

In meiner Abhandlung »über die thermoelektrischen Eigenschaften des Bergkrystalles« (Bd. XIII. der Abh. der K. Sächs. Ges. d. Wiss.) habe ich nachgewiesen, dass der Bergkrystall in der Richtung seiner Nebenaxen hemimorphisch gebildet ist; und nach diesen Richtungen finden sich auch thermoelektrische polare Axen. Über das thermoelektrische Verhalten dieser Nebenaxen bei abnehmender Temperatur heisst es S. 380 jener

---

*) Vorgetragen in der Sitzung am 23. April 1880, zum Druck übergeben am 29. Mai 1880.

**) Berichte über die Verh. der K. Sächs. Ges. d. Wiss. 1865. S. 7.

Abhandlung: »Wir können hiernach, im Anschluss an die übliche Ausdrucksweise, dem Bergkrystalle sechs elektrische Pole, abwechselnd positiv und negativ, oder drei an ihren Enden entgegengesetzt elektrische Axen, die mit den sogenannten Nebenaxen der sechsseitigen Pyramide zusammenfallen, zuschreiben.« Und wenige Zeilen später: »Hieraus folgt, dass die positiven Zonen, welche zwischen den Zonen des Gegenrhomboeders*) liegen, stets über diejenigen Prismenkanten hinweggehen müssen, welche an ihren oberen und unteren Enden Rhombenflächen tragen, oder dass die positiven Pole oder die positiven Endpunkte der elektrischen Axen in die Mitten der eben bezeichneten Kanten des Prismas fallen, während die negativen Pole oder negativen Endpunkte der elektrischen Axen den dazwischen liegenden Prismenkanten angehören.«

Hiernach zeigen also die beiden Enden einer jeden Nebenaxe bei einem einfachen Bergkrystalle entgegengesetzte elektrische Polaritäten. Eine hiermit im Einklange stehende Anordnung der Moleküle des Äthers im Innern des Krystalles erhalten wir, wenn wir dieselben so angeordnet annehmen, dass sie unter dem Einflusse und der Betheiligung der materiellen Moleküle in kreisförmigen Bahnen um die Nebenaxen beweglich, und zwar in der einen Richtung leichter beweglich sind, als in der entgegengesetzten. Dann wird auf der ganzen Länge der Nebenaxe die leichter eintretende Drehung absolut genommen dieselbe Richtung haben, aber von aussen gesehen an dem einen Ende gerade entgegengesetzt als am anderen erscheinen; an den beiden Enden einer Nebenaxe werden also infolge der in der Richtung der begünstigten Drehung eintretenden kreisförmigen Schwingungen entgegengesetzte Elektricitäten auftreten.

Da ferner beim Bergkrystalle, entsprechend den bei ihm auftretenden hemimorphischen Gestalten, die aufeinander folgenden Enden der Nebenaxen abwechselnd positiv und negativ sind, so müssen, wenn wir die zuvor gemachte Annahme beibehalten, die Drehungen um die abwechselnden Nebenaxen sich verschieden verhalten, d. h. wenn die Drehung um die eine Axe aus der Verlängerung ihres Endes gesehen rechtsum leich-

*) Ich lasse hier die Richtungen, in welchen sich die elektrischen Zonen, je nachdem der Krystall ein sogenannter rechter oder linker ist, vom oberen Ende zum unteren hinabziehen, ausser Betracht, weil dieselben zu den folgenden Mittheilungen keine Beziehung haben.

ter geschieht, so wird dieselbe um die benachbarten Nebenaxen, ebenfalls aus der Verlängerung derselben nach derselben Seite gesehen, leichter linksum erfolgen.

Wenn die aus einem leuchtenden oder warmen Körper austretenden Schwingungen ein Äthertheilchen treffen, so wird infolge des stets wechselnden Schwingungszustandes der anlangenden Strahlen das Äthertheilchen sich bald geradlinig, bald kreisförmig, bald elliptisch in der einen oder andern Richtung bewegen. Treffen solche Schwingungen in der Richtung einer der Nebenaxen auf einen Bergkrystall, so werden diejenigen Schwingungen, deren Sinn mit der Richtung der leichteren Drehung der Moleküle des Äthers im Bergkrystalle übereinstimmt, die Drehung dieser Äthertheilchen unter Betheiligung der materiellen Moleküle der Substanz einleiten, und infolge dessen an den Enden dieser Nebenaxe elektrische Spannungen wahrnehmbar werden, und zwar muss das eine Ende die eine, das entgegengesetzte die andere Modification der Elektricität zeigen.

Ich werde nun nachweisen, dass die zuvor beschriebenen Erscheinungen in der That eintreten.

Ein 4 bis 6 cm langer und 2 bis 3 cm dicker, sehr klarer Bergkrystall, z. B. vom St. Gotthardt, der ein möglichst einfaches Individuum darstellt, wird mit seinem unteren verbrochenen Ende mittelst Siegellack auf einer Metallplatte aufgekittet, so dass seine Hauptaxe vertical steht, und neben das Elektrometer gebracht. Eine 1 bis 2 cm im Durchmesser haltende Metallkugel *) wird sodann durch Siegellack oder Schellack isolirt an die Mitte der einen verticalen Kante des Bergkrystalles so gestellt, dass die Verlängerung der dieser Kante entsprechenden Nebenaxe durch den Mittelpunkt der Kugel geht. Die isolirte Kugel setzt man durch einen dünnen Platindraht mit dem Goldblättchen des von mir construirten Elektrometers**) in Verbindung. Endlich wird mittelst eines Hohlspiegels (eines aus einem Teleskop genommenen Spiegels) das Sonnenlicht in der Richtung der genannten Nebenaxe auf den Krystall geworfen, so dass der Brenn-

*) Dieser Leiter kann auch eine beliebige andere Form haben; ich habe z. B. die Kante des Krystalles mit einem Stanniolstreifen belegt.

**) Die Empfindlichkeit des Elektrometers war so regulirt, dass ein Element Zinn-Kupfer-Wasser einen Ausschlag des Goldblättchens von 50 Skalentheilen erzeugte.

punkt des Lichtbündels ungefähr in der Mitte des Krystalles liegt *).

Wenn nun die Kante, auf welcher das Licht in den Krystall eindringt (sie möge die vordere heissen) oben die sogenannte Rhombenfläche trägt, so zeigt, sobald das Licht auffällt, das mit der an der hintern Kante stehenden Kugel verbundene Goldblättchen sofort einen negativen Ausschlag, dessen Grösse je nach der Beschaffenheit des Krystalles und der Sonnenstrahlen verschieden ist. Unter günstigen Umständen erreicht er eine solche Grösse, dass das Goldblättchen ganz aus dem Gesichtsfelde des Mikroskopes getrieben wird. Der Ausschlag steigt in ungefähr 20 Secunden bis zu seinem Maximum. Wird die Strahlung der Sonne durch Drehung des Spiegels zur Seite gewendet, so kehrt das Goldblättchen in einem gleichen Zeitintervalle wieder zurück, und zwar zur Ruhelage, wenn die Bestrahlung nur wenige Secunden gedauert hat.

Dreht man jetzt den Krystall um, so dass die oben mit Rhombenfläche versehene Kante an die Kugel zu stehen kommt, das Licht also auf die frühere hintere Kante fällt, so erscheint ein positiver Ausschlag.

Untersucht man auch die beiden anderen Nebenaxen, so zeigt sich bei einfachen Krystallen ein Wechsel in der Polarität auf den benachbarten Kanten.

Das Ende der Nebenaxe, an welchem die Strahlung austritt, erhält also eine bestimmte Polarität; trägt die Kante, an welcher die Strahlen austreten, oben keine Rhombenfläche, so erscheint sie negativ; liegt aber oberhalb derselben die Rhombenfläche **), so nimmt sie positiv elektrische Spannung an.

Ebenso leicht wie die Beschaffenheit der Kanten, an welchen

*) Anstatt das Sonnenlicht durch einen Hohlspiegel auf den Krystall zu werfen, hätte ich auch die directen Strahlen der Sonne anwenden können. Doch würde dieses Verfahren sehr umständliche Vorrichtungen und die völlige Abänderung der gegenwärtigen Aufstellung des Elektrometers bedingt haben.

**) Da nicht stets die drei Rhombenflächen am oberen Ende vorhanden sind, so sind unter der Bezeichnung von Kanten, welche oben die Rhombenfläche tragen, auch diejenigen Kanten zu verstehen, an denen sie vielleicht nicht gesehen wird, aber auftreten müsste, wenn alle Rhombenflächen vollzählig ausgebildet wären.

die Strahlung austritt, lässt sich das elektrische Verhalten der Kanten beobachten, an welchen die Strahlen eintreten; nur werden die Wirkungen nicht dieselbe Stärke erreichen, weil wir die Sonnenstrahlen nicht mehr gerade in der Richtung der Nebenaxen durch den Krystall gehen lassen können. Zu diesem Behufe stellt man den Krystall etwa unter 40° gegen den Horizont geneigt, und bringt die isolirte, mit dem Goldblättchen durch den Platindraht verbundene Kugel nahe über die Kante, auf welche das Licht möglichst in der Richtung der Nebenaxen einfällt. Das Elektrometer zeigt eine elektrische Erregung im Krystalle an, und zwar erscheint die Kante, auf welche das Licht einfällt, wenn sie oben die Rhombenfläche trägt, positiv, dagegen negativ, wenn diese Fläche gesetzmässig dort nicht erscheinen kann. Die elektrische Polarität der Kanten ist also genau dieselbe, gleichviel ob die Strahlung an den Kanten ein- oder austritt, weil in Übereinstimmung mit der früher entwickelten Ansicht die Richtung der leichteren Drehung unverändert bleibt.

Bei diesen letzteren Beobachtungen kann auch der Krystall, wie ich dies bei meinen thermoelektrischen Untersuchungen ausführe, um ihn bequemer in passende Lagen bringen zu können, in Kupferfeilicht eingesetzt werden, so dass nur die zu bestrahlende Kante frei bleibt.

Da die Beobachtungen mittelst der Bestrahlung durch die Sonne bei geöffnetem Fenster sehr unbequem*), und bei bedecktem Himmel unmöglich waren, so versuchte ich die Sonne durch eine Gasflamme, deren Strahlen in gleicher Weise wie zuvor das Sonnenlicht, durch einen grösseren metallischen Hohlspiegel von 12 cm Brennweite und 20 cm Oeffnung auf den Krystall geworfen wurden, zu ersetzen.

Die Versuche ergaben das gleiche Resultat, wie die Anwendung der Sonnenstrahlen, und es konnte bei geeigneten Krystallen die Wirkung so weit gesteigert werden, dass das Goldblättchen des Elektrometers ganz aus dem Gesichtsfelde des Mikroskopes hinaus ging.

Mittelst der Anwendung des Gaslichtes liess sich nun aber leicht entscheiden, welche von der Sonne oder der Gasflamme

*) Das Elektrometer stand auf der steinernen Fensterbank und erlitt daher bei geöffnetem Fenster leicht Störungen durch Luftzug.

ausgehenden Strahlen die elektrischen Spannungen hervorbringen. Eine vor den Krystall gestellte dünne Glasplatte schwächte die Wirkung der Gasflamme beträchtlich, während eine viel dickere Steinsalzplatte dieselben noch gut hervortreten liess. Es sind daher in der Hauptsache nicht die leuchtenden, sondern die dunklen Wärmestrahlen, welche das Phänomen erzeugen.

Es ist mir wegen Kürze der Zeit und namentlich wegen Mangels an geeigneten Krystallen noch nicht möglich gewesen festzustellen, bis zu welchen Strahlengattungen eine Wirkung eintritt. Ich begnüge mich daher für jetzt mit der allgemeinen Angabe, dass die Schwingungen der sogenannten dunklen Wärmestrahlen bei ihrem parallel mit den Nebenaxen erfolgenden Durchgange durch den Bergkrystall in elektrische Schwingungen verwandelt werden, die an dem einen Ende der Axe als positive, an dem anderen als negative Polarität erscheinen*).

Da die dunklen Wärmestrahlen vorzugsweise, ja vielleicht ausschliesslich in Elektricität übergehen, so müssen die oben beschriebenen Erscheinungen sich auch einstellen, wenn einer Kante des Bergkrystalles ein heisser Körper genähert wird. Stellt man zwei gegenüber liegenden Kanten des Bergkrystalles zwei Kugeln gegenüber, so dass ihre Mittelpunkte in der verlängerten Nebenaxe liegen, so zeigen, wenn die eine Kugel erhitzt ist, sich beide Kugeln elektrisch, und zwar die an der Kante mit Rhombenfläche befindliche positiv, die andere negativ, wobei es gleichgültig ist, welche der beiden Kugeln erhitzt ist; sie können auch beide heiss sein.

Dieser letzte Versuch lässt sich auch so abändern, dass man den Krystall in das in einem kupfernen Kästchen befindliche Kupferfeilicht einhüllt (wie dies bei meinen thermoelektrischen Versuchen stets geschieht) und nur eine Kante nebst ihren Umgebungen frei lässt. Das kupferne Kästchen kann isolirt und mit dem Goldblättchen des Elektrometers verbunden, oder zur Erde abgeleitet werden. An das untere Ende des Platindrahtes, das ich sonst bei meinen thermoelektrischen Untersuchungen

*) Auch die dunklen Wärmestrahlen werden sicherlich nicht alle gleich stark wirken. Es scheint die Wirkung namentlich den äussersten Strahlen anzugehören. Sollten wirksame Strahlen vielleicht sogar noch jenseits der bisher mittelst der Thermosäule festgestellten Grenze zu suchen sein?

den verschiedenen Punkten der Oberfläche der Krystalle mittelst einer durch Stellschrauben zu regulirenden Hebelvorrichtung nähere, wird eine erhitzte Kugel angeschraubt, und mittelst der Hebelvorrichtung der Kante des Krystalles möglichst genähert. Es ist dann leicht, sowohl die in der genäherten Kugel entstehende Elektricität, als auch die von dem eingehüllten Axenende dem kupfernen Kästchen mitgetheilte mittelst des Elektrometers zu beobachten.

Um überhaupt z. B. bei dieser letzteren Anordnung eine Elektricitätserregung in der genäherten Kugel nachzuweisen, genügt schon eine geringe Erhöhung der Temperatur der Kugel über die des Bergkrystalles*).

---

*) Es ist sehr gewöhnlich der Fall, dass bei neuen Entdeckungen der eine oder andere dem betreffenden Gebiete angehörige Vorgang früher bereits einem Beobachter entgegengetreten ist, jedoch ohne von diesem in seiner Bedeutung erkannt zu werden; es wird die Erscheinung entweder als eine den bekannten Gebieten zuzuzählende betrachtet, oder als störende Einwirkung bei Seite geschoben. Es dürfte daher auch wohl ein Interesse haben, zu untersuchen, ob die im Vorstehenden beschriebenen Erscheinungen nicht bereits bei zu andern Zwecken unternommenen Versuchen aufgetreten sind, aber nicht in ihrer Bedeutung erfasst wurden. Dies ist in der That der Fall gewesen.

Herr Ch. Friedel hat in dem 2. Bande des Bulletin de la société minéralogique de France (1879) S. 31 eine Notiz veröffentlicht: Sur la pyroélectricité dans la topaze, la blende et le quartz. Sein Verfahren, die thermoelektrischen Erregungen zu beobachten, besteht darin, dass er eine erhitzte Halbkugel, welche mit dem Elektrometer leitend verbunden ist, auf die an den zu prüfenden Krystallen senkrecht zu ihrer elektrischen Axe angeschliffenen Flächen legt. Er hat seine Methode beim Turmalin und Topas erprobt, und in diesen Fällen gibt das Elektrometer in der That die elektrische Polarität an, welche durch die steigende Temperatur an dem mit der heissen Halbkugel in Berührung befindlichen Ende der elektrischen Axe erzeugt wird. Dann wendet er dieselbe Methode auch zur Bestimmung des elektrischen Verhaltens des Bergkrystalles an, indem er die heisse Halbkugel auf angeschliffene, die Seitenkanten des Prismas abstumpfende Flächen legt.

Herr Ch. Friedel gibt in jener Notiz die von mir in meiner oben citirten Abhandlung über die elektrische Vertheilung auf den Bergkrystallen aufgestellten Gesetze sehr unvollständig wieder; er führt blos die von mir auf den an beiden Enden regelmässig ausgebildeten optisch rechten Krystallen nachgewiesene Lage der elektrischen Zonen an, erwähnt aber weder die von mir eben so bestimmt angegebene Vertheilung auf linken Krystallen, noch auch die durch Verwachsung des einen Endes der Hauptaxe eintretenden Änderungen, und glaubt dann eine mit der Natur des Bergkrystalles besser übereinstimmende Vertheilung aufzustellen, in-

Die Elektricitätserregung, welche das Sonnen- und Gaslicht, sowie die dunklen Strahlen einer heissen Kugel veranlassen, dauert fort, so lange die Strahlung währt.

Wird bei einem dieser Vorgänge, z. B. wenn die von der Gasflamme ausgehenden Strahlen die vordere Kante eines Krystalles treffen, die an der hintern Kante stehende Kugel einige Secunden nach dem Beginn der Bestrahlung, wo der Ausschlag des Elektrometers noch nicht sein Maximum erreicht hat, zur Erde abgeleitet und sofort wieder isolirt, so erscheint nochmals ein geringer Ausschlag nach derselben Seite. Vergeht aber bis zur Wiederherstellung der Isolation ein Zeitraum von mehr als 20 Secunden, so bleibt das Goldblättchen zuerst in der Ruhelage und beginnt dann zufolge der gewöhnlichen thermoelektrischen Erregung durch die steigende Temperatur in der entgegengesetzten Richtung sich zu bewegen. Wird jetzt die Strahlung der Lampe aufgehoben, so geht das Goldblättchen infolge des Freiwerdens der in der Kugel gebundenen Elektricität stark nach der dem anfänglichen Ausschlage entgegengesetzten Seite.

Die im Vorstehenden beschriebenen Vorgänge sind wesent-

---

dem er sagt, »que les arêtes alternatives dans les cristaux simples sont de signe électrique opposé, et le sont de la même manière dans toute leur étendue. Les arêtes, qui portent les faces rhombes ont toujours donné une tension positive par le contact avec le plan d'épreuve chauffé; les arêtes opposées donnant une tension negative. Les axes horizontaux du trigonoèdre, c'est à dire les diagonales de la base du prisme hexagonal du quartz, seraient donc les axes de pyroélectricité.« Wie man sieht, ist dies aber genau die von mir bereits in meiner Abhandlung (s. oben S. 65) angegebene Lage der elektrischen Axen; ausserdem hat aber Herr Friedel nicht bemerkt, dass die von ihm an den Enden der Nebenaxen angegebene Polarität gerade die entgegengesetzte ist von der meinerseits angeführten. Die Angaben des Hrn. Friedel sollen sich, wie er selbst sagt, auf die steigende Temperatur beziehen, während die oben von mir S. 65 angeführten die Vertheilung beim Erkalten darstellen, und doch lauten beide gleich. Dieser Widerspruch erklärt sich dadurch, dass Herr Friedel gar nicht die eigentliche thermoelektrische Erregung, sondern eben die im Vorstehenden von mir beschriebene, durch die Umwandlung der Schwingungen der strahlenden Wärme erzeugte Polarität beobachtet hat; denn wenn er, was durch den zu erzielenden Erfolg selbst geboten war, die erhitzte Halbkugel sofort nach dem Auflegen auf die an dem Krystall senkrecht gegen die Nebenaxen angeschliffenen Flächen isolirte, so musste zuerst die Wirkung der Strahlung eintreten. Die dann durch das Eintreten der eigentlichen thermoelektrischen Erregung erfolgende Abnahme des Ausschlages scheint Herr Friedel jedoch nicht bemerkt zu haben.

lich von den früher von mir untersuchten und in der oben citirten Abhandlung beschriebenen thermoelektrischen verschieden. Während die thermoelektrischen Spannungen zu ihrer Entstehung, weil die Masse des Krystalles ihre Temperatur ändern muss, eine längere Zeit gebrauchen und dann auch länger fortbestehen, tritt bei den neuen Versuchen die Elektricitätserregung rascher (innerhalb 20 Secunden) in voller Stärke ein, und verschwindet auch in einem gleichen Zeitraume wieder.

Ferner ist die durch die Umwandlung der Wärmestrahlung hervorgerufene Elektricität gerade die entgegengesetzte von derjenigen, welche nach den von mir beschriebenen thermoelektrischen Vorgängen eintreten müsste: durch die Strahlung, von welcher man eine elektrische Einwirkung im Sinne der Erwärmung erwarten sollte, tritt eine Elektricitätserregung ein, wie sie der Abkühlung entspricht.

Da das Eintreten der Strahlung von Seiten eines äussern warmen Körpers eine Elektricitätserregung zur Folge hat, so liess sich erwarten, dass auch der umgekehrte Vorgang, wenn ein erhitzter Krystall gegen einen kältern genäherten Körper Wärme ausstrahlt, gleichfalls Elektricität erzeugen würde, und zwar müsste dieselbe, ebenso wie zuvor, wieder gerade entgegengesetzt derjenigen sein, welche man nach den bekannten thermoelektrischen Spannungen zu erwarten hätte, d. h. die Annäherung einer kalten Kugel an die Kante eines erhitzten Krystalles müsste eine Elektricität hervorrufen, welche der durch Erwärmung eben dieser Kante entstehenden entspräche.

Leider ist es nicht möglich, diesen Vorgang rein und frei von Störungen darzustellen. Da der Krystall erwärmt sein muss, so mischen sich die gewöhnlichen thermoelektrischen Spannungen ein. Indess gelingt es doch, wenigstens im Allgemeinen, den Nachweis des Vorhandenseins desselben zu liefern. Setzt man z. B. einen Bergkrystall in das in einem kleinen kupfernen Kästchen befindliche Kupferfeilicht, wie solches bei den gewöhnlichen thermoelektrischen Untersuchungen zum Einhüllen der Krystalle benutzt wird, so ein, dass nur eine Kante (sie möge oben die Rhombenfläche tragen) nebst den umgebenden Flächenstücken unbedeckt bleibt, bringt das Kästchen mit seinem Inhalte eine halbe Stunde in einen Raum von 100° C. und stellt es nach dem Herausnehmen sofort neben das Elektrometer, so

wird, wenn wie gewöhnlich bei den thermoelektrischen Beobachtungen die Spitze eines Platindrahtes der Kante genähert wird, anfangs noch ein negativer Ausschlag im Sinne der Erwärmung eintreten. Nach ungefähr 10 Minuten (bei mässig grossen Krystallen) ist derselbe verschwunden und es tritt bei Annäherung der Spitze des Platindrahtes ein positiver Ausschlag ein. Wird jetzt rasch an die Spitze des Drahtes eine kalte Messingkugel geschraubt und diese Kugel der Kante genähert, so geht bei der Annäherung das Goldblättchen zuerst nach der positiven Seite, kehrt dann bei weiterer Annäherung um und zeigt einen negativen Ausschlag, der sich durch Auflegen der Kugel auf die Kante noch beträchtlich vergrössert.

Es ist bei diesem Versuche allerdings der elektrische Zustand im Innern des Krystalles unbekannt. Man könnte geneigt sein, anzunehmen, dass das Innere noch die der Erwärmung entsprechende Polarität besitze und nur die äussere Hülle sich durch Abkühlung umgekehrt habe, so dass bei etwas grösserem Abstande der Kugel die Elektricität der Hülle, bei grösserer Nähe aber die des Kernes den Ausschlag bedinge. Indess müsste dann der Krystall eine gleiche Wirkung auch auf den genäherten Platindraht ausüben, und es würde die sehr beträchtliche Verstärkung des negativen Ausschlages, wenn die der Kante bereits sehr nahe stehende Kugel mit dieser in Berührung kommt, nicht wohl erklärlich sein. Die Beobachtung des Vorganges scheint daher anzuzeigen, dass durch die Annäherung der kalten Kugel an die erwärmte mit Rhombenfläche versehene Kante die negative Elektricität erzeugt wird, also dieselbe, wie sie diese Kante bei steigender Temperatur annimmt.

Beim Eintritt der Wärmestrahlen in einen Bergkrystall schlägt das Goldblättchen, wie bereits bemerkt, nicht augenblicklich bis zu einem Maximum aus, sondern es vergehen ungefähr 20 Secunden, ehe dies erreicht wird; es macht den Eindruck, als ob ein gewisser Widerstand zu überwinden ist, um die Äthermoleküle unter Betheiligung der materiellen Substanz des Bergkrystalles in eine der Strahlung entsprechende Schwingung zu versetzen, und eben dieser Widerstand macht sich auch bei Aufhebung der Strahlung wieder bemerklich, indem die Schwingungen im Krystall ebenfalls nur innerhalb 20 Secunden wieder verschwinden. Diese verschwindenden Schwingungen

werden sich jedenfalls soweit in Wärme umsetzen, also die Temperatur des Krystalles erhöhen, bis ihr Rest der vorhandenen Temperatur entspricht und bei derselben fortbestehen kann.

In einem bis 100° C. erhitzten Krystalle werden die kreisförmigen Schwingungen der Moleküle eine grössere Intensität besitzen, als in einem Krystalle von niederer Temperatur. Wird nun ein erhitzter Krystall durch Überstreichen mit einer Alkoholflamme scheinbar unelektrisch gemacht, so tritt dieser scheinbar unelektrische Zustand dadurch ein, dass sich über die Oberfläche eine entgegengesetzt elektrische Schicht in solcher Weise und Dicke legt, dass die Wirkung der inneren elektrischen Schwingungen durch die entgegengesetzt gerichteten der Oberfläche nach aussen hin aufgehoben wird. Denken wir uns die Wirkung der inneren elektrischen Theilchen auf Punkte ausserhalb durch eine ideelle Vertheilung der Elektricität auf der Oberfläche ersetzt, so wird durch die leitende Alkoholflamme zu dieser Oberfläche eine Schicht von entgegengesetzter Beschaffenheit, aber überall gleicher Dicke mit jener ideellen Schicht geleitet und daselbst durch die Wirkung der inneren Theile festgehalten; in Bezug auf äussere Punkte erscheint der Krystall also unelektrisch. Wird nun der heissen Kante des Krystalles eine kalte Kugel genähert, so strahlt der Krystall Wärme gegen die Kugel aus, die kreisförmigen Schwingungen können nicht in gleicher Stärke fortbestehen, sie werden geschwächt, und die Elektricität der Hülle wirkt nach aussen, gibt also einen Ausschlag am Elektrometer, welcher dem bei Annäherung einer warmen Kugel an einen kalten Krystall, also bei Verstärkung der elektrischen Schwingungen entstehenden entgegengesetzt ist, mithin mit demjenigen übereinstimmt, welchen die betreffende Kante thermoelektrisch bei steigender Temperatur zeigt.

Die von mir im Vorstehenden beschriebenen elektrischen Vorgänge gehören nicht zu dem Wesen der eigentlichen Thermoelektricität der Krystalle; sonst müssten sie auch beim Turmalin, Topas, Gyps u. s. w. eintreten, was ich bis jetzt nicht habe nachweisen können. Sie stehen aber beim Bergkrystall unzweifelhaft in Beziehung zu den thermoelektrischen Eigenschaften desselben, wie ihr Auftreten in der Richtung der Nebenaxen zeigt; indess ist es mir bis jetzt noch nicht möglich gewesen, den Zusammenhang der beiden Elektricitätserregungen genauer zu bestimmen.

---

**W. Weber** und **F. Zöllner**, *Über Einrichtungen zum Gebrauch absoluter Maasse in der Elektrodynamik mit praktischer Anwendung.* *)

## I.

### Über die Bedeutung und den praktischen Gebrauch absoluter Maasse in der Physik im Allgemeinen und der Elektrodynamik im Besonderen.

Alle mechanischen Vorgänge in der Natur, welche mit Hülfe physikalischer Instrumente der messenden Beobachtung unterworfen werden können, erfordern die Feststellung dreier Grundmaasse für drei unabhängige Grössen, nämlich für: die Zeit, den Raum und die Masse. Zur Vereinfachung physikalischer Forschungen ist es nun sehr wesentlich, für die verschiedenen, einer Messung zu Grunde liegenden, Grössenarten nicht mehr eigene, von einander unabhängige, Grundmaasse einzuführen als unumgänglich nöthig sind, so dass alle anderen Maasse aus diesen wenigen nothwendigen Grundmaassen abgeleitet werden. Aus diesem Grunde werden in der Mechanik blos für Zeiträume, Linien und Massen Grundmaasse aufgestellt; die Maasse aller anderen in der Mechanik betrachteten Grössenarten werden aus diesen drei Grundmaassen abgeleitet und heissen dann absolute Maasse. Zum Beispiele werden keine Grundmaasse für die Geschwindigkeit und Dichtigkeit aufgestellt, sondern es werden absolute Maasse dafür gebraucht, welche auf jene drei Grundmaasse zurückgeführt werden können. Ebenso werden die Maasse für die bewegenden und für die absoluten Kräfte, für die Drehungsmomente, Trägheitsmomente, Nutzeffecte u. s. w. nach bekannten Gesetzen auf jene Grundmaasse zurückgeführt. Aus demselben Grunde wird ferner auch für den Magnetismus kein eigenes unabhängiges Grundmaass eingeführt, sondern man hält sich an das absolute Maass, welches *Gauss* für den Magnetismus aus den drei Grundmaassen der Mechanik, nämlich der Secunde als Zeiteinheit, dem Millimeter als Längeneinheit und dem Milligramm

*) Vorgelegt in den Sitzungen am 23. April und 14. Juni 1880.

als Masseneinheit, in seiner Abhandlung: *Intensitas vis magneticae terrestris ad mensuram absolutam revocata* (Göttingen 1833) abgeleitet hat. *Gauss* setzt gleich in der Einleitung dieser Abhandlung die von ihm gewählten absoluten Maass-Einheiten mit folgenden Worten fest:

»*Quo igitur hanc mensuram ad notiones distinctas revocare possimus, ante omnia circa tria quantitatum genera unitates stabilire oportet, puta unitatem distantiarum, unitatem massarum ponderabilium, unitatem virium accelatricium. Pro tertia accipi potest gravitas in loco observationis: quod si minus arridet, insuper accedere debet unitas temporis, eritque nobis vis acceleratrix ea* = 1, *quae in unitate temporis mutationem velocitatis corporis in ipsius directione moti unitati aequalem gignit. His ita intellectis, unitas quantitatis fluidi borealis ea erit, cujus vis repulsiva in aliam ipsi aequalem in distantia* = 1 *positam aequivalet vi motrici* = 1, *i. e. actioni vis acceleratricis* = 1 *in massam* = 1 *idemque de unitate quantitatis fluidi australis valebit: in hac determinatione manifesto tum fluidum agens, tum fluidum in quod agitur, in punctis physicis concentrata concipi debent.*«

Entsprechend dieser Definition ist z. B. das Maass für die Stärke des Erdmagnetismus oder der erdmagnetischen Kraft an irgend einem Orte das nach absolutem Maasse ausgedrückte Drehungsmoment, welches der Erdmagnetismus auf einen an diesem Orte befindlichen Magnetstab ausübt, wenn letzterer die absolute Einheit von Magnetismus enthält und seine magnetische Axe mit der Richtung des Erdmagnetismus an diesem Orte einen rechten Winkel macht[1]).

Nach dem von *Gauss* definirten Systeme der absoluten Maassbestimmung würde sich für die Grösse der absoluten Masseneinheit der ponderablen Materie die folgende Definition ergeben:

Die absolute Masseneinheit der ponderablen Materie ist diejenige Masse, welche, wenn sie auf eine ihr gleiche Masse eine Secunde lang aus der Entfernung eines Millimeters einwirkt,

---

1) »Resultate aus den Beobachtungen des magnetischen Vereins von *Gauss* und *Wilhelm Weber*. 1840, und Elektrodynamische Maassbestimmungen insbesondere Widerstandsmessungen von *Wilhelm Weber*«. Abhandl. der Königl. Sächs. Gesellsch. der Wissenschaften. Bd. I. 1852. S. 219.

eine relative Geschwindigkeit beider Massen von einem Millimeter erzeugt.

Berechnet man mit Benutzung der von *Cavendish*, *Reich* u. A. über die mittlere Dichtigkeit der Erde angestellten Messungen die der obigen Definition entsprechende Masse, so ergiebt sich der Werth von 15,1882 Kilogrammen [1]. Die Unsicherheit der zur Bestimmung der Dichtigkeit der Erde bis jetzt verfügbaren Maassmethoden macht jedoch die praktische Anwendung dieser absoluten Masseneinheit illusorisch und lässt bis jetzt die in einem gemessenen Volumen enthaltene Menge eines bekannten und allgemein verbreiteten Stoffes (Wasser) als die einzige brauchbare Methode zur Feststellung einer Masseneinheit erscheinen.

Für die Elektrostatik ergiebt sich als Einheit der Elektricitätsmenge nach absolutem Maasse entsprechend den obigen Bestimmungen die folgende Definition:

Die elektrostatische Einheit ist diejenige Elektricitätsmenge, welche, wenn sie auf eine ihr gleiche Elektricitätsmenge von derselben Art, die fest mit der Masse eines Milligrammes verbunden ist, eine Secunde lang aus der Entfernung eines Millimeters einwirkt, jener ponderablen Masse eines Milligrammes eine Geschwindigkeit von einem Millimeter ertheilt.

Für die in der Elektrodynamik vorkommenden Grössenarten ergeben sich nach den Principien der absoluten Maassbestimmung die folgenden [2] Definitionen:

1. Die Einheit für die Stromintensitäten.

Die Einheit für die Stromintensitäten ist die Intensität desjenigen Stromes, welcher, wenn er eine Ebene von der Grösse der Flächeneinheit (Quadratmillimeter) umfliesst, nach den elektromagnetischen Gesetzen dieselben Wirkungen in die Ferne

---

1) Vgl. *Zöllner* »Wissenschaftliche Abhandlungen« Bd. II. Thl. 1. S. 761, und Astronomische Nachrichten Bd. 87. Nr. 2082—2086. Januar 1876.

2) »Resultate aus den Beobachtungen des magnetischen Vereins im Jahre 1840« von *Gauss* und *W. Weber* (S. 86), und Elektrodynamische Maassbestimmungen von *W. Weber* in den Abhandlungen der Königl. Sächs. Ges. d. W. Bd. I. S. 219. (1852.)

ausübt, wie ein Magnetstab, welcher die oben definirte Einheit des Magnetismus enthält.

2. Die Einheit für die elektromotorischen Kräfte.

Die Einheit für die elektromotorischen Kräfte ist diejenige elektromotorische Kraft, welche von der oben definirten Einheit des Erdmagnetismus auf eine geschlossene Kette ausgeübt wird, wenn letztere so gedreht wird, dass die von ihrer Projection auf eine gegen die Richtung des Erdmagnetismus senkrechte Ebene begrenzte Fläche während der Zeiteinheit (Secunde) um die Flächeneinheit (Quadratmillimeter) zu- oder abnimmt.

3. Die Einheit des Widerstandes.

Die Einheit für den Widerstand ist der Widerstand einer solchen geschlossenen Kette, in welcher durch die oben definirte Einheit der elektromotorischen Kraft die vorher definirte Einheit der Stromintensität hervorgebracht wird.

Bezeichnet man die oben definirte Einheit für die Stromintensitäten mit $I$ und irgend eine hiernach gemessene Stromintensität mit $iI$, worin $i$ eine unbenannte Zahl bezeichnet, und bezeichnet man ferner die oben definirte Einheit der elektromotorischen Kräfte mit $E$ und irgend eine nach derselben gemessene elektromotorische Kraft mit $eE$, worin $e$ eine unbenannte Zahl bezeichnet; so wird $wW$ der Widerstand einer Kette sein, auf welche die elektromotorische Kraft $eE$ wirkt und darin einen Strom von der Intensität $iI$ hervorbringt, wenn $W$ die oben definirte Widerstands-Einheit bezeichnet und $w = \frac{e}{i}$ eine reine Zahl ist. Der Widerstand dieser Kette ist also der Widerstands-Einheit gleich, wenn $e = i$ gefunden wird. Hieraus ergiebt sich, dass ein Leiter, welcher die vorher definirte Widerstands-Einheit besitzt, wirklich dargestellt werden kann.

Die praktische Herstellung eines solchen Leiters, dessen Widerstand als ein Vielfaches der definirten absoluten Einheit durch scharfe Messungen der dazu erforderlichen Grössen von Zeit und Raum bestimmt werden kann, ist der wesentliche Zweck der vorliegenden Arbeit. Das gemeinsame Interesse für die Elektrodynamik, welches uns zu dieser Arbeit verband, datirt aus dem Jahre 1871, in welchem die allgemeinere Be-

deutung des elektrodynamischen Grundgesetzes auch für die Wechselwirkung anderer Körper eine grössere Aufmerksamkeit erweckte[1]. Ebenso haben im Verlaufe des verflossenen Decenniums die vom sogenannten Principe der Erhaltung der Kraft aus gegen das elektrodynamische Grundgesetz erhobenen Einwände die Veranlassung zu einer eingehenden Prüfung des Gesetzes gegeben, bei welcher sich die Nothwendigkeit einer strengeren Definition des erwähnten Principes ergab. Aus dieser Definition konnte dann unter Voraussetzung des elektrostatischen Grundgesetzes das elektrodynamische Grundgesetz der Wechselwirkung deducirt werden[2]. Hierdurch musste die Bedeutung des ursprünglich im Gebiete der Elektrodynamik gefundenen und angewandten Gesetzes für das gesammte Gebiet der Physik eine umfassendere werden, und gerade diese Erwägung, sowie die mannigfachen, sich hieran anknüpfenden, Fragen lieferten den Stoff zu einem mündlichen und schriftlichen Ideen-Austausch, welcher uns die praktische Ausführung absoluter Widerstandsmessungen nach einer bereits vor 30 Jahren vorgeschlagenen[3], jedoch wegen Mangel an genügenden Hülfsmitteln und Räumlichkeiten bis jetzt nicht in grösserem Maassstabe zur Anwendung gekommenen, Methode wünschenswerth erscheinen liess. In der unten citirten Abhandlung sind im Ganzen vier verschiedene Methoden vorgeschlagen worden, welche von *F. Kohlrausch* in seiner Abhandlung über die »Zurückführung der *Siemens*'schen galvanischen Wiederstandseinheit auf absolutes Maass«[4]) übersichtlich zusammengestellt und charakterisirt worden sind.

1) Vgl. »Über die Natur der Cometen« (1872. Engelmann) S. 334. Anwendung des *Weber*'schen Gesetzes auf die Bewegung der Himmelskörper. — *Tisserand, Note sur le mouvement des planètes autour du Soleil d'après la loi électrodynamique de Weber. Comptes rendus. Sept.* 30. 1872. — Über die universelle Bedeutung des *Weber*'schen Gesetzes. Wissenschaftliche Abhandlungen von *F. Zöllner*. Bd. II. Thl. 1. S. 7. — *De motu perturbationibusque planetarum secundum legem electrodynamicam Weberianam solem ambientium. Scripsit C. Seegers. Gottingae* 1864.

2) Abhandlungen der K. Sächs. Ges. d. Wiss. 1878, u. *Pogg*. Ann. 1878. Heft 7. »Über die Energie der Wechselwirkung« von *W. Weber*.

3) Vgl. die oben citirte Arbeit *W. Weber*'s aus dem Jahre 1852. S. 220.

4) *Poggendorff*'s Annalen, Ergänzungsband VI. St. 1. — Der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen im Auszuge mitgetheilt am 5. Nov. 1870.

Die erste Methode benutzt die durch den Erdmagnetismus in einem bewegten Leiter von bekannten Dimensionen (Erd-Inductor) inducirte elektromotorische Kraft und findet die Stromstärke durch die Ausschläge einer kurzen Magnetnadel innerhalb eines Multiplicators von ebenfalls bekannten Dimensionen. Diese Methode erfordert nur die Kenntniss der Schwingungsdauer der Nadel, nicht der Intensität des Erdmagnetismus, da dieser die Stärke der Induction und die Schwingungsdauer der Nadel in gleichem Maasse beeinflusst und hierdurch seine Änderungen auf das Resultat der Messung selber aufhebt. Nothwendig ist jedoch eine hinreichende Kürze der Nadel im Verhältniss zu den Dimensionen des Multiplicators, um praktisch die von diesem Verhältniss abhängenden Glieder höherer Ordnung vernachlässigen zu können. Entweder müssen also die Beobachtungen an einer kleinen Nadel angestellt werden, oder der Multiplicator muss in sehr bedeutenden Dimensionen ausgeführt werden. Letzteres ist bei der von uns angewandten Methode der Fall, wie dies die spätere Beschreibung zeigen wird.

Die zweite Methode[1]) ist eine Modification der ersten, mit Rücksicht auf die Schwierigkeiten und bedeutenden Mittel, welche zur Realisirung der ersten Methode erforderlich sind. Als Galvanometer dient ein die Nadel eng umschliessender Multiplicator mit astatischer Nadel, deren Dimensionen den Anforderungen der grössten Empfindlichkeit und sonstigen Rücksichten beliebig angepasst sein können. Die Wirkung der Stromeinheit im Multiplicator auf die Nadel wird nämlich nicht, wie bei der ersten Methode, aus den Dimensionen berechnet, sondern findet sich empirisch nach den Gesetzen der Magneto-Induction durch die sogenannte Dämpfung, welche die Schwingungen der Nadel durch den geschlossenen Drahtkreis des Multiplicators erleiden. Ferner muss ausser der Schwingungsdauer noch das Trägheitsmoment der Nadel und die erdmagnetische Kraftcomponente, welche auf den Inductor wirkt, nach absolutem Maasse bekannt sein. Diese Methode ist die von *F. Kohlrausch* in seiner oben erwähnten Abhandlung angewandte.

---

1) *Wilhelm Weber*, Abhandl. der K. Ges. d. Wiss. zu Göttingen 1862. Bd. 10. S. 20. Auch separat gedruckt unter dem Titel: Zur Galvanometrie. Göttingen 1862.

Die dritte Methode[1]) zeichnet sich durch eine grosse Einfachheit der zu ihrer Anwendung erforderlichen Instrumente aus. Es ist nämlich nur ein Multiplicator erforderlich, in dessen Mitte eine Magnetnadel schwingt. Ist die Schwingungsdauer dieser Nadel, sowie das Verhältniss des Nadelmagnetismus zum Erdmagnetismus und die Vertheilung des ersteren in der Nadel ermittelt (durch Ablenkungsbeobachtungen an einer Boussole), so lässt sich hieraus und aus den Dimensionen des Multiplicators die durch die bewegte Nadel in dem letzteren erzeugte elektromotorische Kraft berechnen. Die Stärke des hierdurch inducirten Stromes und somit der Widerstand des Multiplicatordrahtes wird aus der beobachteten Dämpfung erhalten.

Die vierte Methode[2]) erfordert einen durch rythmische Umwendungen bewegten oder in rasche gleichförmige Rotation versetzten Multiplicator von bekannten Dimensionen und die Beobachtung der Ablenkung einer kleinen, in der Mitte des bewegten Multiplicators aufgehängten Magnetnadel. Diese Methode kann in zwei verschiedenen Modificationen zur Anwendung kommen, je nachdem der Multiplicator um eine horizontale oder verticale Axe bewegt wird. Im ersteren Falle muss das Verhältniss der beiden erdmagnetischen Componenten bekannt sein, da die horizontale Componente auf die Nadel wirkt, während die verticale inducirt.

Die Rücksicht auf die hohe praktische und wissenschaftliche Bedeutung der Herstellung einer in absolutem Maasse bestimmbaren Widerstandsgrösse hatte die *British Association* im Jahre 1862 veranlasst, ein Committee zu ernennen, um die zweckmässigsten Anordnungen zur Lösung der fraglichen Aufgabe zu berathen und der Association definitive Vorschläge zur praktischen Ausführung zu unterbreiten. Das Committee entschied sich unter Leitung von Sir *William Thomson* zur Anwenwendung der oben beschriebenen vierten Methode, und zwar in derjenigen Modification, bei welcher dem Multiplicator durch ein zweckmässig eingerichtetes Räderwerk eine möglichst gleichförmige, continuirliche Rotation ertheilt wird. Dieser Vorschlag des Committee's wurde acceptirt und mit bedeutendem Kosten-

---

1) *Wilhelm Weber* in der oben citirten Abhandlung S. 232.

2) Vgl. *W. Weber* »Zur Galvanometrie« S. 12.

aufwande zur Ausführung gebracht. Man findet die ausführliche Beschreibung der Instrumente in dem *Report of the Meetings of the British Association* Vol. 33 vom Jahre 1863 (London 1874) S. 164—168.

Wenn bei dem beschriebenen Apparate die Rotationsaxe des Multiplicators nicht senkrecht sondern horizontal in die Richtung der durch Induction abgelenkten Nadel gefallen wäre, was sich ohne wesentliche Steigerung der technischen Schwierigkeiten leicht hätte bewerkstelligen lassen, so wäre die störende Induction der Nadel auf den rotirenden Multiplicator fortgefallen und nur die Induction der horizontalen Componente des Erdmagnetismus auf die Drahtwindungen des rotirenden Multiplicators übrig geblieben. Die in diesem Falle erforderliche Kenntniss der magnetischen Inclination an dem betreffenden Orte würde sich mit Hülfe des vor 30 Jahren von *W. Weber* beschriebenen und praktisch angewandten »Inductions-Inclinatorium« (vgl. *Poggendorff*'s Annalen Bd. 43. S. 493) mit einer Genauigkeit von derselben Ordnung wie derjenigen der absoluten Widerstandsmessung haben bestimmen lassen.

Bei der vom Committee [1]) gebilligten und angewandten senkrechten Stellung der Rotationsaxe findet nun aber gleichzeitig eine Induction durch die Magnetnadel und die horizontale Componente des Erdmagnetismus statt, so dass der erstere Theil dieser Doppel-Induction eliminirt werden muss. Mit Rücksicht auf die hieraus sich ergebenden Schwierigkeiten und Fehlerquellen ist bereits die ganze von der *British Association* zur Anwendung gebrachte Methode von *F. Kohlrausch* a. a. O. einer Kritik [2]) unterworfen worden, welcher wir uns im Allgemeinen vollkommen anschliessen.

*F. Kohlrausch* bemerkt bezüglich der vorher erwähnten Eli-

---

1) Über die Mitglieder des Committee's berichtet der *Report* S. 111 wörtlich:

»*The Committee consists of — Professor Wheatstone, Professor Williamson, Mr. C. F. Varley, Professor Thomson, Mr. Balfour Stewart, Mr. C. W. Siemens, Dr. A. Matthiessen, Professor Maxwell, Professor Miller, Dr. Joule, Mr. Fleeming Jenkin, Dr. Esselbach, Sir C. Bright*«.

2) *Poggendorff*'s Annalen. Ergänzungsband VI. St. 1. Auszugsweise in den Berichten der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen vom 5. Nov. 1870.

mination der Induction durch den Nadelmagnetismus S. 5 wörtlich Folgendes:

»Wollte man in dem vom Committee angewandten Multiplicator von 300 mm Durchmesser einen für galvanometrische Messungen gewöhnlich gebrauchten kleinen Magnet benutzen, so würde seine eigene Induction die des Erdmagnetismus weit übertreffen. Sollte die erstere als kleine Correction behandelt werden, so war deswegen eine ungewöhnlich schwache Magnetnadel vorgeschrieben. Darin ist in der That das Committee sehr weit gegangen; so weit, dass ohne Zweifel noch niemals eine so schwache Magnetnadel zu einer Messung verwendet worden ist. Der Magnet bestand nämlich aus einer Stahlkugel von 8 mm Durchmesser, also aus einer für den Magnetismus möglichst ungünstig gestalteten Masse von etwa 2 gr. Diese kleine Kugel aber war nun noch absichtlich schwach magnetisirt und hatte einen Magnetismus nicht grösser als der, welchen man einer Nähnadel von der Masse $\frac{1}{40}$ gr mittheilen kann, wovon ich (*Kohlrausch*) mich durch den Versuch überzeugt habe. Die Stahlkugel lenkte nämlich (Report 1863, S. 172) aus 156,6 mm Entfernung eine Boussolen-Nadel um 27′ = Arc. tang. 0,0078 ab. Daraus folgt, die Horizontal-Intensität = 1,76 angenommen, das magnetische Moment:

$$M = \tfrac{1}{2} \cdot 1{,}76 \cdot 156{,}6^3 \cdot 0{,}0078 = 26000.$$

Da nun 1 mgr Stahl im Maximum etwa 1000 Einheiten dauernden Magnetismus annimmt[1], so kann man den obigen Magnetismus einem dünnen Stäbchen von 26 mgr mittheilen.

Zur Illustration der Zahlen kann ferner dienen, dass ein gestrecktes Eisenstäbchen von 10 g, in der Inclinationsrichtung gehalten, den obigen Nadelmagnetismus durch Induction des Erdmagnetismus annehmen würde. Ein einfacher Coconfaden von 2 m Länge war als Aufhängefaden der Stahlkugel nothwendig, um die Torsionskraft auf diejenige kleine Grösse zu reduciren, welche durch die Kleinheit der magnetischen Directionskraft und die elastische Nachwirkung geboten war. Nun denke man sich mit der allerfeinsten Nähnadel als Magnetnadel, an einem etwa $\frac{1}{4}$ m langen Verbindungsstück einen

1) Vgl. auch *Schneebeli*, Programm des Züricher Polytechnikums 1871—72.

Spiegel von 30 mm Durchmesser verbunden, der also für Luftströmungen, welche auch in einem gut geschlossenen Kasten nicht ganz ausbleiben, eine Fläche von etwa 14 qcm (der Zeichnung entsprechend) darbot, die ganze Masse von einem Trägheitsmoment, dass ihre Schwingungsdauer (Rep. 1863, S. 173) 10 Secunden betrug, während diejenige der Nähnadel etwa $\frac{2}{3}$ Sec. betragen würde, und man hat im Wesentlichen das Magnetometer, auf welches die schwachen Ströme im Multiplicator wirkten, und bei welchem ein Einstellungsfehler von 2 Bogenminuten einen Fehler von 1 Procent im Resultate bewirkte. Dazu kommt noch, dass in unmittelbarer Umgebung dieses Magnetometers der grosse Multiplicator mit einer Geschwindigkeit bis zu 4 Umdrehungen in der Secunde rotirte.

Es erscheint als ein Mangel in den sonst so ausführlichen Berichten, dass, soweit mir bekannt, nirgends eine Beobachtungsreihe mit allen Einzelheiten wiedergegeben wird, damit man einen Anhaltspunct für oder gegen das genannte Bedenken gewönne. Erwähnt wird (S. 174 a. a. O.), dass einzelne Theile der länger dauernden Versuchsreihen, wegen Nicht-Übereinstimmung mit anderen, von der Rechnung ausgeschieden worden seien; also scheinen bedeutende unaufgeklärte Unregelmässigkeiten vorgekommen zu sein. In der messenden Physik aber ist es immer bedenklich, anzunehmen, dass grössere Versuchsfehler nur zufälligen Ursprungs seien und durch eine hinreichende Anzahl von Beobachtungen eliminirt werden.

In der That, wenn wir nun die Schluss-Resultate ansehen, welche zur Veröffentlichung gelangt sind [1]), so scheinen diese ein leises Bedenken zu rechtfertigen. Diese Mittelzahlen weichen von einander noch bis zu 1,4 Procent ab. Man findet ferner, dass die langsamen Rotationen im Mittel ein um etwa 0,5 Procent anderes Resultat ergeben, als die raschen. In gleicher Weise erlaubt die Mittheilung einiger Beobachtungen von einem und demselben Tage (*Report* 1863. S. 175) ein Urtheil. Daselbst kommen vier Resultate vor, welche bis zu

1) *Report of the British Association* 1864. S. 350. — *Poggendorff*'s Annalen Bd. 126. S. 386.

2,3 Procent von einander abweichen. Und diese Zahlen beruhen jede auf etwa viertelstündigen Beobachtungsreihen mit je etwa 100 Scalen-Ablesungen, aus denen eventuell die am wenigsten stimmenden Zahlen bereits ausgeschieden worden sind. An so grossen Differenzen wird ein unbefangener Leser immer Anstand nehmen.

Ganz unverständlich aber sind mir die Abweichungen bis zu 8,5 Procent, welche unter Umständen eintraten, je nachdem der Inductor nach links oder rechts rotirte. Nach einer Andeutung des Hrn. *Jenkin* [1]) soll dieser Umstand darin seine Erklärung finden, dass »der Faden, an dem der Magnet suspendirt war, in der einen Richtung einen geringen Einfluss ausübte«. Man ist versucht, auf eine einseitige, dauernde Torsion des Fadens zu schliessen, wodurch die beiderseitigen Ausschläge allerdings verschieden ausfallen. Aber um Differenzen zu erklären, wie sie hier vorkommen, musste die Torsion so gross sein, dass die magnetische Axe der Stahlkugel eine um viele Grade vom magnetischen Meridian abweichende Stellung gehabt hätte. Ein solches Versehen bei der Aufhängung darf man wohl kaum annehmen. Sollte es aber vorgekommen sein, so scheinen mir die betreffenden Beobachtungsreihen verwerflich; denn wenn man schon in der gewöhnlichen Praxis eine so grosse Unsymmetrie ungern zulässt, so würde sie gefährlich erscheinen bei der Kugelgestalt und dem schwachen Magnetismus des kleinen Magnets. Dass nämlich dessen magnetische Axe, auf deren Constanz schliesslich Alles ankommt, wirklich bis auf Bogenminuten constant sei, wenn sie nicht in der Richtung der magnetischen Directionskraft liegt, würde eine gewagte Behauptung sein.

Minder bedenklich wäre wohl die andere Interpretation des citirten Ausspruchs, dass eine Änderung der Torsionsruhelage des Cocon durch elastische Nachwirkung im Spiel wäre, etwa, indem der Faden noch nicht lange aufgehangen war. Aber auch dieses möchte ich nicht gern annehmen, denn man hätte in diesem Falle die Beobachtungen aufschieben oder doch mindestens die Nachwirkung durch besondere Beobachtungen eliminiren sollen.

Kurz, man wird die Annahme kaum vermeiden können,

---

1) *Poggendorff*'s Annalen Bd. 126, S. 387.

dass der schwache Magnetismus der Nadel erhebliche Unzuträglichkeiten im Gefolge gehabt habe, und die Regeln der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf solche Beobachtungen anzuwenden halte ich, ohne den ausdrücklichen Nachweis von der Abwesenheit constanter Fehlerquellen, nicht für gerechtfertigt. Immerhin aber könnte der wahrscheinliche Fehler von 0,1 Procent, der für das Endresultat berechnet wird, sich nur auf die Scalenablesungen beziehen; ihn auf die ganze Messung zu übertragen würde voraussetzen, dass andere Fehlerquellen nicht vorhanden gewesen sind. Auch die, wenn auch sehr beachtungswerthe Übereinstimmung der beiden im Jahre 1863 und 1864 gefundenen Zahlen bis auf 0,16 Procent kann nicht als unbedingt maassgebend betrachtet werden.

Wenn wir nun nach den anderen Fehlerquellen fragen, so erhebt Hr. *W. Siemens* zunächst einen Einwand gegen die Berechnung des mittleren Windungshalbmessers aus der Länge und der Windungszahl des Drahtes. Dass ein solches Verfahren bei d i c k e m Draht unbedenklich ist, glaube ich aus eigenen sorgfältigen Versuchen schliessen zu dürfen. Der Querschnitt der hier vorliegenden Drahtsorte beträgt freilich, aus dem Gewicht und Gesammtwiderstand des Drahtes sowie aus den Dimensionen des Multiplicators zu schliessen, nur etwa 1 qmm, wobei man den obigen Einwand nicht ungerechtfertigt finden mag. Gross dürfte immerhin der daraus entspringende Fehler nicht sein.«

Das Vorstehende enthält eine wörtliche Reproduction der Kritik, welche *F. Kohlrausch* vor 10 Jahren a. a. O. über die mit sehr bedeutendem Kostenaufwande von dem Committee der *British Association* ausgeführte Arbeit zur Herstellung einer galvanischen Widerstandseinheit veröffentlicht hat. Hierbei bemerkt *Kohlrausch* mit Recht, dass »auch nach der Auffassung des Committee (*Report* 1864. S. 346) die *British Association*-Einheit factisch n i c h t ein a b s o l u t e s, sondern nur ein G r u n d m a a s s sei, wobei es für den Gebrauch ganz gleichgültig ist, ob die Annäherung an das a b s o l u t e Maass bis auf 2 oder bis auf 3 Procent geht. Soll ferner nach den Angaben des *Report* von 1864 S. 348 auch die Reproducirbarkeit der *British Association*-Einheit nicht auf eine W i e d e r h o l u n g der absoluten Messung gegründet werden, sondern auf das Leitungsvermögen von Metallen, worunter das von *W. Siemens* zu

diesem Zwecke angewandte Quecksilber selbstverständlich obenan steht, so liegt kein Grund vor, aus welchem nicht runde und bequeme Dimensionen der Quecksilbersäule gewählt werden sollten.«

»Die Frage, welche Widerstandseinheit zur allgemeinen Einführung geeignet sei«, sagt *Kohlrausch* a. a. O., »gehört kaum in eine wissenschaftliche Untersuchung. Der Physik selbst kann ohne Zweifel die Concurrenz zwischen der *Siemens*'schen und der *British Association*-Einheit nur erwünscht sein, denn durch sie ist das beste Mittel gegeben, die Unveränderlichkeit beider zu prüfen, welche für wissenschaftliche Anwendungen allein in Betracht kommt. In der Praxis dürfte einmal die Stellung des Hrn. *Werner Siemens* zur Telegraphie seiner Einheit einen beträchtlichen Vorsprung gegeben haben; nicht minder wichtig ist der Umstand, dass die mit Umsicht eingerichteten und soviel mir bekannt auch gut eingetheilten *Siemens*'schen Scalen in grossem Maassstabe verbreitet worden sind. Auch kann man kaum leugnen, dass für den Praktiker die Definition aus dem Quecksilber eine verständliche ist, während die andere (von der *British Association* definirte) fürs erste nur Wenigen klar werden wird.«

Das Vorstehende wird hinreichend sein, um die Aufgabe, welche sich vor zwanzig Jahren das Committee der *British Association* bei seinen Arbeiten gestellt hatte, als ein weder im Princip noch seiner praktischen Ausführung nach mit der erreichbaren Genauigkeit und Schärfe gelöstes Problem erscheinen zu lassen.

Die von *Kohlrausch* mit so grosser Umsicht a. a. O. angewandte zweite der oben (S. 82) erwähnten Methoden setzte, wie bemerkt, eine genaue Kenntniss der erdmagnetischen Constante nach absolutem Maasse voraus und kann daher nur an solchen Orten ausgeführt werden, an welchen die hierzu erforderlichen Instrumente und Beobachtungen in genügender Vollkommenheit vorhanden sind. Dass in dieser Beziehung das magnetische Observatorium zu Göttingen, in welchem *Kohlrausch* seine Beobachtungen anstellte, allen Anforderungen entsprach, bedarf nicht einer besonderen Erwähnung.

Als Resultate seiner verschiedenen Messungen theilt *Kohlrausch* am Schlusse seiner Arbeit Folgendes mit:

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| I. | 4,1029 *Siemens* | $= 3{,}9812 \frac{\text{Erdquadrant}}{\text{Secunde}}$ | ; also | 1 *Siem.* | | | $= 0{,}9703$ |
| II. | 4,1049 » | $= 3{,}9903$ | » | » | » | | $= 0{,}9721$ |
| III. | 4,0965 » | $= 3{,}9849$ | » | » | » | | $= 0{,}9728$ |

Hieraus ergiebt sich im Mittel:

$$1 \textit{ Siemens}\text{-Quecksilber-Einheit} = 0{,}9717 \frac{\text{Erdquadrant}}{\text{Secunde}}.$$

Zu diesen Resultaten bemerkt *Kohlrausch* wörtlich Folgendes:

»Was das Verhältniss der *British Association*-Einheit zur *Siemens*'schen betrifft, so darf als zuverlässigster bis jetzt veröffentlichter Werth wohl derjenige angesehen werden, welchen Hr. *Dehms* aus einer von Hrn. *Jenkin* angestellten Vergleichung ableitet[1]:

1 *British Association*-Einheit = 1,0493 *Siemens*-Einheit.

Hr. *Dehms* und Hr. *Hermann Siemens* hatten die Güte, auf meine Bitte eine neue Vergleichung anzustellen, wobei zunächst eine im *Siemens*'schen Laboratorium vorhandene *British Association*-Einheit (No. 61) sich = 1,0473 erwies. Da diese Vergleichung wegen Beschädigung der Einheit in der Luft vorgenommen werden musste, wird ihr keine entscheidende Bedeutung beigelegt. Ferner kamen die *British Association*-Einheiten der Herren *Brix* (No. 21) und *Weber* (No. 51) zur Vergleichung und ergaben vollständig übereinstimmend mit der obigen Zahl den Werth 1,0493. Vergleicht man diese Übereinstimmung mit den früheren enormen Differenzen in den Angaben über Widerstandseinheiten, so liegt darin ein sehr erfreulicher Beweis von dem Fortschritt auf diesem Gebiete der Messung[2].

Unter Benutzung der Zahl $1{,}0493 \frac{\text{Erdquadrant}}{\text{Secunde}}$ findet sich schliesslich:

$$1 \textit{ British Association}\text{-Einheit} = 1{,}0496 \frac{\text{Erdquadrant}}{\text{Secunde}},$$

d. h. diese Einheit wäre danach um nahe 2 Procent grösser, als beabsichtigt wurde.«

Bei der folgenden Arbeit kam es nun, wie bemerkt, zu-

1) *Report of the British Association* 1864. S. 349, und *Poggendorff*'s Annalen Bd. 136. S. 404.

2) Vgl. *Poggendorff*'s Annalen 1873. Heft 1.

nächst darauf an, einen Normalleitungsdraht von solcher Beschaffenheit und Anordnung herzustellen, dass derselbe sowohl bezüglich seines Widerstandes als seiner räumlichen Verhältnisse jederzeit durch directe Messungen nach absolutem Maasse controlirt werden kann. Die Lösung dieser Aufgabe ist der wesentliche Inhalt der vorliegenden Arbeit, wogegen die Vergleichung dieses Normalleiters mit andern Widerstands-Einheiten einer späteren Arbeit vorbehalten bleibt, indem die hierzu erforderlichen elektrodynamischen Comparatoren gegenwärtig noch in Arbeit befindlich, hoffentlich aber in kurzer Zeit vollendet sind.

In Betreff der Localität für die Aufstellung der Apparate waren im Wesentlichen zwei Gesichtspuncte maassgebend. Erstens musste hinreichender Raum für den genügenden Abstand des Inductors vom Multiplicator vorhanden sein und zweitens durften sich nicht Magnete in dem Raume befinden, welche ihren Einfluss auf die Induction und die Einstellung der Magnetnadel im Multiplicator geltend machen konnten. Die Berücksichtigung des ersten Umstandes verhinderte die Benutzung des kleinen, im Garten der hiesigen Universitäts-Sternwarte für astrophysikalische Beobachtungen erbauten Observatoriums. Die Berücksichtigung des zweiten Gesichtspunctes liess auch die für erdmagnetische Beobachtungen im Garten des hiesigen physikalischen Institutes befindliche »magnetische Warte« als ungeeignet erscheinen, wohingegen die Räumlichkeiten in der sogenannten »alten Sternwarte« auf der Pleissenburg, welche unter *Möbius* bereits früher als magnetisches Observatorium gedient hatten, alle diejenigen Erfordernisse vereinigten, die uns zu einer definitiven Aufstellung der Apparate wünschenswerth erschienen. Da diese Räumlichkeiten bereits anderweitig für physikalische und astronomische Zwecke reservirt sind, so ist hierdurch den Instrumenten auch für die Zukunft eine hinreichend stabile, durch keine Dislocation gestörte, Aufstellung gesichert. Zugleich gestattet die Beschaffenheit dieser Räume die Ausführung von später projectirten Experimental-Untersuchungen über einige physikalische Constanten, wie z. B. die Bestimmung der Lichtgeschwindigkeit nach *Foucault* und *Fizeau* und anderen physikalischen Methoden, sowie die Bestimmung der mittleren Dichtigkeit der Erde nach den Methoden von *Cavendish* und *Reich*. Da sich ausserdem in

den erwähnten Localitäten auf der Pleissenburg ein Dreieckspunct der Europäischen Gradmessung befindet, so vereinigen sich alle Umstände, um die bezeichneten Räumlichkeiten zur praktischen Erforschung und Feststellung physikalischer Fundamentalbestimmungen nach absolutem Maasse als zweckmässig gewählte erscheinen zu lassen.

Bei der Construction und Herstellung der Apparate waren besonders zwei Gesichtspuncte zu berücksichtigen. Erstens mussten die Dimensionen des Multiplicators und Inductors von solcher Grösse gewählt werden, dass die technische Herstellung und Ausmessung der einzelnen Theile (Länge der Magnetnadeln, Durchmesser und Flächengrösse der von jeder Schicht der Drahtwindungen umschlossenen Kreisfläche) mit grosser Schärfe bewirkt werden konnten, so dass die unvermeidlichen Beobachtungsfehler das Gesammtresultat der Messung nur in Gliedern höherer Ordnung beeinflussen konnten. Zweitens mussten Einrichtungen getroffen werden, welche jederzeit eine Wiederholung und Controle der zur Bestimmung der Constanten des Apparates erforderlichen Operationen gestatteten.

Zu diesem Zwecke wurden besondere Vorrichtungen zum Abwickeln und Wiederaufwinden der gesammten Drahtmasse hergestellt, welche in Folgendem ausführlich beschrieben werden sollen.

Wie bereits oben S. 81 bemerkt, ist das Princip und die Construction der zu beschreibenden Instrumente bereits vor 30 Jahren in der mehrfach erwähnten Abhandlung *W. Weber*'s: »Elektrodynamische Maassbestimmungen insbesondere Widerstandsmessungen« (Abhandl. d. Königl. Sächs. Ges. d. W. Bd. I. 1846) ausführlich begründet und auch versuchsweise in kleinem Maassstabe praktisch zur Ausführung gekommen. Dass diese Methode ihrer Wichtigkeit entsprechend nicht bereits damals in einer solchen Grösse und Vollendung wie gegenwärtig verwirklicht und angewandt worden ist, hatte im Wesentlichen in dem Mangel genügender materieller und technischer Hülfsmittel seinen Grund.

## II.

### Beschreibung und Aufstellung der angewandten Instrumente.

Die Anfertigung der Instrumente wurde der Werkstätte astronomischer und physikalischer Instrumente von *A. Repsold & Söhne* in Hamburg übertragen und nach eingehender mündlicher Rücksprache mit Hrn. *J. Repsold*, dem gegenwärtigen Vertreter und Inhaber der Firma, im Herbste des Jahres 1876 nach sorgfältiger Prüfung der angefertigten Zeichnungen begonnen. Mit Rücksicht auf die Grösse der Dimensionen, in welchen Inductor und Multiplicator projectirt waren und in Anbetracht des bedeutenden Gewichtes der Kupferdrahtmasse von ca. 200 kg, welche bei Erzeugung der Inductionsstösse in rythmischen Intervallen bewegt werden musste, erschien es uns zweifelhaft, ob diese Umwendungen wie bei kleineren Inductoren bequem durch Menschenkraft bewirkt werden konnten. Hr. *Repsold* theilte unsere Ansicht und entschloss sich zur Construction einer durch Auslösung von Gewichten beweglichen mechanischen Vorrichtung, durch welche mittelst eines Seiles ohne Ende in zweckmässiger Weise die erwähnten Umwendungen bewerkstelligt werden sollten. Bei der praktischen Anwendung dieser von Hrn. *J. Repsold* sinnreich construirten Vorrichtung erwiesen sich jedoch die Erschütterungen des Bodens bei jedem Inductionsstosse so bedeutend, dass bis auf Weiteres dieser Apparat ausser Thätigkeit gesetzt und die Umwendungen des Inductors durch Menschenkraft bewirkt wurden. Es konnte dies um so leichter geschehen, als sich die ursprünglich, wegen des grossen Trägheitsmomentes der zu bewegenden Masse, gehegten Bedenken in der Praxis bei Weitem weniger erheblich heraustellten.

Die Vollendung sämmtlicher Instrumente fand Ende April des Jahres 1877 statt und die Versendung von Hamburg nach Leipzig Anfang Mai desselben Jahres. Gleichzeitig war auf unsere Veranlassung nach vorangegangener Rücksprache mit Hrn. *Werner Siemens* eine für den beabsichtigten Zweck mit besonderer Sorgfalt angefertigte, mit Baumwolle besponnene Kupferdrahtmasse von 414,95 kg Gewicht und 3,33 mm Dicke in der Fabrik von *Siemens & Halske* angefertigt und bereits im October 1876 nach Leipzig gesandt worden. Am 13. Mai 1877

war die Aufstellung der Instrumente nach unserer Angabe und unter persönlicher Leitung des Hrn. *J. Repsold*, mit umsichtiger und thatkräftiger Unterstützung des Hrn. Mechanikus *Carl Krille* hierselbst (Schulstrasse 4) so weit vollendet, dass einige vorläufige Beobachtungen angestellt werden konnten. Die definitiven Beobachtungen, welche im dritten Theile der vorliegenden Arbeit zur Berechnung benutzt worden sind, wurden durch freundliche Betheiligung der Herren Professoren *Riecke* aus Göttingen, *Heinrich Weber* aus Braunschweig, des Hrn. Dr. *Weinek*, ersten Assistenten an hiesiger Sternwarte, und in einzelnen Fällen von uns selber ausgeführt. Hr. Mechanikus *Krille* hatte die Güte, die Drehungen des Inductors auf Commando eines der betheiligten Beobachter zu übernehmen.

Nach diesen allgemeinen Bemerkungen mag nun die Beschreibung der wesentlichen Instrumente und ihrer Theile folgen.

Das Material, aus welchem die zum Aufwinden des Drahtes bestimmten Rollen hergestellt sind, ist gut getrocknetes und mit Öl getränktes Mahagoniholz. Dasselbe ist zur Vermeidung irgendwelcher Veränderungen durch das sogenannte Verziehen des Holzes aus einzelnen Stücken sorgfältig mit Leim und Messingschrauben zusammengefügt. Die Inductor- und Multiplicator-Rolle sind in allen Theilen in ganz gleicher Grösse ausgeführt, um eventuell, durch Vertauschung des Aufhängepunctes der Nadel, zu Repetitions- und Control-Beobachtungen benutzt werden zu können.

Fig. 1, Taf. I stellt die eine dieser beiden Rollen auf der Axe der Winde dar, welche mit Hülfe einer Doppelkurbel von zwei Arbeitern gedreht wurde, um den Draht von der in einer über 20 m tieferen Etage des Pleissenburg-Thurmes befindlichen und durch eine kreisförmige Öffnung mit dem Beobachtungsraum unseres Observatoriums communicirende Vorrichtung Fig. 2 auf die Inductor- und Multiplicatorrolle zu wickeln. Um dem Drahte die erforderliche Spannung zu ertheilen, war eine Bremsvorrichtung mit dem Gewichte $p$ an einem Hebelarme $h$ angebracht. Der auf dieser Vorrichtung befindliche hölzerne Cylinder war in der Werkstätte von *Siemens & Halske* benutzt worden, um den Draht aufzuwickeln und zu versenden. Es ist einleuchtend, dass bei einer Wiederholung der Messungen der Constanten des Apparates der Draht mit Hülfe derselben

Vorrichtungen wieder abgewickelt werden kann, wodurch im Wesentlichen derjenigen Forderung entsprochen wird, welche wir oben bezüglich der Controlirbarkeit der Constanten eines Messapparates zu fundamentalen Maassbestimmungen ausgesprochen hatten.

Behufs der Aufwickelung des Drahtes wurden die für den Inductor und den Multiplicator bestimmten Holzcylinder nacheinander auf der erwähnten, mit Zahnräder-Triebwerk und doppelter Kurbel versehenen, Axe befestigt und provisorisch mit ihrem Holzgestell verbunden, welches über der erwähnten Öffnung des Fussbodens aufgestellt wurde. Die Zahl der Windungen wurde sowohl durch directe Zählung als durch ein von Hrn. *Repsold* mit der Axe in Verbindung gesetztes mechanisches Zählerwerk bestimmt. Wie später genauer mitgetheilt werden wird, befinden sich auf Inductor und Multiplicator je 12 Lagen von Draht, von denen eine jede aus 66 einzelnen Windungen besteht. Nach vollendeter Aufwickelung wurde jede der Rollen mit ihrer Axe in dem für dieselbe bestimmten Holzgestell fixirt, mit den für das obere und untere Axenlager bestimmten Theilen in Verbindung gesetzt und alsdann die beim Aufwickeln benutzte horizontale Axe durch Beseitigung der angeschraubten Holzbacken aus dem inneren Raum der beiden Rollen entfernt. Die eine dieser Rollen wurde als Multiplicator in der Ebene des magnetischen Meridians unverrückbar aufgestellt, während die andere senkrecht zum Meridian um ihre verticale Axe um 180° gedreht werden konnte. (Vgl. Grundriss Taf. II. Fig. 1.)

Fig. 3, Taf. I zeigt den Durchschnitt des Multiplicators mit der darin aufgehängten Magnetnadel, während Fig. 4 die Seitenansicht des Inductors mit der provisorischen Aufwinde-Vorrichtung darstellt. Die in beiden Apparaten an dem unteren Theile der Axe befindlichen Holzscheiben mit der darin angedeuteten Rinne waren ursprünglich zur Aufnahme des Seiles ohne Ende bestimmt, durch welches mit Hülfe des oben erwähnten mechanischen Apparates die Umwendung des Inductors bewerkstelligt werden sollte. Die Art und Weise, wie die Magnetnadel nebst Spiegeln an dem mit Torsionskreis versehenen Coconfaden befestigt worden ist, zeigt die schematische Zeichnung Fig. 5 in ein Viertel natürlicher Grösse. Der Verschluss des vom Multiplicator umschlossenen Raumes, in dem die Nadel hing, würde

durch zwei Holzdeckel bewirkt, in deren Mitte sich zwei durch Plangläser verdeckte Öffnungen für gleichzeitige Spiegelablesungen an zwei, zu beiden Seiten des Multiplicators aufgestellten, Ablesungsfernröhren befanden [1]. Diese beiden Deckel sind abgenommen und in der perspectivischen Zeichnung auf Taf. II. Fig. 2 an das Multiplicatorgestell gelehnt dargestellt. Es bedarf kaum der Erwähnung, dass hierbei alle Erfahrungen, welche bereits vor 40 Jahren gelegentlich der Beobachtungen des »magnetischen Vereins« gesammelt und beschrieben worden sind, auch im vorliegenden Falle in eingehender Weise sowohl bei der Construction der Instrumente als auch bei Anordnung der Beobachtungen berücksichtigt worden sind. Zur Temperaturbestimmung waren an der Basis des Multiplicators und Inductors zwei, in Fünftel-Grade Celsius getheilte, Thermometer in verticaler Stellung angebracht, deren Längsrichtung in die Axe fiel und deren Kugeln möglichst tief in der Holzwandung eingelassen waren. Da im Beobachtungsraum durch passend angebrachte Fenstervorhänge dafür Sorge getragen war, dass kein Theil der Instrumente von directem Sonnenlichte getroffen werden konnte, so wird man im Allgemeinen bei nicht allzu plötzlichen Temperaturschwankungen die Temperatur des Drahtes übereinstimmend mit den Angaben der beiden Thermometer voraussetzen dürfen.

Das Gesammtgewicht der von *Siemens & Halske* bezogenen Drahtmasse beträgt laut Rechnung 414,95 kg im Preise von 1487,75 ℳ, während sich die Kosten für die von *A. Repsold & Söhne* angefertigten Apparate laut Rechnung auf 5763 ℳ belaufen, welche Summe sich jedenfalls bedeutend reducirt haben würde, wenn der ursprünglich aus den oben S. 93 angeführten Gründen projectirte mechanische Umwendungs-Apparat des Inductors nicht zur Ausführung gekommen wäre.

---

1) Vergl. die auf Taf. II. Fig. 1 angedeutete Skizze des Grundrisses zur Erläuterung der Aufstellung der Apparate. Die auf Taf. I befindlichen Figuren 1—5 sind verjüngte Copien der uns von Hrn. *Repsold* eingesandten Originalzeichnungen, welche zur Anfertigung der Apparate von ihm hergestellt und benutzt worden sind. Die in Fig. 1 u. 4 Taf. I punctirten Linien bezeichnen die provisorisch zur Aufwickelung des Drahtes mit dem Gestell verbundenen Theile.

## III.

### Ein Normalleiter zu elektrodynamischen Messungen nebst Beobachtungen zur Bestimmung seines Widerstands nach absolutem Maasse.

Der Zweck der Einrichtungen, welche hier beschrieben werden sollen, und der damit ausgeführten Beobachtungen betrifft das ganze Gebiet der elektrodynamischen Messungen, welches lange Zeit fast nur auf Strommessungen beschränkt gewesen, allmählig aber mehr und mehr auch auf Widerstandmessungen und elektromotorische Kraftmessungen ausgedehnt worden ist. — Die Entdeckung der Wasserzersetzung durch den elektrischen Strom hatte zur Construction von Voltametern, die Entdeckung des Elektromagnetismus zur Construction elektromagnetischer Galvanometer (Tangenten- und Sinusboussolen) geführt; die *Ohm*'schen Gesetze endlich, insbesondere das Gesetz, wonach der Widerstand homogener Leiter dem Verhältniss ihrer Länge zu ihrem Querschnitt proportional ist, bahnten auch den Weg zu Widerstandsmessungen, indem danach z. B. jeder gleichförmige Kupferdraht seiner Länge nach als Widerstandsscale dienen konnte.

Auch für die Zurückführung aller dieser Scalen auf dieselbe Einheit oder gleiches Maass, welche *Jacobi* in Petersburg zuerst angeregt hat, bot sich das einfache Mittel dar, aus einem längeren gleichförmigem Kupferdrahte viele Stücke von gleicher Länge abzuschneiden und damit als Widerstands-Maasseinheiten alle Experimentatoren zu versehen.

Sodann ist die willkürliche Wahl dieser Widerstands-Maasseinheit zu beseitigen gesucht worden, und zwar auf verschiedene Weise, nämlich erstens, im Auftrag der British Association, von dem dazu berufenen Standard Committee, welches aus den ersten wissenschaftlichen Autoritäten dieses Fachs zusammengesetzt war, durch Einführung eines Widerstandsmaasses $= 10^{10}$ Einheiten nach dem Systeme der von *Gauss* eingeführten absoluten Maasse, wobei Secunde und Millimeter als Maasseinheiten für Zeit und Länge zu Grunde gelegt werden.

Trotz aller Mühe und Sorgfalt und aller zur Verfügung des von der British Association mit Herstellung dieses unter dem Na-

men British Association-Einheit bekannten Widerstandsmaasses beauftragten Standard Committee gestellten Mittel, hat sich doch aus späteren von *Kohlrausch* im 6. Ergänzungsbande von *Poggendorff's* Annalen mitgetheilten genauen und nach besserer Methode ausgeführten Messungen ergeben, dass diese British Association-Einheit nicht $10^{10}$ Einheiten, sondern $1{,}0196 . 10^{10}$ Einheiten nach dem System der von *Gauss* eingeführten absoluten Maasse enthält.

Unabhängig davon war zweitens auch von Dr. *Werner Siemens* in Berlin, um die früher ganz der Willkür überlassene Wahl der Widerstands-Maasseinheit zu beseitigen, die Annahme und Einführung des Widerstandes eines Quecksilbercylinders von 1000 Millimeter Länge und einem Quadratmillimeter Querschnitt als Widerstandsmaass befürwortet worden, und es war von ihm dieses Widerstandsmaass mit grosser Genauigkeit und Übereinstimmung in mehreren Exemplaren wirklich dargestellt worden, sowie auch ganze darnach regulirte Widerstandsscalen, welche seitdem für den praktischen Gebrauch höchst wichtig und unentbehrlich geworden sind.

Das Gebiet der elektrodynamischen Messungen ist nun aber nicht auf Strommessungen und Widerstandsmessungen zu beschränken, sondern ist auch auf elektromotorische Kraftmessungen zu erstrecken, welche besondere Aufmerksamkeit darum in Anspruch nehmen, weil sie bei grösster Wichtigkeit und Bedeutung der wirklichen genauen Ausführung die grössten Schwierigkeiten entgegensetzen.

Stehen aber auch in den meisten Fällen der directen Ausführung elektromotorischer Kraftmessungen unüberwindliche Schwierigkeiten entgegen, so giebt es doch einige wenige Fälle, wo diese Kräfte nach absolutem Maasse bekannt sind, wenn auch nicht durch Messung ihrer Wirkungen, doch aus der Kenntniss ihrer Ursachen, z. B. die elektromotorischen Kräfte, welche der Erdmagnetismus auf ein geschlossenes Solenoid von bekannten Dimensionen ausübt, welches um eine bestimmte Axe mit bestimmter Geschwindigkeit gedreht wird.

In diesen besonderen Fällen wirklich darstellbarer elektromotorischer Kräfte von bekannter Grösse können nun ferner auf galvanometrischem Wege auch die von diesen Kräften im Solenoide inducirten Ströme gemessen werden, und die in diesem Falle erworbene Kenntniss, sowohl der elek-

tromotorischen Kraft als auch des dadurch im Solenoide inducirten Stromes, führt nach dem bekannten *Ohm*'schen Gesetze zur Kenntniss des Solenoid-Widerstandes, welcher nach diesen Gesetzen durch das Verhältniss jener Kraft zu diesem Strome bestimmt, nach absolutem Maasssystem diesem Verhältnisse gleich ist, worauf eben die Widerstandsmessung nach absolutem Maasse beruht.

Ist nun aber auf diese Weise in diesem besonderen Falle der Solenoidwiderstand nach absolutem Maasse bekannt und bleibt derselbe auch (bei unveränderter Temperatur des Solenoids) constant der nämliche, so leuchtet ein, dass nun, auf dem Wege galvanometrischer Messung, alle (von den verschiedensten, auch ganz unbekannten elektromotorischen Kräften) in diesem Solenoide erregten Ströme gemessen werden können, und dass aus der Kenntniss dieser Ströme, in Verbindung mit der früher erworbenen Kenntniss des Solenoidwiderstands, nach dem nämlichen *Ohm*'schen Gesetze, die Kenntniss aller unbekannten auf das Solenoid wirkenden elektromotorischen Kräfte gewonnen werden kann, von welchen jene Ströme erregt worden sind.

Diese Methode, zur Kenntniss elektromotorischer Kräfte zu gelangen, ist von grösster Wichtigkeit und Bedeutung, weil sie die einzige ist für alle elektromotorischen Molecularkräfte, die nämlich, wie alle Molecularkräfte, nur aus ihren Wirkungen bestimmt werden können.

Da aber nur nach absoluten Maassen das Verhältniss der elektromotorischen Kraft zur Stromstärke mit dem Leitungswiderstande als identisch gegeben ist, so müssen für diese Bestimmungsweise elektromotorischer Kräfte die Ströme sowohl als auch die Leitungswiderstände nach absolutem Maass gegeben sein. Alle Widerstandsbestimmungen nach andern Maassen, z. B. nach *Jacobi*'s Kupferdraht oder nach *Siemens*' Quecksilbereinheit oder selbst auch nach der British Association-Einheit, bedürfen daher zu diesem Zwecke der Reduction auf absolutes Maass. Und diese Reductionen müssen (wie es beim Gebrauch der Uhren zum Zweck der Zeitmessung geschieht) immer wieder von neuem geprüft und berichtigt werden, wenigstens so lange man keine vollkommen unveränderlichen Leiter besitzt.

Wollte man dagegen einwenden, dass ganz das Nämliche,

was hiernach von Widerstandsbestimmungen gefordert werde, mit gleichem Rechte auch von anderen Grössenbestimmungen nach absoluten Maassen zu fordern sein würde, z. B. von Längenmessungen nach dem Meter, als 10 000 000ten Theil des Erdquadranten, so würde zu erwidern sein, dass in der That bei wichtigen und genauen Längenbestimmungen nach diesem Maasse, in Fällen, wo dessen Verhältniss zum Umfang der Erde wesentlich in Betracht kommt, nicht schlechtweg auf seine Bestimmung aus früheren Beobachtungen, die gegenwärtig blos auf Treu und Glauben angenommen werden können, gebaut werde, sondern dass diese früheren Beobachtungen durch neuere Beobachtungen geprüft und nur dann ungeändert zugelassen werden, wenn sie dadurch bestätigt gefunden worden sind. Nur ist die Ausführung solcher Prüfungen, wenn keine besonderen Einrichtungen dafür getroffen sind, so schwierig, dass sie nur selten mit Erfolg bewerkstelligt werden kann.

Es ergiebt sich daraus, dass es von grösster Wichtigkeit ist, Einrichtungen zu treffen, welche es möglich machen und möglichst erleichtern, frühere Beobachtungen, auf denen die Feststellung und Darstellung der Maasse beruhte, durch spätere Beobachtungen jederzeit prüfen und bestätigen oder berichtigen zu können.

Solche Prüfungen und Bestätigungen oder Berichtigungen werden nun bei Zeitmessungen, wenn sie höheren wissenschaftlichen Zwecken dienen, wirklich immer angewandt, weil man sich nicht auf das auch durch die vollkommensten Uhren gegebene Zeitmaass und auf die zu seiner Bestimmung früher gemachten Beobachtungen verlässt, sondern zum Zwecke der neu auszuführenden Messungen immer neue Beobachtungen zur Prüfung des Ganges der Uhren macht.

Solche Prüfungen und Bestätigungen oder Berichtigungen lassen sich nun mit Widerstands-Etalons, wie sie auf Veranstaltung der British Association dargestellt worden sind, unmittelbar gar nicht ausführen, und auf mittelbaren Wegen würde, abgesehen von grösserer Arbeit, die Prüfung leicht an Genauigkeit so viel verlieren, dass sie zum Zweck der neu auszuführenden Messungen gar keinen oder nur geringen Vortheil darböte. Es würde sich mit dieser Prüfung ähnlich verhalten, wie wenn der ursprüngliche, im französischen Staatsarchive niedergelegte Meter-Etalon oder eine Copie desselben, einer Prüfung durch

neue Beobachtungen unterworfen werden sollte, ob derselbe wirklich dem 10 000 000 ten Theile des Erdquadranten gleich sei — eine Prüfung, die schwer auszuführen sein würde.

Sollte nun nicht auf Treu und Glauben und auf Unveränderlichkeit des Meter-Etalons gebaut werden, sondern sollte die Prüfung und Bestätigung für diese Längenmaassbestimmung durch neue Beobachtungen jederzeit offen erhalten werden, so leuchtet ein, dass zur Erreichung dieses Zwecks doch jedenfalls freistehen würde, statt der festgesetzten Maasseinheit des Meters selbst, irgend eine andere aber genau nach dieser Maasseinheit bestimmte Grösse als Normallänge aufzustellen, wenn dadurch eine Vereinfachung und Erleichterung der immer wiederholt auszuführenden Prüfungen gewonnen werden könnte, was z. B. der Fall sein würde, wenn von allen zu den geodätischen Vermessungen gebrauchten Dreieckseiten eine solche gefunden und mit solchen Einrichtungen versehen werden könnte, dass sie erstens mit jeder beliebigen Längenscala jederzeit genau gemessen und diese Messung jederzeit mit gleicher Genauigkeit wiederholt werden könnte, und dass zweitens beliebige neue zur Grössen- und Gestaltbestimmung der Erde dienende Triangulationen mit ihr verbunden werden könnten. Durch solche neue Triangulationen würde nämlich die ursprüngliche Bestimmung der Dreieckseite in Meterzahl wiederholt und dadurch jederzeit von neuem geprüft werden können, während durch die Messung der Dreieckseite mit beliebigen Scalen es möglich werden würde, jede mit diesen Scalen messbare Länge in Theilen der Dreieckseite und folglich auch in Metern zu bestimmen.

Auf gleiche Weise braucht nun zu Begründung genauer Widerstandsmessungen nach absolutem Maasse das festgesetzte Maass keineswegs selbst dargestellt zu werden, sondern es genügt jede beliebig getheilte Widerstandsscala, mit welcher der Widerstand eines Normalleiters genau verglichen und gemessen werden kann.

Unter einem Normalleiter verstehen wir aber einen Leiter, dessen Widerstand nach absolutem Maasse genau bestimmt worden ist und jederzeit mit gleicher Genauigkeit wieder bestimmt werden kann.

Die an einen solchen Normalleiter gestellte Forderung

aber, dass nämlich sein Widerstand nach absolutem Maasse genau bestimmt worden sei und jederzeit mit gleicher Genauigkeit wieder bestimmt werden könne, setzt nun voraus, dass dieser Normalleiter mit Einrichtungen zu genauen absoluten Widerstandsmessungen versehen sei. Zugleich leuchtet vom praktischen Gesichtspunkte ein, dass nicht blos die Genauigkeit, mit welcher diese Widerstandsmessung des Normalleiters ausgeführt werden könne, sondern auch die Einfachheit der Beobachtungen und die zu ihrer Ausführung erforderliche Zeit wesentlich in Betracht komme.

Für die Wahl und Einrichtung eines solchen Normalleiters kommt daher zunächst die Wahl der zu Messung seines Widerstands anzuwendenden Methode in Betracht. *F. Kohlrausch* hat nun in einer im Jahre 1874 im 6ten Ergänzungsbande von *Poggendorff*'s Annalen erschienenen klassischen Arbeit (»Zurückführung der *Siemens*'schen galvanischen Widerstandseinheit auf absolutes Maass«), welche die genauesten bisher ausgeführten absoluten Widerstandsbestimmungen enthält, vier verschiedene Methoden der absoluten Widerstandsmessung angeführt. Alle diese vier Methoden haben mit einander gemein, dass ein Leiter verlangt wird, der als Inductor und auch als Multiplicator dient, entweder indem ein Theil desselben den Inductor bildet, ein anderer Theil den Multiplicator, oder indem der ganze Leiter beiden Zwecken zugleich dient.

Von diesen vier Methoden möge hier blos erwähnt werden, dass nach Verschiedenheit der Verhältnisse bald die eine, bald die andere den Vorzug verdienen kann, dass aber unter Verhältnissen, die keine Beschränkung in den zu wählenden Mitteln auferlegen, die erste Methode ihrer Einfachheit und der grösseren, durch sie erreichbaren Genauigkeit wegen vor allen andern den Vorzug verdiene, bisher aber aus Mangel an Mitteln noch niemals in Anwendung gekommen ist. Da nun vorausgesetzt werden darf, dass, wo sichere Begründung absoluter Widerstandsmessungen ernstlich in's Auge gefasst wird, die Beschaffung der Mittel zu genauester Ausführung kein Hinderniss oder Bedenken finden werde, so dürfen wir zu unserem Zwecke uns hier auf die Betrachtung dieser ersten Methode beschränken, von welcher *Kohlrausch* sagt:

»Die erste [Methode] benutzt die durch den Erdmagnetismus in einem bewegten Leiter von bekannten Dimensionen

(Erdinductor) inducirte elektromotorische Kraft und findet die Stromstärke durch die Ausschläge einer kurzen Magnetnadel innerhalb eines Multiplicators von ebenfalls bekannten Dimensionen. Verlangt ist ausserdem nur die Schwingungsdauer der Nadel, nicht etwa die erdmagnetische Intensität, da diese sich heraushebt. Erforderlich ist aber, dass die Nadel kurz sei gegen den Durchmesser des Multiplicators. Entweder also müssen die Beobachtungen an einer kleinen Nadel angestellt werden, oder der Multiplicator ist in sehr bedeutenden Dimensionen auszuführen«.[1])

---

1) Zur näheren Erläuterung dieser Methode diene folgende Ableitung derselben aus der bekannten Theorie der Tangentenboussole.

Ein in der Richtung des magnetischen Meridians fest aufgestellter kreisförmiger Leiter von grossem Durchmesser (der mehrere Umwindungen haben kann) mit kurzer Nadel in seinem Mittelpunkte bildet ein Galvanometer, welches mit dem Namen der Tangentenboussole bezeichnet worden ist.

Der durch den kreisförmigen Leiter der Tangentenboussole gehende Strom $i$ übt auf den Nadelmagnetismus $m$ ein Drehungsmoment $= 2ami$ aus, wo $a$ den Quotienten der umströmten Fläche $n\pi rr$ dividirt durch den Cubus der für alle Stromelemente gleichen Entfernung $r$ vom Nadelmittelpunkte bezeichnet, also $a = \frac{n\pi}{r}$ ist, wo $n$ die Zahl der Umwindungen bezeichnet, und ertheilt der das Trägheitsmoment $k$ besitzenden Nadel in der Zeit $dt$ die Drehungsgeschwindigkeit $dC$:

$$dC = 2\,\frac{am}{k}\cdot i\,dt = 2\,\frac{n\pi}{r}\cdot\frac{m}{k}\cdot i\,dt.$$

Ist nun $i$ der von einer elektromotorischen Kraft $e$ in dem geschlossenen Leiter (zu welchem der Kreis der Tangentenboussole gehört) erzeugte Strom und $w$ der Widerstand des Leiters, und sind $i, e, w$ nach absoluten Maassen bestimmt, so ist $i = \frac{e}{w}$ und folglich

$$dC = 2\,\frac{n\pi}{r}\cdot\frac{m}{k}\cdot\frac{1}{w}\,e\,dt,$$

folglich

$$C = 2\,\frac{n\pi}{r}\cdot\frac{m}{k}\cdot\frac{1}{w}\int e\,dt.$$

Kann nun ein Inductionsstoss mit einem Erdinductor in sehr kurzer Zeit, die nur einen kleinen Theil der Schwingungsdauer bildet, ausgeführt werden, und bezeichnet $\frac{1}{2}p$ die Grösse der vom Inductor umwundenen Fläche, so ist bekanntlich für einen solchen Inductionsstoss, wenn $T$ den inducirenden (z. B. horizontalen) Erdmagnetismus bezeichnet,

$$\int e\,dt = pT,$$

Für den oben verlangten Normalleiter geht hieraus hervor, dass er in Form eines Inductors und Multiplicators von sehr grossen Dimensionen dargestellt werden müsste, wenn die Messung seines Widerstandes nach der ersten, dem Zwecke am besten entsprechenden, Methode ausgeführt werden soll.

Ohne auf eine nähere Motivirung der zweckmässigsten Construction eines solchen Normalleiters im Allgemeinen einzugehen, beschränken wir uns hier auf eine Beschreibung desselben, wie er zum Zweck der näher zu beschreibenden Beobachtungen wirklich ausgeführt und im Jahre 1878 in Leipzig, im Local der alten Sternwarte auf der Pleissenburg aufgestellt worden ist.

Der Normalleiter ist so construirt worden, dass man eine genau messbare elektromotorische Kraft auf ihn wirken lassen kann, und dass durch diese Kraft ein genau messbarer elektrischer Strom darin inducirt werde, um aus dem Verhältniss jener Kraft zu diesem Strome die Kenntniss seines Widerstandes zu gewinnen.

Es würde nun freistehen, entweder den Normalleiter in zwei Theile zu scheiden, nämlich den ersten, auf welchen die elektromotorische Kraft wirkt, und den zweiten, von wo aus der hindurchgehende inducirte Strom die zu messende Wirkung ausübt, oder es würde auch freistehen, den ganzen Leiter zu benutzen, sowohl um darauf die elektromotorische Kraft wirken zu lassen, als auch um von da aus durch den Strom die messbare Wirkung zu erregen.

Die erste dieser beiden Alternativen führt zu den von *Kohlrausch* angeführten Methoden Nr. 1 und Nr. 2, von denen *Kohlrausch* die letztere zu seinen Messungen und wir die erstere gewählt haben. Die zweite Alternative führt zu den von

---

folglich

$$C = 2\frac{n\pi}{r}\cdot\frac{m}{k}\cdot\frac{1}{w}\cdot pT,$$

worin $\frac{mT}{k} = \frac{\pi^2}{\tau^2}$ nach bekanntem Schwingungsgesetze ist, wenn $\tau$ die auf unendlich kleine Bögen, Dämpfung und Torsion reducirte Schwingungsdauer bezeichnet, also $w = 2\frac{n\pi p}{r}\cdot\frac{\pi^2}{C\tau^2}$, oder, wenn $2\frac{n\pi}{r} = q$ gesetzt wird:

$$w = \pi^2\cdot\frac{pq}{C\tau^2}.$$

*Kohlrausch* angeführten Methoden Nr. 3 und Nr. 4, von denen die letztere von der British Association angewandt worden ist.

Wir scheiden also den Normalleiter in zwei Theile, von denen wir den einen, auf welchen die elektromotorische Kraft wirkt, den Inductor, den andern, welcher zur Messung des inducirten durch den ganzen Leiter gehenden Stroms dient, den Multiplicator nennen.

Ferner übersieht man leicht, dass sowohl zum Inductor als Multiplicator aus einem Drahte gewundene Solenoide zu nehmen sind, deren elektrische Ströme als Systeme paralleler Kreisströme bei Berechnung ihrer Wirkung betrachtet werden dürfen. Solche Solenoide sind, wie bekannt, für einen Erdinductor sowohl als auch für den Multiplicator einer Tangentenboussole die angemessenste Form.

Ferner ist bekannt, dass, wenn der Inductor und der mit dem Leiter zu füllende Raum des Multiplicators gegeben wäre, für die Strommessung es am vortheilhaftesten sein würde, den Widerstand des Multiplicators dem des Inductors gleich zu machen.

Was endlich die Grösse des Inductors betrifft, so würde zwar mit derselben, auch bei einem gegebenen Widerstande des Multiplicators, die elektromotorische Kraft immer wachsen; doch muss der Grösse des Inductors eine Grenze gesetzt werden, damit die Inductionsstösse schnell genug und ohne Erschütterung ausgeführt werden können, was der Präcision und guten Übereinstimmung der Beobachtungen wegen nothwendig ist.

Aus der Erfahrung hat sich ergeben, dass zum Zweck präciser Ausführung der Inductionsstösse das Gewicht eines Solenoids bei etwa 1000 Millimeter mittlerem Durchmesser seiner Umwindungen nicht über 200 Kilogramm betragen darf. Die Stärke des zum Normalleiter zu wählenden Kupferdrahtes ist verschieden nach Grösse des Widerstandes, für welchen die genauesten Maassbestimmungen verlangt werden. Wird dieser Widerstand auf ungefähr 10 *Siemens*'sche Quecksilbereinheiten, oder 10 British Association-Einheiten oder $10^{10}$ absolute Maasseinheiten angenommen, wovon die Hälfte auf den Inductor käme, so würde zum Inductor Kupferdraht von etwa $3^1/_3$ Millimeter Dicke zu wählen sein.

Ebenso ist der Grösse des Multiplicators eine Grenze gesetzt,

welche bei gegebenem Widerstande nicht überschritten werden darf, um eine für genaue Messungen hinreichend grosse Galvanometer-Empfindlichkeit zu erlangen.

Die beiden als Inductor und Multiplicator dienenden Solenoide sollen also gleichen Widerstand besitzen und dürfen beide an Grösse gewisse Grenzen nicht überschreiten; bei gleicher Drahtstärke ergiebt sich daraus leicht als das zweckmässigste, beide ganz gleich zu machen, so dass also der ganze Normalleiter in zwei vom Inductor und Multiplicator gebildete ganz gleiche und symmetrische Hälften zerfällt.

Es wird später näher betrachtet werden, welche Vortheile diese Symmetrie der beiden Solenoide, nämlich des Inductors und Multiplicators, gewährt.

Die Walzen, auf welche diese beiden Solenoide aufgewunden sind, dürfen keine Spur von Eisen oder andern magnetischen Stoffen enthalten und müssen so beschaffen sein, dass sie leicht gedreht und dadurch in jede beliebige Lage gebracht werden können. Es gilt dies besonders von dem zum Inductor bestimmten Solenoide, zum Zwecke der schnell damit auszuführenden Inductionsstösse. Bei der Grösse dieser Walzen ist Holz wegen seines geringen specifischen Gewichts und wegen seiner bei guter Auswahl und Behandlung grossen Festigkeit und Unveränderlichkeit als das dazu geeignetste Material gewählt worden, und zwar altes Mahagoniholz, in kleinen Stücken und verschiedenen Lagen sorgfältig zusammengeleimt.

Auf diese Weise sind für den Inductor und Multiplicator zwei ganz gleiche hohle Holzcylinder von 1100 Millimeter Durchmesser und 350 Millimeter Höhe gebildet worden. Die Höhlung zerfällt in eine innere von 638 Millimeter Durchmesser, welche durch den ganzen Holzcylinder durchgeht, also 350 Millimeter tief ist, und in eine ringförmige, welche von der äusseren Cylinderfläche aus 70 Millimeter tief eingedreht ist, 254 Millimeter Breite hat und bis zu 40 Millimeter Höhe von den Drahtwindungen eingenommen und ausgefüllt ist.

An zwei diametral gegenüberliegenden Stellen sind nach Aufwindung des Drahtes zwei hölzerne Bügel mit der Holzwalze fest verbunden worden, von denen der eine einen hohlen Zapfen trägt, durch welchen die beiden Enden des aufgewundenen Drahtes von der Walze nach aussen geführt werden, der andere einen massiven, am Ende mit einer Messingspitze versehenen

Zapfen trägt, und mit dieser Spitze bei Aufstellung des Solenoids auf einem massiven Holzgestelle in eine daran angebrachte Pfanne zu stehen kommt, so dass das ganze Solenoid um eine durch diesen festen Stützpunkt gehende Verticalaxe gedreht werden kann. (Vgl. Taf. I Fig. 3 und Taf. II Fig. 2.)

Das feste Gestell umgiebt rahmenförmig das ganze Solenoid. Am Boden dieses festen Gestells befindet sich die schon erwähnte Pfanne, worin das Solenoid mit der Messingspitze seines nach unten gekehrten festen Zapfens aufsteht, während das Holzgestell oben über dem Solenoide mit einer runden Öffnung versehen ist, durch welche der hohle am Solenoid angebrachte Holzzapfen (durch welchen die beiden Enden des aufgewundenen Drahtes vom Solenoid nach aussen geführt werden) frei drehbar hindurchgeht. Von diesen beiden mit dem Solenoid fest verbundenen Zapfen wird eine verticale Drehungsaxe des Solenoids gebildet und das feste Holzgestell ist ausserdem mit Einrichtungen versehen, um diese Drehungsaxe, wenn sie aus der verticalen Richtung gewichen wäre, genau wieder einzustellen.

Alle diese Einrichtungen sind für beide Solenoide ganz gleich; eine Verschiedenheit findet zwischen ihnen nur darin statt, dass erstens am Holzgestelle des Inductors noch besondere Hemmungen angebracht sind, um die Drehung desselben bei einem Inductionsstosse genau auf einen Halbkreis zu beschränken, und zwar in solcher Weise, dass bei jeder Hemmung die Inductoraxe mit dem magnetischen Meridiane genau zusammenfällt. Die Art, wie diese Hemmung bewerkstelligt wird, ist von keiner wesentlichen Bedeutung und bedarf daher keiner nähern Beschreibung.

Zweitens aber findet ein anderer viel wesentlicherer Unterschied zwischen beiden Solenoiden darin statt, dass das Multiplicator-Solenoid, zum Zweck der Ergänzung zum Galvanometer, ein Magnetometer umschliesst, welches zu dem hier vorliegenden Zwecke eine besondere Einrichtung erhalten musste, die einer genaueren Beschreibung bedarf. (Vgl. Taf. I Fig. 5.)

Zu absoluten Messungen der Stromintensität, wie sie zu absoluten Widerstandsmessungen erfordert werden, darf nämlich, wie aus der Construction der Tangentenboussole schon bekannt ist, die Länge der Magnetometernadel nur einen kleinen Bruchtheil vom Durchmesser der Multiplicatorwindungen betragen, z. B. bei einem mittleren Durchmesser der letzteren

von 1000 Millimeter nur etwa 100 Millimeter. Eine solche Nadel, stark magnetisirt und an einem Coconfaden aufgehangen, würde nun aber eine sehr kurze Schwingungsdauer haben, etwa von 4 Secunden, und da die zu den beabsichtigten Versuchen erforderlichen Inductionsstösse in einem nur kleinen Bruchtheile dieser Schwingungsdauer ausgeführt werden sollen, z. B. nur im 10ten Theile derselben, so würde die bei der Schwere des Inductors ungefähr 2 Secunden erfordernde Ausführung nicht möglich sein.

Es ist daher die Einrichtung getroffen worden, dass die 100 Millimeter lange Nadel (ein gehärteter Stahlcylinder von 10 Millimeter Durchmesser und 100 Millimeter Länge) nicht unmittelbar am Faden hängt, sondern dass der Faden ein Schiffchen trägt, worauf die Nadel gelegt werden kann, und an diesem Schiffchen ist horizontal und rechtwinkelig gegen die Nadel eine dünne Messingröhre befestigt, welche an ihren Enden zwei parallele und verticale Planspiegel, in einem Abstande von 272 Millimeter von einander, trägt. Die Schwingungsdauer der Nadel wurde dadurch etwa bis auf 30 Secunden verlängert und dadurch hinreichende Zeit zu präcisester Ausführung der Inductionsstösse und aller damit zu verbindenden Beobachtungen gewonnen.

Statt der 100 Millimeter langen Nadel konnte aber in das Schiffchen auch eine 200 Millimeter lange Nadel eingelegt werden, deren Schwingungsdauer nur etwa 17 Secunden betrug, und auch damit liessen sich bei einiger Übung die Inductionsstösse und alle Beobachtungen mit aller erforderlichen Genauigkeit ausführen. Der zwar geringe, aber messbare Einfluss, den die grössere Nadellänge bei gegebenem Multiplicatordurchmesser nach diesen Beobachtungen auf die Widerstandsbestimmung hatte, liess sich dann, wie man leicht sieht, zu einer Correction wegen Nadellänge auch für den mit 100 Millimeter langer Nadel erhaltenen Widerstand benutzen, um den Einfluss der Nadellänge auf das Resultat der Messung möglichst ganz auszuschliessen.

Die Beobachtungen der durch Inductionsstösse hervorgebrachten Nadelelongationen wurden sodann gleichzeitig mit zwei mit Scalen versehenen Ablesungs-Fernröhren gemacht, die in den entgegengesetzten Richtungen der beiden Spiegelnormalen, jedes in etwa 4000 Millimeter Abstand vom zugehörigen Spiegel, aufgestellt waren. (Vgl. Taf. II Fig. 1.)

Abgesehen davon, dass die mit beiden Fernröhren zugleich gemachten Beobachtungen einander wechselseitig controlirten, wodurch jedem Irrthume vorgebeugt wurde, bot diese Einrichtung noch den grossen Vortheil dar, dass die Bestimmung des Winkelwerthes der Scalentheile unabhängig gemacht wurde von der Messung des Horizontalabstandes des Spiegels von der Scale, welche bei der grossen Beweglichkeit des mit der immer in Schwingung befindlichen Nadel verbundenen Spiegels sehr grosse Schwierigkeiten findet. Bei dieser neuen Einrichtung bedurfte es nur der Messung des Horizontalabstandes der beiden festen und einander parallelen Scalen und des Abstandes der beiden ebenfalls mit einander fest verbundenen parallelen Spiegel, die beide mit grösster Genauigkeit leicht ausgeführt werden konnten.

Die Aufhängung des Nadelschiffchens an einem Coconfaden mittelst Torsionskreises, und die Einrichtung zum Heben und Senken der Nadel, um ihren Mittelpunkt mit dem Mittelpunkte des Multiplicators genau zusammenfallen zu lassen, wie sie auch bei andern Magnetometern gebräuchlich sind, bedürfen keiner näheren Beschreibung. Es bleibt nur noch hinzuzufügen übrig, dass der vom Multiplicator umschlossene Raum, in dessen Mitte die Nadel hing, von Osten und Westen mit zwei Holzdeckeln verschlossen werden konnte, in deren Mitte zwei grosse kreisrunde Plangläser eingesetzt waren, durch welche hindurch die Spiegelbilder der beiden Scalen mit den beiden Ablesungsfernröhren sich beobachten liessen. (Vgl. Taf. II. Fig. 1.)

Was nun die Ausführung dieses eben beschriebenen Normalleiters und des damit verbundenen Magnetometers betrifft, so verdanken wir dieselbe theils der besondern Güte und Freundlichkeit, womit Herr Dr. *Werner Siemens* in Berlin die Auswahl und die Lieferung des übersponnenen Kupferdrahtes übernommen und für vollkommene Ausführung ganz in der gewünschten Weise gesorgt hatte; theils den Herren Gebrüder *Repsold* in Hamburg, welche nicht blos die beiden Walzen, auf welchen der Draht aufgewickelt werden sollte, nebst dem Magnetometer und allen Einrichtungen zum Zwecke der Aufwickelung des Drahtes und der Zählung der Umwindungen ausgeführt hatten, sondern auch die in Leipzig zu bewerkstelligende Aufwickelung des Drahtes und Aufstellung des ganzen Apparates im Local der alten Sternwarte auf der Pleissenburg übernommen hatten.

Abgesehen von den dabei getroffenen besonderen Vorkehrungen, um den Draht beim Aufwickeln immer gleichgespannt zu erhalten, und die Möglichkeit eines Irrthums bei Zählung der Umwindungen, durch die Controle eines mit der Walze verbundenen zuverlässigen Zählers, ganz auszuschliessen, bleiben noch die besondern Einrichtungen hervorzuheben, welche getroffen worden waren, um den aufgewundenen Draht auch wieder von der Walze abwinden und mit gleicher Sorgfalt und Genauigkeit neu aufwinden zu können.

Zu den Elementen, welche nämlich zur Widerstandsbestimmung des Normalleiters nach absolutem Maasse gebraucht werden, gehören auch zwei Elemente, deren Bestimmung nothwendig theils vor, theils während der Aufwickelung des Normalleiters auf die Inductor- und Multiplicatorwalze gemacht werden muss, weil sie am fertigen Inductor und Multiplicator nicht mehr gemacht werden kann. Diese Elemente sind erstens die Peripherie jeder Walze ohne Draht, vorausgesetzt, was sich leicht prüfen lässt, dass die Walze wirklich genaue Cylinderform habe; zweitens die Zahl der übereinander gewickelten Windungsschichten und die Zahl der Umwindungen jeder Schicht.

Die Cylinderform der Walze, ehe der Draht darauf gewunden wurde, liess sich durch Messung des Umfangs an verschiedenen Stellen sehr leicht prüfen, wonach die Drahtlänge aller Umwindungen der ersten oder untersten Schicht sich gleich ergab. Aber auch nach Aufwindung des ganzen Drahtes ergab sich der vergrösserte Umfang ebenfalls überall so gleich, dass die Drahtlänge auch aller Umwindungen der letzten Schicht und jeder zwischenliegenden als gleich angenommen werden durfte. Hiernach genügen zum Zwecke der absoluten Widerstandsmessung von solchen Bestimmungen, deren Kenntniss nur vor oder während der Aufwickelung des Drahtes gewonnen werden kann, folgende zwei: nämlich erstens die Kenntniss des Umfangs der Walze ohne Draht, und zweitens die Kenntniss der Zahl der Schichten übereinander nebst der Zahl der Umwindungen jeder Schicht.

Aber diese beiden Bestimmungen müssten nun bei allen künftigen Messungen immer auf Treu und Glauben angenommen werden, wenn das Solenoid niemals wieder von der Walze abgewickelt und von neuen aufgewickelt werden könnte, was so

viel heisst, als dass keine künftige Widerstandsmessung des Normalleiters ganz vollständig und unabhängig von der ersten Messung würde ausgeführt werden können.

Um nun die völlige Unabhängigkeit künftiger Messungen von der ersten Messung, welche mit Aufwindung des Normalleiters auf beide Walzen verbunden war, zu ermöglichen, was wünschenswerth erschien, auch wenn noch so wenig Grund vorlag, an der Richtigkeit jener beiden bei Aufwindung des Normalleiters auf die beiden Walzen gewonnenen Bestimmungen zu zweifeln, mussten Einrichtungen getroffen werden, den Normalleiter von den beiden Walzen nach Belieben auch wieder abwickeln und von neuem aufwickeln zu können. Auch hiezu sind von den Herren *Repsold* die S. 94 beschriebenen, Tafel I, Figur 1 u. 2 dargestellten Einrichtungen getroffen worden, deren Anwendung zur Abwickelung wie zur Aufwickelung keiner weiteren Erläuterung bedarf.

---

Ausser dem hier beschriebenen Normalleiter und seinen beiden Theilen, nämlich dem Inductor und Multiplicator, nebst dem dazu gehörigen Magnetometer und mit Scalen versehenen Ablesungsfernröhren kommen endlich nun noch die zu absoluten Widerstandsbestimmungen nothwendigen Maasse und Messinstrumente im engern Sinne in Betracht, welche der Natur des zu messenden Gegenstands nach, der bekanntlich mit einer Geschwindigkeit homogen ist, sich müssen auf blosse Zeit- und Längen-Messungsinstrumente zurückführen lassen.

Diese Beschränkung auf Zeit- und Längenmaass nicht blos beim Ausspruch des Resultates der Widerstandsmessung, sondern auch bei allen dazu führenden Messungsoperationen, zeichnet nun die erste von den vier von *Kohlrausch* angeführten, schon oben erwähnten Methoden absoluter Widerstandsmessung besonders aus, die aus diesem Grunde und wegen der darauf beruhenden grösseren Einfachheit und erreichbaren Genauigkeit den Vorzug vor den andern Methoden verdient und daher von uns zur Widerstandsmessung des Normalleiters gewählt worden ist.

Was nun das Zeitmaass und die Zeitmessungen betrifft, so braucht blos bemerkt zu werden, dass dafür bei allen

hier zu beschreibenden Beobachtungen durch die Mitwirkung des Herrn Dr. *Weinek,* erstem Assistenten der neuen Sternwarte in Leipzig, in vollkommenster Weise gesorgt war, da ihm dazü alle Hülfsmittel dieses reich ausgestatteten Instituts zu Gebote standen. Alle Zeitbestimmungen bei unsern Messungen sind von Herrn Dr. *Weinek* mit einem vorzüglichen der Sternwarte gehörigen Chronometer gemacht worden, dessen Gang von ihm genau bestimmt und regulirt war.

Es ist durch diese von Seiten der neuen Sternwarte geleistete Mitwirkung die Ausführung aller bisherigen absoluten Widerstandsmessungen des auf der alten Sternwarte aufgestellten Normalleiters ausserordentlich erleichtert und befördert worden.

Anders verhält es sich mit den Längenmessungen, für welche die feinsten und genauesten Instrumente, wie sie der definitiven Ausrüstung eines solchen Messungen gewidmeten Instituts entsprechen würden, zu beschaffen bisher noch nicht möglich gewesen ist. Für die ersten Probeversuche genügten aber auch schon die gebräuchlichsten theils vorhandenen, theils leicht zu beschaffenden Mittel, womit hier das Wesentlichste und Nothwendigste ebenso erreicht werden konnte, wie es früher auch bei den absoluten Messungen des Erdmagnetismus geschehen ist. Es kam hinzu, dass die ersten Versuche mit dem hergestellten Normalleiter nebst Magnetometer nicht so lange verzögert werden sollten, bis alle wünschenswerthen Einrichtungen für die Längenmessungen ganz vollendet wären; schon darum nicht, weil man die daran zu stellenden Forderungen erst aus den zu machenden Erfahrungen genau und vollständig kennen lernen wollte.

Es wurde demnach für genügend erachtet, allen zu den hier folgenden Widerstandsmessungen erforderlichen Längenbestimmungen zwei genau übereinstimmende, bei Triangulationen gebrauchte, der Leipziger Sternwarte gehörige, hölzerne Doppelmeter, welche mit einer sorgfältig ausgeführten Theilung in Millimeter versehen waren, zu Grunde zu legen.

Ausserdem wurden von Mahagoniholz zwei Messstangen, jede von 4 Meter Länge, hergestellt, welche in einer 4 Meter langen hölzernen Rinne neben einander lagen, während ein gleicher dritter Stab als Decke darüber gelegt wurde. Die beiden ersten Stäbe liessen sich dann nach entgegengesetzten Sei-

ten aus der Rinne halb herausschieben, so dass sie in der Mitte der Rinne sich eben noch berührten, ihre Endflächen also 8 Meter von einander entfernt waren; der dritte Stab diente dazu, sie in einer geraden Linie in der Rinne zu erhalten. An den beiden 8 Meter von einander entfernten Enden beider Stäbe waren endlich zwei kleine in Millimeter getheilte Elfenbeinstäbchen eingelassen, die sich sehr leicht in der Richtung der Messstangen verschieben liessen und eine genau messbare Verlängerung des 8 Meter grossen Abstands bildeten.

Man sieht leicht ein, dass, wenn die 4 Meter lange Rinne mit diesen Maassstäben, nach Abhebung der beiden Deckel vom Multiplicator, so aufgestellt wurde, dass sie durch den Multiplicator hindurch mit den herausgeschobenen Elfenbeinschiebern bis nahe an die beiden parallelen Scalen der Ablesungsfernröhre reichte, eine wirkliche gleichzeitige Berührung beider Scalen mit den leicht beweglichen Elfenbeinschiebern sehr leicht herzustellen war, wodurch der Abstand der Scalen mit einer für den vorliegenden Zweck vollkommen genügenden Genauigkeit gemessen wurde.

Die Messung des Abstandes der beiden zum Magnetometer gehörigen parallelen durch eine Messingröhre fest verbundenen Planspiegel von einander war noch leichter auszuführen und bedarf keiner besonderen Erläuterung.

Die Zweckmässigkeit der Scheidung des Normalleiters in zwei gleiche Theile, nämlich in den Inductor und Multiplicator, leuchtet bei Ausführung der Widerstandsmessung besonders daraus ein, dass die Bestimmung des Widerstandes dadurch abhängig gemacht wird von 4 Elementen, von denen das erste $p$ blos vom Inductor, das zweite $q$ blos vom Multiplicator abhängt, die beide constant sind und unabhängig von einander aus den bei Construction des Inductors und Multiplicators auszuführenden Messungen bestimmt werden, während das dritte und vierte Element, nämlich die Schwingungsdauer $T$ der Magnetometernadel und die durch einen Inductionsstoss der Magnetometernadel vom Inductor ertheilte Drehungsgeschwindigkeit $C$, wegen ihrer Abhängigkeit vom Magnetismus der Nadel und der Erde, sowie von der Temperatur des Normalleiters variable Grössen sind, welche bei jeder Widerstandsmessung besonders und ganz von neuem bestimmt werden müs-

sen. — Der Widerstand $w$ des Normalleiters wird hieraus gefunden:

$$w = \pi^2 \cdot \frac{pq}{CT^2}.$$

Es leuchtet hieraus die Wichtigkeit der Messungen ein, durch welche die beiden constanten Elemente $p$ und $q$ bestimmt werden, die schon bei Construction des Inductors und Multiplicators ausgeführt werden müssen und in keiner Weise durch spätere Beobachtungen oder Messungen ersetzt werden können.

$\frac{1}{2}p$ bezeichnet die Inductorfläche, worunter zu verstehen ist die Summe der Projectionsflächen aller Umwindungen des Inductors auf eine gegen die Inductoraxe normale Ebene.

Wir lassen sogleich hier alle Messungen folgen, welche bei Aufwickelung des Inductors auf der alten Sternwarte zu Leipzig am 14. Mai 1877 zu genauester Bestimmung des constanten Elementes $p$ gemacht worden sind, mit Zugrundelegung der beiden schon erwähnten, der Leipziger Sternwarte gehörigen Doppelmeter.

Es wurde nämlich erstens der Umfang der Walze, ehe der Draht aufgewunden wurde, mit Hülfe von 6 Papierstreifen bestimmt, welche in gleichen Entfernungen von einander straff um die Walze gelegt wurden, so dass Anfang und Ende jedes Streifens sich deckten. Durch einen Anfang und Ende an dieser Stelle zugleich durchbohrenden Nadelstich wurde Anfangspunkt und Endpunkt der Umwindung zugleich bezeichnet. Jeder von diesen Streifen wurde später auf einer ebenen Tafel glatt ausgebreitet und die beiden Doppelmeter darauf gelegt, so dass sie mit ihrer bis zur Kante reichenden Millimetertheilung den Papierstreifen berührten. Der Abstand der beiden Nadelstiche konnte damit bis auf $\frac{1}{10}$ Millimeter genau bestimmt werden.

Es ergab sich der Umfang der Walze im Mittel aus den Angaben zweier Beobachter:

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| an | der | Stelle | des | 1. | Streifens | = 3018,55 | Millimeter |
| » | » | » | » | 2. | » | = 3018,55 | » |
| » | » | » | » | 3. | » | = 3018,50 | » |
| » | » | » | » | 4. | » | = 3018,45 | » |
| » | » | » | » | 5. | » | = 3018,70 | » |
| » | » | » | » | 6. | » | = 3018,50 | » |

Es ergab sich hieraus die Walze, so weit diese Prüfung reicht,

als fast vollkommen cylindrisch und ihr Umfang und Halbmesser:

$$2\pi c = 3018{,}54$$
$$c = 480{,}414.$$

Zweitens wurden während der Aufwindung des Drahtes sowohl die Schichten gezählt, welche die Windungen über einander bildeten, als auch die in jeder Schicht neben einander befindlichen Umwindungen. Ausserdem wurde an der bei Aufwindung des Drahtes gedrehten Walze ein Zähler befestigt und dessen Stand, welcher zu Anfang 800 war, bei Beendigung jeder Schicht von Umwindungen abgelesen, wie folgende Tabelle angiebt:

| Schicht. | Zahl ihrer Umwindungen. | Zählerstand. |
|---|---|---|
| 0. | 0 | 800 |
| 1. | 66 | 866 |
| 2. | 66 | 932 |
| 3. | 66 | 998 |
| 4. | 66 | 1064 |
| 5. | 66 | 1130 |
| 6. | 66 | 1196 |
| 7. | 66 | 1262 |
| 8. | 66 | 1328 |
| 9. | 66 | 1394 |
| 10. | 66 | 1460 |
| 11. | 66 | 1526 |
| 12. | 66 | 1592 |

Summa 12 Schichten 792 Umwindungen.

Hierauf wurde drittens der Umfang der Walze mit dem aufgewundenen Drahte auf gleiche Weise gemessen, wie vorher ohne Draht, wieder nämlich mit Hülfe von 6 Papierstreifen, woraus sich der Umfang der Walze mit Draht im Mittel aus Angaben zweier Beobachter ergab:

an der Stelle des 1. Streifens = 3263,75 Millimeter
» » » » 2. » = 3263,85 »
» » » » 3. » = 3264,10 »
» » » » 4. » = 3263,75 »
» » » » 5. » = 3263,80 »
» » » » 6. » = 3263,95 »

Der Umfang der Walze mit Draht ergab sich hieraus im Mittel:

$$2\pi\,(1+a)\,c = 3263{,}87$$
$$(1+a)\,c = 519{,}461$$
$$a\,c = 39{,}047.$$

Endlich wurde viertens noch die Länge der Walze $= 2\,b\,c$, auf welcher 66 Drahtwindungen neben einander Platz fanden, gemessen und gefunden:

$$2\,b\,c = 254{,}20,$$

woraus für dicht neben einander liegende Umwindungen die Drahtdicke incl. Umspinnung sich ergeben würde:

$$\frac{254{,}20}{66} = 3{,}8515.$$

Dieselbe Drahtdicke incl. Umspinnung ergiebt sich aber aus der Dicke der 12 Schichten übereinander, welche $= 39{,}047$ gefunden worden ist,

$$= \frac{39{,}047}{12} = 3{,}254.$$

Der Grund dieser Differenz liegt hauptsächlich in der baumwollenen Umspinnung, welche zwischen neben einander liegenden Umwindungen weniger zusammengedrückt wird, als zwischen über einander liegenden.

Hiernach ergeben sich nun leicht die Halbmesser $r$ der verschiedenen Schichten und die entsprechenden Flächen $\pi r r$, deren Summe mit 66 multiplicirt die Inductorfläche $\frac{1}{2}p$ giebt, nämlich in Quadratmillimetern:

$$\tfrac{1}{2}p = 6222.10^5.$$

---

Wir lassen ferner alle Messungen folgen, welche bei Aufwickelung des Multiplicators gemacht worden sind und zur Bestimmung des zweiten constanten Elementes $q$ geführt haben.

Der Umfang der zum Multiplicator bestimmten Walze, ehe der Draht aufgewunden wurde, ergab sich auf gleiche Weise wie beim Inductor im Mittel aus Bestimmungen zweier Beobachter an zwei weit von einander entfernten Stellen der Walze:

an 1. Stelle = 3017,65 Millimeter
» 2. » = 3018,25 »

im Mittel also war dieser Umfang und der entsprechende Halbmesser:

$$2\pi c = 3017{,}95$$
$$c = 480{,}32.$$

Während der Aufwindung des Drahtes wurden die Schichten und Umwindungen gezählt, wie folgende Tafel zeigt:

| Schicht. | Zahl ihrer Umwindungen. | Zählerstand. |
|---|---|---|
| 0. | 0 | 0 |
| 1. | 66 | 66 |
| 2. | 67 | 133 |
| 3. | 67 | 200 |
| 4. | $66\frac{3}{4}$ | 266,75 |
| 5. | $65\frac{1}{4}$ | 332 |
| 6. | 66 | 398 |
| 7. | 66 | 464 |
| 8. | $65\frac{1}{6}$ | 529,17 |
| 9. | $65\frac{5}{6}$ | 595 |
| 10. | 66 | 661 |
| 11. | 65 | 726 |
| 12. | 66 | 792 |

Summa 12 Schichten 792 Umwindungen.

Nach Aufwindung des Drahtes wurde der Umfang der Walze wieder gemessen und gefunden:

$$2\pi\,(1+a)\,c = 3272{,}17$$
$$(1+a)\,c = 520{,}797$$
$$ac = 40{,}477.$$[1])

Endlich wurde auch noch die Länge der Multiplicatorwalze gemessen, nämlich:

$$2bc = 254{,}20.$$

Nach diesen Messungen kann nun auch das zweite constante Element $q$, dessen Kenntniss zur Bestimmung des Normalwiderstandes nöthig ist, gefunden werden.

$q$ bezeichnet nämlich das von der Einheit des Stromes im Multiplicator auf die Einheit des Magnetismus in der Centralnadel ausgeübte Drehungsmoment, welches aus den bei der Construction des Multiplicators gemessenen Grössen $a$, $b$, $c$ und aus der Zahl der Umwindungen $n$ berechnet werden kann, wie in den Abhandlungen der K. Ges. d. Wiss. zu Göttingen, Bd. 10 (1862), »Zur Galvanometrie«, S. 39 gezeigt worden

1) Der für den Multiplicator etwas grössere Werth von $ac$ als für den Inductor hat seinen Grund in etwas geringerer Spannung des Multiplicatordrahtes bei Aufwindung desselben.

ist. Es ist nämlich daselbst bewiesen worden, dass das mittlere auf den Nadelmagnetismus $m$ ausgeübte Drehungsmoment einer Windung

$$= \frac{2\pi m}{ac} \log \frac{1 + a + \sqrt{[(1+a)^2 + b^2]}}{1 + \sqrt{(1 + b^2)}}$$

ist, woraus das Drehungsmoment aller $n$ Windungen, für die Einheit des Nadelmagnetismus, d. i. für $m = 1$, sich ergiebt, nämlich:

$$q = \frac{2\pi n}{ac} \log \frac{1 + a + \sqrt{[(1+a)^2 + b^2]}}{1 + \sqrt{(1 + b^2)}}.$$

Hierin ist nun nach den oben angeführten Bestimmungen:

$$n = 792$$
$$c = 480,32$$
$$a = \frac{40,477}{480,32}$$
$$b = \frac{127,10}{480,32}$$

woraus $q$ gefunden wird:

$$q = 9,64015.$$

---

Nach dieser Bestimmung der beiden Constanten $p$ und $q$ aus den bei Construction des Inductors und Multiplicators gemachten Beobachtungen und Messungen reduciren sich alle Widerstandsmessungen des Normalleiters im Wesentlichen erstens auf Beobachtungen der Schwingungsdauer $T$ der im Multiplicator aufgehangenen Nadel, und zweitens auf Beobachtungen der durch einen mit dem Inductor ausgeführten Inductionsstoss der im Multiplicator aufgehangenen Nadel ertheilten Geschwindigkeit $C$. Es kommen dazu drittens nur noch Hülfsbeobachtungen, die, weil die Nadel an einem elastischen Faden aufgehangen wird, zur Reduction der Schwingungsdauer auf verschwindende Elasticität dienen[1]).

1) Eine andere Art von Hülfsbeobachtungen könnte noch für die Geschwindigkeit $C$ nöthig erscheinen, wenn gegen die durch den Multiplicator vermittelte Wirkung des Inductionsstosses auf die Nadel die unmittelbare vom Inductor selbst ausgeübte Wirkung nicht verschwände. Unter den Verhältnissen der nachher anzuführenden Versuche betrug die unmittelbare Wirkung nur $\frac{1}{1080}$ der mittelbaren, und hätte durch eine

Aus den beiden constanten Elementen $p$ und $q$ und den beiden variabelen Elementen $T$ und $C$ wird der absolute Widerstand des Normalleiters berechnet und gefunden:

$$w = \pi^2 \frac{pq}{CT^2}.$$

Zur Ausführung von Beobachtungen zur Bestimmung von $T$ und $C$, welche bei jeder Messung des Normalleiterwiderstandes wiederholt werden müssen, wegen Veränderlichkeit des Erdmagnetismus und Nadelmagnetismus, von denen beide abhängig sind, findet man die nöthige Anweisung in der von *Gauss* gegebenen »Anleitung zur Bestimmung der Schwingungsdauer einer Magnetnadel« in den Resultaten aus den Beobachtungen des magnetischen Vereins im Jahre 1837, Seite 58—80, oder auch *Gauss'* Werke, Band V Seite 374—394; und in der Abhandlung über Widerstandsmessungen in den Abhandlungen der mathematisch-physischen Classe der K. Sächs. Ges. d. Wiss. Band I (1852) Seite 341—360, wo eine Übersicht der Beobachtungsmethoden zu galvanischen Messungen mit Rücksicht auf Dämpfung, insbesondere der Multiplications- und Zurückwerfungsmethode, gegeben ist, wovon die erstere Methode besonders bei schwachen, die letztere bei starken Inductionsstössen in Anwendung kommt; für dazwischen liegende Fälle kann noch eine dritte Methode dienen, wo die Nadelschwingung durch die Inductionsstösse abwechselnd vergrössert und verkleinert wird.

Als erstes Beispiel einer solchen Bestimmung der Grössen $T$ und $C$ und einer dadurch gegebenen Bestimmung des Normalleiterwiderstandes sollen die ersten Probeversuche dienen, welche nach Aufwindung des Inductors und Multiplicators am 13. Juni 1878 gemacht worden sind.

Die Beobachtungen zur Bestimmung von $T$ sollen kurz Schwingungsbeobachtungen, die zur Bestimmung von $C$ Inductionsbeobachtungen genannt werden. Letztere Beobachtungen wurden nach der oben erwähnten dritten Me-

---

mässige Vergrösserung des Abstandes des Inductors vom Multiplicator leicht noch sehr verkleinert werden können; abgesehen hievon würde es aber auch stets freistehen, ihren Einfluss ganz zu eliminiren, nämlich durch einen leicht zu bewerkstelligenden Wechsel der Verbindung der Drahtenden des Inductors mit denen des Multiplicators, wodurch eine verstärkende Wirkung in eine schwächende oder umgekehrt verwandelt wird.

thode ausgeführt; es wurde nämlich die vorhandene grössere Nadelschwingung durch den 1. Inductionstoss verkleinert, diese verkleinerte Schwingung wurde durch den 2. Inductionsstoss wieder vergrössert u. s. f.

## Erste Widerstandsmessung des Normalleiters.

### Übersicht der Beobachtungen.

Leipzig, alte Sternwarte 1878. Juni 13.

200 Millimeter lange Nadel.

4025,77 Millimeter oder Scalentheile Abstand des östlichen Spiegels von der Scale;

3917,77 Millimeter oder Scalentheile Abstand des westlichen Spiegels von der Scale.

20°,8 cent. Temperatur des Inductors.

20°,9 cent. Temperatur des Multiplicators.

### Schwingungsbeobachtungen

(bei offener Kette).

| | | | |
|---|---|---|---|
| $5^h\,37^m\,38^s,75$ | 1131,8 | $6^h\,24^m\,0^s,95$ | 944,8 |
| 55,70 | 435,0 | 18,15 | 620,0 |
| 38 12,60 | 1128,1 | 34,90 | 943,9 |
| 29,70 | 439,2 | 52,10 | 622,0 |
| 46,65 | 1125,9 | 25 9,00 | 942,6 |
| 39 3,70 | 441,1 | 26,15 | 623,2 |
| | 1122,5 | | 940,9 |

### Inductionsbeobachtungen.

| Inductions-stoss Nr. | Elongationsbeobachtungen an der östlichen | Elongationsbeobachtungen an der westlichen Scale | Inductions-stoss Nr. | Elongationsbeobachtungen an der östlichen | Elongationsbeobachtungen an der westlichen Scale |
|---|---|---|---|---|---|
| | 675,0 | 645,6 | | 759,8 | 732,6 |
| | 944,2 | 919,2 | 8. | | |
| 1. | | | | 687,5 | 658,0 |
| | 849,3 | 824,6 | | 930,0 | 907,5 |
| 2. | | | 9. | | |
| | 601,8 | 570,1 | | 855,7 | 831,0 |
| | 1014,0 | 994,0 | 10. | | |
| 3. | | | | 594,3 | 562,4 |
| | 769,0 | 741,9 | | 1022,0 | 1002,0 |
| 4. | | | 11. | | |
| | 680,0 | 650,4 | | 764,8 | 737,2 |
| | 934,8 | 912,1 | 12. | | |
| 5. | | | | 684,5 | 655,1 |
| | 851,9 | 828,0 | | 934,3 | 908,9 |
| 6. | | | 13. | | |
| | 596,3 | 563,7 | | 856,1 | 831,7 |
| | 1018,0 | 998,2 | 14. | | |
| 7. | | | | | |

| Inductions-stoss Nr. | Elongationsbeobachtungen an der östlichen | westlichen Scale | Inductions-stoss Nr. | Elongationsbeobachtungen an der östlichen | westlichen Scale |
|---|---|---|---|---|---|
| 14. | | | 38. | | |
| | 593,0 | 560,8 | | 594,9 | 562,9 |
| | 1022,0 | 1002,3 | | 1020,0 | 1000,3 |
| 15. | | | 39. | | |
| | 761,3 | 734,0 | | 759,1 | 731,7 |
| 16. | | | 40. | | |
| | 688,0 | 658,6 | | 690,8 | 661,4 |
| | 927,1 | 904,3 | | 925,8 | 903,0 |
| 17. | | | 41. | | |
| | 857,4 | 833,0 | | 862,3 | 837,9 |
| 18. | | | 42. | | |
| | 592,3 | 560,7 | | 589,0 | 556,8 |
| | 1021,1 | 1001,1 | | 1025,9 | 1006,2 |
| 19. | | | 43. | | |
| | 761,8 | 734,3 | | 762,2 | 734,8 |
| 20. | | | 44. | | |
| | 687,3 | 658,0 | | 688,5 | 659,2 |
| | 928,9 | 906,3 | | 928,0 | 905,3 |
| 21. | | | 45. | | |
| | 857,9 | 833,1 | | 861,3 | 836,9 |
| 22. | | | 46. | | |
| | 593,1 | 561,2 | | 590,2 | 558,4 |
| | 1020,9 | 1001,0 | | 1024,3 | 1004,7 |
| 23. | | | 47. | | |
| | 764,6 | 737,2 | | 759,7 | 732,1 |
| 24. | | | 48. | | |
| | 685,9 | 656,4 | | 691,1 | 661,8 |
| | 930,9 | 908,4 | | 924,8 | 902.1 |
| 25. | | | 49. | | |
| | 856,8 | 832,1 | | 861,9 | 837,3 |
| 26. | | | 50. | | |
| | 595,9 | 564,0 | | 589,0 | 557,1 |
| | 1020,1 | 1000,3 | | 1028,5 | 1008,9 |
| 27. | | | 51. | | |
| | 763,4 | 736,2 | | 757,0 | 729,3 |
| 28. | | | 52. | | |
| | 687,0 | 657,5 | | 693,2 | 664,0 |
| | 929,0 | 906,8 | | 923,0 | 900,2 |
| 29. | | | 53. | | |
| | 858,9 | 834,1 | | 864,9 | 840,4 |
| 30. | | | 54. | | |
| | 592,0 | 560,0 | | 585,8 | 553,8 |
| | 1022,5 | 1002,9 | | 1028,5 | 1008,7 |
| 31. | | | 55. | | |
| | 762,9 | 735,6 | | 755,3 | 727,9 |
| 32. | | | 56. | | |
| | 687,0 | 657,7 | | 695,2 | 666,2 |
| | 928,5 | 906,0 | | 921,8 | 898,8 |
| 33. | | | 57. | | |
| | 859,1 | 834,7 | | 865,3 | 841,0 |
| 34. | | | 58. | | |
| | 593,1 | 561,1 | | 587,0 | 554,9 |
| | 1022,2 | 1002,4 | | 1027,9 | 1008,1 |
| 35. | | | 59. | | |
| | 765,0 | 737,8 | | 759,5 | 731,9 |
| 36. | | | 60. | | |
| | 686,2 | 656,9 | | 692,1 | 663,0 |
| | 931,1 | 908,8 | | 924,1 | 901,6 |
| 37. | | | 61. | | |
| | 856,0 | 851,3 | | 863,1 | 838,7 |
| 38. | | | 62. | | |

| Inductions-stoss Nr. | Elongationsbeobachtungen an der östlichen | Scale westlichen | Inductions-stoss Nr. | Elongationsbeobachtungen an der östlichen | Scale westlichen |
|---|---|---|---|---|---|
| 62. | | | 76. | | |
| | 588,1 | 556,3 | | 693,0 | 663,8 |
| | 1026,7 | 1006,9 | | 924,6 | 901,8 |
| 63. | | | 77. | | |
| | 760,2 | 732,8 | | 863,0 | 838,6 |
| 64. | | | 78. | | |
| | 690,5 | 661,1 | | 588,8 | 556,9 |
| | 925,8 | 903,0 | | 1027,9 | 1008,0 |
| 65. | | | 79. | | |
| | 861,7 | 837,0 | | 759,3 | 732,0 |
| 66. | | | 80. | | |
| | 589,8 | 557,9 | | 691,1 | 662,4 |
| | 1027,2 | 1007,6 | | 923,9 | 961,2 |
| 67. | | | 81. | | |
| | 760,3 | 733,0 | | 862,4 | 838,0 |
| 68. | | | 82. | | |
| | 691,2 | 662,0 | | 589,7 | 557,8 |
| | 925,9 | 903,1 | | 1025,8 | 1005,8 |
| 69. | | | 83. | | |
| | 862,5 | 838,0 | | 760,2 | 732,9 |
| 70. | | | 84. | | |
| | 589,0 | 557,2 | | 691,1 | 661,7 |
| | 1027,0 | 1007,3 | | 925,9 | 903,2 |
| 71. | | | 85. | | |
| | 758,0 | 730,3 | | 860,8 | 836,0 |
| 72. | | | 86. | | |
| | 692,7 | 663,3 | | 591,8 | 559,7 |
| | 923,8 | 900,9 | | 1024,3 | 1004,6 |
| 73. | | | 87. | | |
| | 864,8 | 840,1 | | 760,2 | 733,0 |
| 74. | | | 88. | | |
| | 586,6 | 554,5 | | 690,2 | 660,9 |
| | 1028,5 | 1008,8 | | 927,9 | 905,1 |
| 75. | | | | | |
| | 758,9 | 751,3 | | | |
| 76. | | | | | |

Diese ganze Reihe von Inductionsbeobachtungen, woraus für einen Inductionsstoss 88 Bestimmungen an jeder von den beiden Scalen gewonnen werden, ist von zwei Beobachtern und einem Gehülfen, welcher den Inductor drehte, in Zeit von 40 Minuten gemacht worden.

Obiger Übersicht der Beobachtungen sind endlich noch folgende Hülfsbeobachtungen beizufügen:

1) Schwingungsbeobachtungen (bei geschlossener Kette) am 1. Juni 1878.

| | | | |
|---|---|---|---|
| | 1048,4 | | 813,0 |
| 11h 44m 12s,70 | | 12h 21m 28s,80 | |
| | 417,2 | | 745,3 |
| 29,55 | | 44,70 | |
| | 1042,0 | | 811,9 |
| 46,70 | | 22 2,35 | |
| | 423,7 | | 647,1 |
| 45 3,25 | | 18,80 | |
| | 1035,8 | | 809,9 |
| 20,65 | | 36,20 | |
| | 429,5 | | 648,1 |
| 37,10 | | 52,70 | |
| | 1030,0 | | 810,0 |

2) Torsionsbeobachtungen am 9. Juni 1878.

Abstand des Spiegels von der Scale = 4025,77 Scalentheile.

| Torsionskreis. | Nadelstand. |
|---|---|
| 280° | 786,60 |
| 370° | 798,36 |
| 190° | 772,10 |
| 280° | 786,38 |

Beabachtungsresultate.

Erstens ergiebt sich aus den oben angeführten Schwingungsbeobachtungen (bei offener Kette) nach der *Gauss*'schen Anleitung die Schwingungsdauer $T'$ für unendlich kleine Bögen, und das logarithmische Decrement $\lambda'$ (für den Modulus $m = 0,43429$):

$$T' = 16{,}''9647$$
$$\lambda' = 0{,}002017.$$

Hiebei hing die Nadel an einem Faden, dessen Torsionskraft $\Theta$ im Verhältniss zur magnetischen Directionskraft $mT$ durch die unter (2) angeführten Hülfsbeobachtungen bestimmt wird, nämlich:

$$\frac{\Theta}{mT} = \frac{1}{965},$$

woraus sich die Schwingungsdauer der Nadel ohne Fadenelasticität ergiebt:

$$T = 16{,}''9735.$$

Zweitens aus den angeführten Inductionsbeobachtungen ergiebt sich die gesuchte, der Nadel vom Inductor durch einen Inductionsstoss ertheilte, Geschwindigkeit $C$ nicht unmittelbar, sondern es muss zur Bestimmung von $C$ zunächst die Gleichgewichtslage der Nadel zur Zeit aller einzelnen Elongationen gefunden werden.

Für die Zeit mitten zwischen zwei Elongationsbeobachtungen, zwischen denen kein Inductionsstoss stattgefunden hat, z. B. zwischen den Elongationen 601,8 und 1014,0 nach dem 2. Inductionsstosse, ergiebt sich diese Gleichgewichtslage (für Zeiten langsamer Declinationsänderungen, wie sie für solche Messungen stets zu wählen sind) sehr leicht. Sie würde durch den Mittelwerth 807,9 bestimmt sein, wenn keine Abnahme der Schwingungsbögen stattfände; bei der aus

den Hülfsbeobachtungen (für die Schwingungsdauer bei geschlossener Kette) sich ergebenden Abnahme im Verhältniss von nahe 401 : 400 muss dieser Mittelwerth um $\frac{1}{400}$ der Differenz beider Beobachtungen 1014,0 — 601,8 der letztern genähert werden. Der Ruhestand für diese Zeit ist also 807,9 — $\frac{1014,0 - 601,8}{400} = 808,93$.

Ist nun die Gleichgewichtslage für alle diese Zeiten vor dem 1., ferner zwischen dem 2. und 3., 4. und 5. etc. Inductionsstoss bestimmt, so leuchtet ein, dass bei langsamen Declinationsänderungen, wie sie bei diesen Messungen stets vorausgesetzt werden dürfen, auch für alle andern Beobachtungszeiten die Gleichgewichtslagen der Nadel mit grosser Sicherheit interpolirt werden können, wie folgende Tafel für den Zeitraum der ersten 8 Inductionsstösse zeigt.

| Inductionsstoss Nr. | An der östlichen Scale | | | An der westlichen Scale | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | Beobachtung | Ruhelage | Elongation | Beobachtung | Ruhelage | Elongation |
| | 675,0 | 808,8 | — 133,8 | 645,6 | 783,1 | — 137,5 |
| | 941,2 | 808,8 | + 132,4 | 919,2 | 783,1 | + 136,1 |
| 1. | | | | | | |
| | 849,3 | 808,8 | + 40,5 | 824,6 | 783,1 | + 41,5 |
| 2. | | | | | | |
| | 601,8 | 808,9 | — 207,1 | 570,1 | 783,1 | — 213,0 |
| | 1014,0 | 808,9 | + 205,1 | 994,0 | 783,1 | + 210,9 |
| 3. | | | | | | |
| | 769,0 | 808,5 | — 39,5 | 741,9 | 782,5 | — 40,6 |
| 4. | | | | | | |
| | 680,0 | 808,0 | — 128,0 | 650,4 | 781,9 | — 131,5 |
| | 934,8 | 808,0 | + 126,8 | 912,1 | 781,9 | + 130,2 |
| 5. | | | | | | |
| | 851,9 | 807,9 | + 44,0 | 828,0 | 781,9 | + 46,1 |
| 6. | | | | | | |
| | 595,5 | 807,8 | — 212,3 | 563,7 | 782,0 | — 218,3 |
| | 1018,0 | 807,8 | + 210,2 | 998,2 | 782,0 | + 216,2 |
| 7. | | | | | | |
| | 759,8 | 808,6 | — 48,8 | 732,6 | 782,7 | — 50,1 |
| 8. | | | | | | |
| | 687,5 | 809,4 | — 121,9 | 658,0 | 783,4 | — 125,4 |
| | 930,0 | 809,4 | + 120,6 | 907,5 | 783,4 | + 124,1 |

Aus der Elongation der Nadel vor jedem Inductionsstosse lässt sich nun aber die nächstfolgende Elongation berechnen, welche ohne Inductionsstoss stattgefunden haben würde; sie würde nämlich, wenn keine Abnahme der Schwingungsbögen stattfände, der vor dem Inductionsstosse entgegengesetzt gleich sein; mit Rücksicht auf die wirklich vorhan-

dene Abnahme ergiebt sich dieselbe durch Multiplication der vorhergehenden Elongation mit $-\frac{100}{101}$.

Die Differenz der wirklichen Elongation, welche aus der Beobachtung nach dem Inductionsstosse sich ergeben hat, von jener berechneten ist die Wirkung des Inductionsstosses, nämlich die Elongationsweite der durch einen Inductionsstoss in Schwingung gesetzten ruhenden Nadel, welche mit $\alpha$ bezeichnet werden soll.

Für diese Wirkung erhält man hienach aus den oben angeführten Beobachtungen Bestimmungen nach Scalentheilen, wie folgende Tafel zeigt, denen sowohl für die östliche als auch für die westliche Scale noch Columnen beigefügt sind, welche zu besserer Übersicht die stets positiven Differenzen zweier auf einander folgenden Inductionsstösse, nämlich eines positiven und darauf folgenden negativen Stosses, geben.

Östliche Scale.

| Inductionsstoss Nr. | Wirkung desselben | Differenzen auf einander folgender Stösse |
|---|---|---|
| 1. | + 40,5 + 131,1 = + 171,6 | 338,6 |
| 2. | − 207,1 + 40,1 = − 167,0 | |
| 3. | − 39,5 + 203,0 = + 163,5 | 330,6 |
| 4. | − 128,0 − 39,1 = − 167,1 | |
| 5. | + 44,0 + 125,5 = + 169,5 | 338,2 |
| 6. | − 212,3 + 43,6 = − 168,7 | |
| 7. | − 48,8 + 208,0 = + 159,2 | 329,4 |
| 8. | − 121,9 − 48,3 = − 170,2 | |
| etc. | | |

Westliche Scale.

| Inductionsstoss Nr. | Wirkung desselben | Differenzen auf einander folgender Stösse |
|---|---|---|
| 1. | + 41,5 + 134,7 = + 176,2 | 348,1 |
| 2. | − 213,0 + 41,1 = − 171,9 | |
| 3. | − 40,6 + 208,9 = + 168,3 | 340,0 |
| 4. | − 131,5 − 40,2 = − 171,7 | |
| 5. | + 46,1 + 128,9 = + 175,0 | 347,7 |
| 6. | − 218,3 + 45,6 = − 172,7 | |
| 7. | − 50,1 + 214,0 = + 163,9 | 338,9 |
| 8. | − 125,4 − 49,6 = − 175,0 | |
| etc. | | |

Die Wirkung der ersten 8 Inductionsstösse ist hienach an der östlichen Scale = 1336,8, an der westlichen = 1374,7 Scalen-

theile; für 1 Inductionsstoss im Mittel an der östlichen 167,10, an der westlichen 171,84. Folgende Tafel giebt die Wirkungen sämmtlicher 88 Inductionsstösse, wie sie sich aus den oben angeführten Inductionsbeobachtungen ergeben.

| Inductions-stösse | Östliche Scale | | Westliche Scale | |
|---|---|---|---|---|
| | Wirkung | Mittlere Differenz zweier Stösse | Wirkung | Mittlere Differenz zweier Stösse |
| 1— 8. | 1336,8 | 334,20 | 1374,7 | 343,68 |
| 9—16. | 1337,5 | 334,38 | 1375,6 | 343,90 |
| 17—24. | 1333,5 | 333,38 | 1370,4 | 342,60 |
| 25—32. | 1334,9 | 333,72 | 1371,6 | 342,90 |
| 33—40. | 1329,1 | 332,28 | 1368,6 | 342,15 |
| 41—48. | 1338,0 | 334,50 | 1376,1 | 344,02 |
| 49—56. | 1335,6 | 333,90 | 1372,3 | 343,08 |
| 57—64. | 1335,8 | 333,95 | 1372,9 | 343,22 |
| 65—72. | 1336,5 | 334,12 | 1373,3 | 343,32 |
| 73—80. | 1338,0 | 334,50 | 1374,8 | 343,70 |
| 81—88. | 1331,9 | 332,98 | 1369,1 | 342,28 |
| | 14687,6 | | 15099,4 | |

wonach die Wirkung eines Inductionsstosses im Mittel aus allen

an der östlichen Scale = 166,9045 Scalentheile
an der westlichen Scale = 171,584 Scalentheile.

Nun ist aber nach der angegebenen Entfernung des Spiegels von der Scale der Bogenwerth eines Theiles

$$\text{der östlichen Scale} = \frac{1}{2.3917,17},$$

$$\text{der westlichen Scale} = \frac{1}{2.4025,77};$$

folglich beträgt die Wirkung eines Inductionsstosses, gemessen durch den Bogenwerth $\alpha$ der von ihm hervorgebrachten Ablenkung der ruhenden Magnetnadel, nach den Beobachtungen

$$\text{an der östlichen Scale } \alpha = \frac{166,9045}{2.3917,17} = 0,0213042$$

$$\text{an der westlichen Scale } \alpha = \frac{171,584}{2.4025,77} = 0,0213107,$$

im Mittel also $\alpha = 0,0213075$.

Aus dieser von einem Inductionsstosse hervorgebrachten Ablenkung der Nadel $= \alpha$ wird nun nach der von *Gauss* ge-

gebenen Anleitung die von einem Inductionsstosse der Nadel ertheilte Drehungsgeschwindigkeit $= C$ bestimmt. Es ist nämlich

$$C = \alpha \cdot \frac{\pi}{T'} \cdot e^{\frac{\lambda}{m\pi} \operatorname{arc\,tg} \frac{m\pi}{\lambda}},$$

wo $\lambda$ das logarithmische Decrement für Abnahme der Schwingungsbögen bei geschlossener Kette, $m$ den Modulus des Systems und $T'$ die Schwingungsdauer der von magnetischer und elastischer Kraft $(MT + \Theta)$ getriebenen Nadel bezeichnet.

Aus den oben angeführten Hülfsbeobachtungen ergiebt sich das logarithmische Decrement, bei geschlossener Kette, für den Modulus $m = 0{,}43429$,

$$\lambda = 0{,}0043477.$$

Da nun ferner aus den Schwingungs- und Inductionsbeobachtungen

$$T' = 16'',9647$$

und

$$\alpha = 0{,}0213075$$

gefunden worden ist, so ergiebt sich

$$C = 0{,}0039656.$$

Da nun ferner aus den angeführten Schwingungsbeobachtungen, mit Rücksicht auf die durch die Hülfsbeobachtungen bestimmte Torsion, die Schwingungsdauer ohne Torsion

$$T = 16'',9735$$

gefunden worden ist; da endlich aus der Construction des Inductors und Multiplicators die beiden Constanten $p$ und $q$ bekannt sind, nämlich

$$p = 2.622200000,$$
$$q = 9{,}64015;$$

so ergiebt sich der gesuchte Widerstand des Normalleiters bei einer Temperatur von $20^{\circ},85$ cent., nach absolutem Maasse:

$$w = \pi^2 \frac{pq}{CT^2} = 10{,}36085 \cdot 10^{10}.$$

## Zweite Widerstandsmessung des Normalleiters.

### Übersicht der Beobachtungen.

Leipzig, alte Sternwarte 1879. August 5.

200 Millimeter lange Nadel.

3149,1 Millimeter oder Scalentheile, Abstand des östlichen Spiegels von der Scale;

3781,5 Millimeter oder Scalentheile, Abstand des westlichen Spiegels von der Scale.
26°,7 cent. Temperatur des Inductors,
27°,2 cent. Temperatur des Multiplicators.

### Schwingungsbeobachtungen
(bei offener Kette).

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $8^h$ $29^m$ | $23^s.70$ | 1157,3 | $9^h$ $1^m$ | $47^s.90$ | 967,2 |
| | 40.50 | 327,9 | 2 | 5,50 | 516.0 |
| | 57,70 | 1151,8 | | 22,00 | 965,8 |
| 30 | 14,80 | 332,8 | | 39,70 | 518,1 |
| | 31,65 | 1146,1 | | 56,10 | 963,4 |
| | 48,95 | 337,8 | 3 | 13,75 | 519,6 |
| | | 1140,7 | | | 961,8 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $11^h$ $22^m$ | $47^s.75$ | 1096,8 | $11^h$ $54^m$ | $3^s.70$ | 932,8 |
| 23 | 4,90 | 857,8 | | 21,65 | 512,2 |
| | 21,45 | 1093,9 | | 37,90 | 930,4 |
| | 38,95 | 361,7 | | 55,65 | 514,2 |
| | 55,85 | 1089,0 | 55 | 12,00 | 928,0 |
| 24 | 13,00 | 365,0 | | 29.90 | 516,4 |
| | | 1085,8 | | | 926,0 |

26°,66 cent. Temperatur des Inductors,
26°,90 cent. Temperatur des Multiplicators.

### Inductionsbeobachtungen
### nach der Zurückwerfungsmethode.

26°,50 cent. Temperatur des Inductors,
26°,74 cent. Temperatur des Multiplicators.

| Östliche Scale | | | | | | Westliche Scale | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Inductions-stoss Nr. | Elongation | | Inductions-stoss Nr. | Elongation | | Inductions-stoss Nr. | Elongation | | Inductions-stoss Nr. | Elongation | |
| | I | II | | III | IV | | I | II | | III | IV |
| 1. | 707,3 | 833,8 | 2. | 839,1 | 702,9 | 1. | 661,0 | 813,0 | 2. | 820,0 | 656,0 |
| 3. | 704,6 | 836,0 | 4. | 835,4 | 706,2 | 3. | 658,0 | 816,0 | 4. | 815,5 | 660,0 |
| 5. | 704,6 | 836,0 | 6. | 835,9 | 706,0 | 5. | 658,0 | 816,1 | 6. | 816,0 | 659,0 |
| 7. | 704,1 | 836,3 | 8. | 835,7 | 706,3 | 7. | 657,3 | 816,8 | 8. | 815,9 | 660,1 |
| 9. | 703,3 | 836,9 | 10. | 835,2 | 706,7 | 9. | 656,5 | 817,0 | 10. | 815,3 | 660,3 |
| 11. | 702,0 | 838,7 | 12. | 832,9 | 708,9 | 11. | 655,8 | 819,5 | 12. | 812,3 | 663,1 |
| 13. | 701,3 | 838,9 | 14. | 833,0 | 708,8 | 13. | 654,0 | 819,7 | 14. | 812,6 | 663,0 |
| 15. | 701,3 | 838,9 | 16. | 832,9 | 708,8 | 15. | 654,0 | 819,6 | 16. | 812,1 | 666,0 |
| 17. | 700,7 | 839,4 | 18. | 832,2 | 709,2 | 17. | 653,1 | 820,2 | 18. | 811,8 | 663,6 |
| 19. | 701,1 | 839,0 | 20. | 832,3 | 709,0 | 19. | 653,9 | 819,9 | 20. | 811,9 | 663,3 |
| 21. | 701,0 | 838,8 | 22. | 832,7 | 708,4 | 21. | 653,9 | 819,7 | 22. | 812,1 | 662,7 |
| 23. | 701,1 | 838,4 | 24. | 832,8 | 708,3 | 23. | 653,9 | 819,1 | 24. | 812,3 | 662,3 |

| Östliche Scale | | | | | | Westliche Scale | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Inductions-stoss Nr. | Elongation | | Inductions-stöss Nr. | Elongation | | Inductions-stoss Nr. | Elongation | | Inductions-stoss Nr. | Elongation | |
| | I | II | | III | IV | | I | II | | III | IV |
| 25. | 701,6 | 838,0 | 26. | 833,3 | 707,8 | 25. | 654,1 | 818,8 | 26. | 813,0 | 661,8 |
| 27. | 701,8 | 837,7 | 28. | 833,0 | 707,8 | 27. | 654,8 | 818,1 | 28. | 812,5 | 661,9 |
| 29. | 701,2 | 838,0 | 30. | 832,3 | 708,1 | 29. | 654,0 | 818,7 | 30. | 811,8 | 662,0 |
| 31. | 700,3 | 838,1 | 32. | 831,6 | 708,3 | 31. | 653,0 | 818,9 | 32. | 810,9 | 662,3 |
| 33. | 699,1 | 838,9 | 34. | 830,6 | 708,8 | 33. | 651,5 | 819,0 | 34. | 809,8 | 663,0 |
| 35. | 699,0 | 838,7 | 36. | 830,1 | 708,7 | 35. | 651,3 | 819,6 | 36. | 809,2 | 663,0 |
| 37. | 698,9 | 838,5 | 38. | 830,8 | 708,0 | 37. | 651,1 | 819,1 | 38. | 809,9 | 662,0 |
| 39. | 698,0 | 839,1 | 40. | 829,7 | 708,6 | 39. | 650,2 | 819,9 | 40. | 808,8 | 662,8 |
| 41. | 698,1 | 838,5 | 42. | 829,5 | 708,2 | 41. | 650,1 | 819,1 | 42. | 808,2 | 662,2 |
| 43. | 698,1 | 838,2 | 44. | 829,7 | 707,8 | 43. | 650,2 | 818,9 | 44. | 808,8 | 661,9 |
| 45. | 698,6 | 837,7 | 46. | 829,5 | 707,6 | 45. | 650,8 | 818,1 | 46. | 808,5 | 661,5 |
| 47. | 697,3 | 838,2 | 48. | 829,1 | 708,0 | 47. | 649,5 | 819,0 | 48. | 808,0 | 662,0 |
| 49. | 696,7 | 838,2 | 50. | 828,2 | 708,3 | 49. | 648,3 | 818,9 | 50. | 806,9 | 662,3 |
| 51. | 696,2 | 838,8 | 52. | 827,3 | 708,9 | 51. | 648,0 | 819,5 | 52. | 805,8 | 663,1 |
| 53. | 695,1 | 840,0 | 54. | 826,8 | 709,6 | 53. | 646,7 | 821,0 | 54. | 804,6 | 664,0 |
| 55. | 694,3 | 840,0 | 56. | 826,3 | 709,1 | 55. | 645,9 | 821,0 | 56. | 804,7 | 663,3 |
| 57. | 694,9 | 839,5 | 58. | 826,0 | 709,7 | 57. | 646,2 | 820,3 | 58. | 804,0 | 664,1 |
| 59. | 695,0 | 839,1 | 60. | 826,6 | 709,1 | 59. | 646,3 | 819,9 | 60. | 804,8 | 663,3 |
| 61. | 694,6 | 839,9 | 62. | 828,2 | 707,9 | 61. | 645,9 | 820,9 | 62. | 806,9 | 662,0 |
| 63. | 696,9 | 837,8 | 64. | 828,9 | 707,6 | 63. | 648,8 | 818,2 | 64. | 807,8 | 661,7 |
| 65. | 696,4 | 838,2 | 66. | 828,3 | 707,3 | 65. | 648,0 | 818,9 | 66. | 807,0 | 661,2 |
| 67. | 696,9 | 837,4 | 68. | 828,0 | 707,8 | 67. | 648,8 | 818,0 | 68. | 806,5 | 661,8 |
| 69. | 695,9 | 838,8 | 70. | 827,6 | 709,0 | 69. | 647,7 | 819,5 | 70. | 806,0 | 663,2 |
| 71. | 695,7 | 839,3 | 72. | 826,8 | 709,2 | 71. | 647,2 | 820,1 | 72. | 805,0 | 663,8 |
| 73. | 694,6 | 839,6 | 74. | 826,1 | 709,2 | 73. | 646,0 | 820,5 | 74. | 804,2 | 663,5 |
| 75. | 694,3 | 839,7 | 76. | 826,4 | 709,1 | 75. | 645,8 | 820,7 | 76. | 804,6 | 663,2 |
| 77. | 694,7 | 839,3 | 78. | 826,0 | 709,6 | 77. | 646,0 | 820,2 | 78. | 804,0 | 664,0 |
| 79. | 694,1 | 840,7 | 80. | 824,7 | 710,8 | 79. | 645,1 | 821,9 | 80. | 802,7 | 665,3 |
| 81. | 694,0 | 840,8 | 82. | 825,4 | 710,7 | 81. | 645,0 | 821,9 | 82. | 803,4 | 665,0 |
| 83. | 693,8 | 841,1 | 84. | 825,7 | 710,8 | 83 | 644,9 | 822,2 | 84. | 803,8 | 665,3 |
| 85. | 694,1 | 841,2 | 86. | 825,7 | 710,7 | 85. | 645,5 | 822,2 | 86. | 803,9 | 665,2 |
| 87. | 694,9 | 840,7 | 88. | 825,7 | 710,3 | 87. | 645,9 | 821,7 | 88. | 803,8 | 664,9 |
| 89. | 693,0 | 841,2 | 90. | 824,6 | 711,0 | 89. | 644,0 | 822,5 | 90. | 802,4 | 665,6 |

## Hülfsbeobachtungen.

1) Schwingungsbeobachtungen bei geschlossener Kette am 4. August 1879.

28°,1 cent. Temperatur des Inductors,
27°,44 cent. Temperatur des Multiplicators.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 6h 23m | 34s,50 | 1207,0 | 6h 57m | 6s,10 | 838,0 |
| | | 262,3 | | | 632,9 |
| | 51,80 | 1188,2 | | 24,85 | 636,9 |
| 24 | 8,65 | 273,8 | | 40,15 | 632,1 |
| | 26,10 | 1177,7 | | 59,00 | 835,7 |
| | 42,65 | 283,7 | 58 | 14,30 | 636,6 |
| 25 | 0,15 | 1167,9 | | 33,10 | 831,1 |

2) Torsionsbeobachtungen am 4. August 1879.

3149,1 Abstand des östlichen Spiegels von der Scale,
3781,5 Abstand des westlichen Spiegels von der Scale,
26°,0 cent. Temperatur des Inductors.

| Torsionskreis | Westliche Scale Ruhelage |
|---|---|
| 161°,8 | 742,28 |
| 161°,7 + 2π | 806,13 |
| 161°,8 − 2π | 673,41 |
| 161°,9 + 2π | 800,75 |
| 161°,8 − 2π | 662,31 |
| 161°,9 + 2π | 799,80 |
| 161°,7 − 2π | 669,96 |
| 161°,8 − 4π | 622,37 |
| 161°,8 + 4π | 871,34 |
| 161°,8 | 722,28 |

---

## Beobachtungsresultate.

Erstens ergiebt sich aus den oben angeführten Schwingungsbeobachtungen bei offener Kette

$$T' = 17'',05635$$
$$\lambda' = 0,0022642.$$

Hiebei hing die Nadel an einem Faden, dessen Torsionskraft $\Theta$ im Verhältniss zur magnetischen Directionskraft $MT$ durch die unter (2) angeführten Hülfsbeobachtungen bestimmt wird, nämlich

$$\frac{\Theta}{MT} = 0,0013285,$$

woraus sich die Schwingungsdauer der Nadel ohne Fadentorsion ergiebt:

$$T = 17{,}''07905.$$

Zweitens, über die oben angeführten Inductionsbeobachtungen ist zunächst zu bemerken, dass sie ganz nach der Methode der Zurückwerfung ausgeführt worden sind, wodurch sie sich von den früheren, am 13. Juni 1878 ausgeführten, Beobachtungen unterscheiden, wo zur Vergrösserung der Nadelschwingungen die Zurückwerfungsmethode mit der Multiplicationsmethode verbunden worden war. Die Vergleichung dieser beiden Methoden war jedenfalls nicht ohne Interesse.

Aus obiger, von zwei Beobachtern und einem Gehülfen in 50 Minuten nach der Zurückwerfungsmethode ausgeführten Beobachtungsreihe, welche für die Wirkung eines Inductionsstosses 90 an der östlichen und ebensoviel an der westlichen Scale gemachte Bestimmungen enthält, ergiebt sich nun nach bekannten Vorschriften aus der Differenz der Beobachtungen der I. und III. Columne ein grösserer Schwingungsbogen $A$, nämlich an der östlichen Scale $= \frac{131{,}689}{6298{,}2} = 0{,}0209093$, an der westlichen Scale $= \frac{158{,}310}{7563} = 0{,}0209324$, im Mittel

$$A = 0{,}0209208;$$

aus der Differenz der Beobachtungen der II. und IV. Columne ergiebt sich ein kleinerer Schwingungsbogen $B$, an der östlichen Scale $= \frac{130{,}202}{6298{,}2} = 0{,}020673$, an der westlichen Scale $= \frac{156{,}649}{7563}$ $= 0{,}0207125$, im Mittel

$$B = 0{,}0206928.$$

$A$ zu $B$ steht im Verhältniss zweier auf einander folgenden Schwingungsbögen, wodurch das logarithmische Decrement (für den Modulus $m = 0{,}43429$) bestimmt ist, nämlich

$$\lambda = \log \frac{A}{B} = 0{,}0043489.$$

Es ist hiebei zu beachten, dass die Methode der Zurückwerfung zur Bestimmung des logarithmischen Decrements nur bei schneller Abnahme der Schwingungsbögen geeignet ist, und dass in vorliegendem Falle, wo diese Abnahme nur etwa ein

Prozent beträgt, keine genaue Bestimmung erwartet werden kann. Zu genauerer Bestimmung sind daher schon unter den Hülfsbeobachtungen Schwingungsbeobachtungen bei geschlossener Kette angeführt worden, aus denen der Werth dieses Decrements genauer erhalten wird, nämlich

$$\lambda = 0{,}005537.$$

Anders verhält es sich aber mit Bestimmung der der Nadel durch einen Inductionsstoss ertheilten Geschwindigkeit, wozu solche nach der Zurückwerfungsmethode ausgeführte Beobachtungen, auch bei schwacher Dämpfung, sehr wohl geeignet sind.

Diese mit $C$ bezeichnete Geschwindigkeit ist:

$$C = \frac{\sqrt{\left(\pi^2 + \frac{\lambda'^2}{m^2}\right)}}{T'} \cdot \frac{A^2 + B^2}{2\sqrt{AB}} \cdot \left(\frac{B}{A}\right)^{\frac{1}{\pi}\operatorname{arc\,tg}\frac{\lambda}{m\pi}}$$

und setzt man darin die gefundenen Werthe

$$T' = 17{,}05635$$
$$\lambda' = 0{,}0022642$$
$$\lambda = 0{,}005537$$
$$A = 0{,}0209208$$
$$B = 0{,}0206928$$

so erhält man:

$$C = 0{,}0038326.$$

Nun war aber die Schwingungsdauer der Nadel ohne Torsion

$$T = 17{,}07905$$

aus den oben angeführten Schwingungsbeobachtungen bei offener Kette gefunden worden; folglich ergiebt sich hieraus und aus dem Werthe der beiden Constanten

$$p = 2.622200000$$
$$q = 9{,}64015$$

der gesuchte Widerstand des Normalleiters bei einer Temperatur von 26°,62 cent., nach absolutem Maasse:

$$w = \pi^2 \frac{pq}{CT^2} = 10{,}5907 \cdot 10^{10}.$$

Da die Beobachtungen am 5. August 1879 nach der Zurückwerfungsmethode gemacht worden sind, so ist dar-

aus der Widerstand $w$ auch in der auf diese Methode begründeten besondern Weise berechnet worden, welche am schnellsten zum Ziele führte. Doch lassen sich dieselben Beobachtungen auch in der Weise wie die früheren vom 13. Juni 1878 berechnen, wodurch im Einzelnen mehr Einsicht und genauere Vergleichung aller Inductionsstösse unter einander gewonnen wird, wie folgende danach berechnete Tafel beweist.

| Inductionsstoss Nr. | Östliche Scale | Westliche Scale | Inductionsstoss Nr. | Östliche Scale | Westliche Scale | Inducti-onsstoss Nr. | Östliche Scale | Westliche Scale |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | 31. | 130,16 | 156,95 | 61. | 130,58 | 157,45 |
| 2. | 130,54 | 157,07 | 32. | 129,73 | 156,15 | 62. | 131,95 | 158,76 |
| 3. | 132,94 | 159,95 | 33. | 130,72 | 157,16 | 63. | 130,36 | 156,31 |
| 4. | 129,97 | 155,74 | 34. | 129,96 | 156,05 | 64. | 130,28 | 156,61 |
| 5. | 129,47 | 154,67 | 35. | 129,92 | 156,69 | 65. | 129,72 | 157,64 |
| 6. | 129,84 | 156,56 | 36. | 129,72 | 155,66 | 66. | 130,58 | 157,10 |
| 7. | 130,20 | 155,40 | 37. | 129,68 | 156,24 | 67. | 129,93 | 156,82 |
| 8. | 129,99 | 156,65 | 38. | 130,37 | 157,60 | 68. | 129,54 | 155,81 |
| 9. | 130,58 | 157,18 | 39. | 131,11 | 157,97 | 69. | 131,21 | 157,36 |
| 10. | 130,24 | 156,73 | 40. | 130,26 | 157,09 | 70. | 129,92 | 156,12 |
| 11. | 131,72 | 157,89 | 41. | 129,92 | 156,64 | 71. | 130,27 | 157,04 |
| 12. | 129,53 | 155,87 | 42. | 130,02 | 155,88 | 72. | 129,77 | 155,87 |
| 13. | 129,97 | 156,56 | 43. | 130,05 | 156,89 | 73. | 130,49 | 157,06 |
| 14. | 130,08 | 156,57 | 44. | 130,17 | 156,78 | 74. | 130,10 | 156,41 |
| 15. | 130,07 | 156,70 | 45. | 129,66 | 156,22 | 75. | 130,34 | 157,02 |
| 16. | 130,03 | 154,76 | 46. | 129,68 | 156,04 | 76. | 130,51 | 156,94 |
| 17. | 130,57 | 155,75 | 47. | 130,56 | 157,39 | 77. | 130,12 | 157,01 |
| 18. | 129,99 | 156,55 | 48. | 130,18 | 156,61 | 78. | 129,68 | 155,91 |
| 19. | 129,65 | 156,21 | 49. | 130,46 | 157,44 | 79. | 130,66 | 157,62 |
| 20. | 129,77 | 156,20 | 50. | 129,87 | 156,46 | 80. | 129,42 | 155,87 |
| 21. | 129,73 | 156,30 | 51. | 130,42 | 157,21 | 81. | 129,53 | 156,39 |
| 22. | 130,21 | 156,51 | 52. | 129,66 | 155,97 | 82. | 129,90 | 156,43 |
| 23. | 129,97 | 156,40 | 53. | 130,83 | 157,18 | 83. | 130,17 | 157,11 |
| 24. | 130,07 | 156,52 | 54. | 129,95 | 156,76 | 84. | 130,27 | 156,66 |
| 25. | 129,62 | 156,44 | 55. | 130,39 | 157,05 | 85. | 130,17 | 156,84 |
| 26. | 130,13 | 156,88 | 56. | 130,59 | 157,06 | 86. | 130,22 | 156,48 |
| 27. | 129,86 | 155,33 | 57. | 130,09 | 156,95 | 87. | 129,83 | 156,49 |
| 28. | 129,74 | 155,89 | 58. | 129,59 | 155,80 | 88. | 130,01 | 156,13 |
| 29. | 130,16 | 156,74 | 59. | 129,39 | 155,96 | 89. | 130,97 | 157,95 |
| 30. | 129,68 | 156,18 | 60. | 129,96 | 156,37 | 90. | 130,06 | 156,42 |

Obige Tafel giebt für jeden Inductionsstoss die von ihm der Nadel (wenn sie sich in Ruhe befunden hätte) ertheilte Ablenkung in Scalentheilen, welche an der östlichen Scale mit 6298,2, an der westlichen mit 7563 dividirt den Ab-

lenkungsbogen in Theilen des Halbmessers giebt. Der Mittelwerth aller dieser Bestimmungen ist:

für die östliche Scale = 0,02067

für die westliche Scale = 0,02071,

im Mittel aus beiden

$$\alpha = 0{,}02069,$$

und hieraus ergiebt sich, da $T' = 17''05635$ und $\lambda = 0{,}005537$ ist,

$$C = \alpha \cdot \frac{\pi}{T'} \cdot e^{\frac{\lambda}{m\pi} \operatorname{arc\,tg} \frac{m\pi}{\lambda}} = 0{,}003835,$$

und ferner, da $T = 17''{,}07905$ und $\log pq = 10{,}07905$ ist,

$$w = \pi^2 \frac{pq}{C\,T^2} = 10{,}584 \cdot 10^{10},$$

also ein von dem vorhergefundenen nicht merklich verschiedener Werth.

Der Mittelwerth von $w$ aus obigen beiden Bestimmungen ist

$$w = 10{,}587 \cdot 10^{10},$$

der hiernach bei einer Temperatur von 26°,62 cent. des Normalleiters als rein absoluter Widerstand zu betrachten ist, wenn bei so geringem Unterschiede von dem Vorzug, den die letztere Berechnung durch genauere Vergleichung aller einzelnen Inductionsstösse zu verdienen scheint, abgesehen wird.

## Dritte Widerstandsmessung des Normalleiters.

Die beiden vorhergehenden Messungen als erste Proben beweisen, dass auf dem eingeschlagenen Wege mit den beschriebenen Instrumenten der beabsichtigte Zweck sich wohl erreichen lasse. Der Unterschied der beiden Messungsresultate ist sehr gering, es ist nämlich

nach der ersten Messung, $w = 10{,}36085 \cdot 10^{10}$,
bei 20°,85 cent. Temperatur,

und nach der zweiten Messung, $w = 10{,}58700 \cdot 10^{10}$,
bei 26°,62 cent. Temperatur;

und dieser kleine Unterschied ist fast ganz auf Rechnung des Temperaturunterschieds von 5°,77 cent., welcher dabei stattgefunden hat, zu setzen.

Dieses günstige Resultat der ersten Messungen kann zum Beweise dienen, dass die angewandten Mittel, wenn sie auch noch der Vervollkommnung fähig sind, doch dem Zwecke im Wesentlichen schon jetzt genügen.

Was die Messungsoperationen im engeren Sinne betrifft, so sind dieselben durch die gewählte Messungsmethode auf blosse Zeit- und Längenmessung reducirt, wovon die ersteren, durch die schon erwähnte Mitwirkung seitens der Sternwarte, alle wünschenswerthe Sicherheit und Genauigkeit gewährten, was von den Längenmessungen nicht in gleichem Grade gilt. Indessen haben auch diese, wie die Übereinstimmung der Resultate beweist, im Wesentlichen genügt, und nur zu grösserer Sicherheit und Erleichterung der auszuführenden Messungen wird noch möglichst Sorge zu tragen sein für festere Aufstellung der Instrumente, soweit es die Festigkeit des Gebäudes gestattet, und für möglichste Erleichterung der bei jeder Messung zu wiederholenden Prüfungen, insbesondere des Abstandes der beiden Scalen von einander und der richtigen Begrenzung der Inductionsstösse durch leicht stellbare und gut zu fixirende Hemmungen des drehbaren Inductors.

Ein Umstand jedoch bedarf bei diesen Messungen noch einer eingehenderen Erörterung, nämlich die Wahl des zur Nadel dienenden Magnets, welche bei der getroffenen Einrichtung im Grunde noch ganz frei gelassen ist, indem nur das Schiffchen, in welches der zur Nadel dienende Magnet eingelegt werden soll, gegeben ist.

Bei den ersten Probeversuchen war nun ein 200 Millimeter langer Magnet als Nadel eingelegt worden, dessen Schwingungsdauer 17 Secunden betrug, die bei einiger Übung sich hinreichend gross zur Ausführung der Inductionsstösse und Beobachtungen ergab. Diese Nadellänge war etwa der fünfte Theil vom Durchmesser des Multiplicators, woraus sich ergab, dass die Vertheilungsweise des Magnetismus in der Nadel nur von sehr geringem Einfluss sein konnte; doch schien es wünschenswerth, für diesen Einfluss, so klein er sein mochte, eine nähere Kenntniss aus Beobachtungen zu gewinnen, was durch eine blosse Vertauschung der Nadeln bei den Messungen, z. B. der 200 Millimeter langen Nadel mit einer 100 Millimeter langen, leicht erreicht werden konnte.

Es soll daher den beiden vorhergehenden Widerstands-

messungen noch eine dritte, mit 100 Millimeter langer Nadel ausgeführte, Messung beigefügt werden. Die Beobachtungen sind wieder, wie bei der zweiten Messung, nach der Zurückwerfungsmethode gemacht worden, am 7. August 1879.

Für den vorliegenden Zweck bedarf es nach den vorausgeschickten Proben keiner ausführlichen Beschreibung aller Beobachtungen, sondern es genügt eine kurze Anführung der aus den Beobachtungen gewonnenen Resultate.

## Beobachtungsresultate.

Erstens aus den Schwingungsbeobachtungen bei offener Kette hat sich ergeben:

$$T' = 30\overset{''}{,}6139$$
$$\lambda' = 0{,}003791.$$

Die Torsionskraft des Fadens, an welchem die Nadel hing, im Verhältniss zur magnetischen Directionskraft war:

$$\frac{\Theta}{MT} = 0{,}005035,$$

woraus sich die Schwingungsdauer ohne Fadentorsion ergiebt:

$$T = 30\overset{''}{,}6908.$$

Temperatur des Inductors 24°,53 cent., des Multiplicators 24°,64 cent.

Zweitens aus den Inductionsbeobachtungen, nach der Methode der Zurückwerfung, ergeben sich der grössere und kleinere Schwingungsbogen im Mittel aus den Beobachtungen an der östlichen und westlichen Scale

$$A = 0{,}011468, \qquad B = 0{,}0114055.$$

Hieraus würde sich das logarithmische Decrement für die Abnahme der Schwingungsbögen (für den Modulus $m = 0{,}43429$) ergeben $= \log \frac{A}{B} = 0{,}002373$, was aber bei seiner Kleinheit viel genauer aus Schwingungsbeobachtungen bei geschlossener Kette bestimmt werden kann und gefunden worden ist:

$$\lambda = 0{,}003967.$$

Die der Nadel durch einen Inductionsstoss ertheilte Geschwindigkeit $C$ wird nun aus den gefundenen Grössen:

$$
\begin{aligned}
T' &= 30''\!,6139\\
\lambda' &= 0,003791\\
\lambda &= 0,003967\\
A &= 0,011468\\
B &= 0,011405
\end{aligned}
$$

berechnet, nämlich

$$C = \frac{\sqrt{\left[\pi^2 + \left(\frac{\lambda'}{m}\right)^2\right]}}{T'} \cdot \frac{A^2 + B^2}{2\sqrt{AB}} \cdot \left(\frac{B}{A}\right)^{\frac{1}{\pi}\,\mathrm{arc\,tg}\,\frac{\lambda}{m\pi}}$$

Man findet hieraus

$$C = 0,0011737,$$

und, da $\log \pi^2 pq = 11,073346$ gegeben und die Schwingungsdauer $T$ (ohne Torsion)

$$T = 30''\!,6908$$

aus Beobachtungen bestimmt worden ist, ergiebt sich der Normalleiterwiderstand bei 24°,58 cent. Temperatur

$$w = \pi^2 \frac{pq}{CT^2} = 10,7098 \cdot 10^{10}.$$

Mit derselben 100 Millimeter langen Nadel, mit welcher die zuletzt beschriebene Messung ausgeführt worden ist, sind am nämlichen und den folgenden Tagen noch mehrere Messungen von verschiedenen Beobachtern gemacht und es ist daraus gefunden worden:

am 7. Aug. $w = 10,755 \cdot 10^{10}$ bei 24°,45 cent. des Inductors
24°,56 cent. des Multiplicators
am 13. Aug. $w = 10,148 \cdot 10^{10}$ bei 18°,00 cent. des Inductors
17°,44 cent. des Multiplicators
am 15. Aug. $w = 10,622 \cdot 10^{10}$ bei 20°,86 cent. des Inductors
20°,86 cent. des Multiplicators
am 16. Aug. $w = 10,613 \cdot 10^{10}$ bei 20°,94 cent. des Inductors
20°,21 cent. des Multiplicators
am 17. Aug. $w = 10,655 \cdot 10^{10}$ bei 21°,53 cent. des Inductors
21°,96 cent. des Multiplicators.

Jede von diesen Messungen war ungefähr in der Zeit von zwei Stunden ausgeführt worden, wobei hier immer zwei Beobachter und ein Gehülfe für die Inductordrehung zusammen gewirkt hatten. Es waren hiebei alle Inductionsbeobachtungen an beiden Scalen gleichzeitig gemacht worden, was etwas grös-

sere Sicherheit gewährt, aber nicht unbedingt nothwendig ist: würden diese Beobachtungen nur an einer Scale gemacht, so könnte die ganze Messung in der gegebenen Zeit von einem Beobachter mit einem Gehülfen ausgeführt werden.

Die angeführten Resultate von 8 Widerstandsmessungen, von denen die 3 ersten genauer beschrieben worden sind, gelten nun zwar alle für denselben Normalleiter, aber nicht für dieselbe Temperatur, sondern es war die Temperatur des Normalleiters nach obigen Angaben im Mittel:

bei der

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| ersten | Messung, | wo $w = 10{,}36085 \cdot 10^{10}$, | $t = 20^{\circ}{,}85$ | cent. |
| zweiten | » | » $w = 10{,}5907 \cdot 10^{10}$, | $t = 26^{\circ}{,}62$ | » |
| dritten | » | » $w = 10{,}7098 \cdot 10^{10}$, | $t = 24^{\circ}{,}58$ | » |
| vierten | » | » $w = 10{,}755 \cdot 10^{10}$, | $t = 24^{\circ}{,}50$ | » |
| fünften | » | » $w = 10{,}148 \cdot 10^{10}$, | $t = 17^{\circ}{,}72$ | » |
| sechsten | » | » $w = 10{,}622 \cdot 10^{10}$, | $t = 20^{\circ}{,}86$ | » |
| siebenten | » | » $w = 10{,}613 \cdot 10^{10}$, | $t = 20^{\circ}{,}57$ | » |
| achten | » | » $w = 10{,}655 \cdot 10^{10}$, | $t = 20^{\circ}{,}74$ | » |

Abgesehen von der Temperatur findet noch der Unterschied statt, dass die beiden ersten Messungen mit einer 200 Millimeter langen Galvanometernadel, alle anderen mit einer 100 Millimeter langen Nadel gemacht worden waren.

Nach bekannten Beobachtungen können diese bei verschiedenen Temperaturen des Normalleiters gemachten Widerstandsmessungen leicht auf eine mittlere Temperatur, z. B. von 24° cent., reducirt werden, nämlich durch Multiplication des gefundenen Werthes von $w$ mit dem Fatcor $(1 + 0{,}00371 \cdot \Theta)$, wo $\Theta$ die Differenz bezeichnet, um welche die Temperatur des Normalleiters unter 24° cent. war. Es ergiebt sich hiernach der Widerstand des Normalleiters bei 24° cent.

| | | | |
|---|---|---|---|
| aus der | ersten | Messung | $w = 10{,}48166 \cdot 10^{10}$ |
| » » | zweiten | » | $w = 10{,}48776 \cdot 10^{10}$ |
| » » | dritten | » | $w = 10{,}68656 \cdot 10^{10}$ |
| » » | vierten | » | $w = 10{,}735 \cdot 10^{10}$ |
| » » | fünften | » | $w = 10{,}382 \cdot 10^{10}$ |
| » » | sechsten | » | $w = 10{,}7458 \cdot 10^{10}$ |
| » » | siebenten | » | $w = 10{,}7478 \cdot 10^{10}$ |
| » » | achten | » | $w = 10{,}7441 \cdot 10^{10}$. |

Beachtet man endlich noch, dass die ersten beiden Messungen

mit einer 200 mm, die 6 letzten Messungen mit einer 100 mm langen Nadel gemacht worden waren, so leuchtet ein, dass eine genaue Vergleichung dieser Messungen noch eine andere Reduction derselben, nämlich auf unendlich kleine Nadellänge, fordert.

Die Nadellänge von 200 mm war nahezu nur $\frac{1}{5}$ des Multiplicatordurchmessers, die Nadellänge von 100 mm also nur $\frac{1}{10}$. Für so kleine Nadellängen ergiebt sich leicht, dass die Correction des Widerstands $w$ wegen der Nadellänge dem Quadrate der Nadellänge sehr nahe proportional sein müsse, bei 200 mm langer Nadel also 4 Mal grösser als bei 100 mm langer Nadel, und dass folglich der Unterschied der mit beiden Nadeln ausgeführten Messungen 3 Mal grösser sein soll, als die ganze an den mit der kleineren Nadel ausgeführten Messungen anzubringende Correction.

Es ergiebt sich nun der mit der längeren Nadel gemessene Widerstand des Normalleiters bei 24° cent. Temperatur im Mittel aus den beiden ersten hier näher beschriebenen Messungen $= 10,4847 \cdot 10^{10}$; der mit der kürzeren Nadel gemessene Widerstand bei derselben Temperatur aus der dritten, ebenfalls hier näher beschriebenen Messung $= 10,68656 \cdot 10^{10}$; folglich der dritte Theil ihrer Differenz

$$= 0,06728 \cdot 10^{10}$$

als Correction für die mit 100 mm langer Nadel gemachten Messungen, und ferner die Correction für die mit 200 mm langer Nadel gemachten Messungen viermal grösser

$$= 0,26912 \cdot 10^{10}.$$

Nach diesen Correctionen erhält man endlich den Widerstand $w$ des Normalleiters bei 24° cent. Temperatur

aus der ersten Messung $= 10,75079 \cdot 10^{10}$
» » zweiten » $= 10,75689 \cdot 10^{10}$
» » dritten » $= 10,75384 \cdot 10^{10}$,

im Mittel also aus diesen 3 Messungen

$$w = 10,75384 \cdot 10^{10}.$$

---

Nachdem auf die beschriebene Weise ein Normalleiter hergestellt worden ist, dessen Widerstand jederzeit nach absolutem Maasse genau bestimmt werden kann, so ist dadurch der Weg gebahnt zu stetem Gebrauche nicht blos des absoluten Widerstandsmaasses, sondern überhaupt zum Gebrauche lauter absoluter Maasse in der ganzen Elektrodynamik.

Die Elektrodynamik bietet drei Arten von Grössen für Messungen dar, nämlich elektromotorische Kräfte, Leitungswiderstände und Stromintensitäten, die nach den *Ohm*'schen Gesetzen in solcher Beziehung zu einander stehen, dass, wenn die Grössen zweier Arten gemessen werden können, die Grössen der dritten Art durch Rechnung daraus bestimmt werden können.

Nun können Stromintensitäten aus Fernwirkungen der Ströme auf Magnete oder andere Ströme nach absolutem Maasse bestimmt oder gemessen werden, nämlich mit Hülfe von Galvanometern und Dynamometern; kommen also zu diesen absoluten Strommessungen nun noch absolute Widerstandsmessungen hinzu, so ist dadurch der Weg auch für absolute Messungen elektromotorischer Kräfte gebahnt.

Es ist aber zu diesem Zwecke nothwendig, nicht blos einen Normalleiter zu haben, dessen Widerstand zu jeder Zeit nach absolutem Maasse bestimmt werden kann, sondern es wird ausserdem erfordert, jederzeit auf dem Wege der Beobachtung auch über Gleichheit oder Ungleichheit zweier Leiter entscheiden und dadurch zur Herstellung von Widerstandsscalen nach absolutem Maasse in Stand gesetzt zu werden. Die zur Ausführung solcher Beobachtungen zu treffenden Einrichtungen sollen zum Gegenstand genauerer Erörterung in einer künftigen Abhandlung gemacht werden.

Solche Einrichtungen vorausgesetzt, kann auch die Kenntniss elektromotorischer Kräfte nach absolutem Maasse aus gewonnener Kenntniss absoluter Widerstände und Stromintensitäten erlangt werden, wie aus folgendem Beispiele sich näher ergiebt, welches zeigt, wie absolute Maassbestimmungen elektromotorischer Kräfte einer *Volta*'schen Säule oder einer Inductionsmaschine und deren Änderungen zugleich mit den Widerständen derselben und deren Änderungen gewonnen werden können.

Setzt man voraus, was entweder wirklich stattfindet oder

leicht herzustellen ist, dass die Widerstände des Inductors und Multiplicators gleich seien, und bezeichnet mit $e$ und $x$ die elektromotorische Kraft und den Widerstand der Säule oder Inductionsmaschine zu Anfang, ferner mit $e + \varepsilon$ und $x + \xi$ dieselben zu irgend einer späteren Zeit, und bezeichnet endlich drei zu Anfang gemessene Stromintensitäten mit $i^0$, $i'$ und $i''$, und dieselben zu jener spätern Zeit mit $i_0$, $i_,$ und $i_{,,}$, wo nämlich $i^0$ und $i_0$ die Stromintensitäten der Säule oder Inductionsmaschine sind, wenn dieselbe blos durch den den Multiplicator bildenden Theil des Normalleiters geschlossen wird, folglich der Widerstand der Kette $= x + \frac{1}{2}w$ ist; ferner $i'$ und $i_,$ dieselbe Bedeutung für die durch den ganzen Normalleiter geschlossene Kette haben, der Widerstand der Kette folglich $= x + w$ ist; endlich $i''$ und $i_{,,}$ auch dieselbe Bedeutung haben, aber für die von beiden Theilen des Normalleiters, Multiplicator und Inductor neben einander, geschlossene Kette, deren Widerstand folglich $= x + \frac{1}{4}w$ ist.

Nach den *Ohm*'schen Gesetzen ergiebt sich hieraus für die Ströme zu Anfang:

$$i^0 = \frac{e}{x + \frac{1}{2}w}, \qquad i' = \frac{e}{x + w}, \qquad i'' = \frac{e}{x + \frac{1}{4}w};$$

für die Ströme zur andern Zeit:

$$i_0 = \frac{e + \varepsilon}{x + \xi + \frac{1}{2}w}, \qquad i_, = \frac{e + \varepsilon}{x + \xi + w}, \qquad i_{,,} = \frac{e + \varepsilon}{x + \xi + \frac{1}{4}w}.$$

Aus den drei ersten Gleichungen folgt:

$$2\,\frac{x}{w} = \frac{i'}{i^0 - i'} - 1 = \frac{1}{2}\,\frac{i''}{i'' - i^0} - 1;$$

aus den drei letzten Gleichungen folgt:

$$2\,\frac{x + \xi}{w} = \frac{i_,}{i_0 - i_,} - 1 = \frac{1}{2}\,\frac{i_{,,}}{i_{,,} - i_0} - 1;$$

und hieraus wird erhalten:

$$i'' = \frac{2\,i^0\,i'}{3\,i' - i^0} \quad \text{und} \quad i_{,,} = \frac{2\,i_0\,i_1}{3\,i_, - i_0}.$$

Es brauchen daher nur die beiden Ströme $i^0$ und $i'$ zu Anfang und die beiden Ströme $i_0$ und $i_,$ zur anderen Zeit gemessen zu werden, weil der dritte Strom $i''$ oder $i_{,,}$ aus ihnen berechnet werden kann. Die Messung der beiden Ströme $i''$ und $i_{,,}$ dient daher nur zur Vergleichung der berechneten Werthe mit den

gemessenen, und dadurch zur Prüfung der Genauigkeit der Messungen.

Aus der Differenz obiger Werthe von $\frac{x}{w}$ und $\frac{x + \xi}{w}$ ergiebt sich die Gleichung:

$$\frac{\xi}{w} = \frac{1}{4}\left(\frac{i_0}{i_0 - i_,} - \frac{i^0}{i^0 - i'}\right),$$

und aus obigen Gleichungen für $i^0$, $i'$, $i_0$ und $i_,$

$$e = (x + \tfrac{1}{2} w)\, i^0 = (x + w)\, i'$$
$$e + \varepsilon = (x + \xi + \tfrac{1}{2} w)\, i_0 = (x + \xi + w)\, i_,$$

woraus erhalten wird

$$\frac{e}{w} = \frac{1}{2}\,\frac{i^0\, i'}{i^0 - i'} \quad \text{und} \quad \frac{e + \varepsilon}{w} = \frac{1}{2}\,\frac{i_0\, i_,}{i_0 - i_,}$$

folglich

$$\frac{\varepsilon}{w} = \frac{1}{2}\left(\frac{i_0\, i_,}{i_0 - i_,} - \frac{i^0\, i'}{i^0 - i'}\right).$$

Es bedarf also, ausser den zu Anfang zu machenden Messungen der Ströme $i^0$ und $i'$, für jede andere Zeit nur noch der Messung der Ströme $i_0$ und $i_,$ um die Aenderung der elektromotorischen Kraft sowohl als auch des Widerstandes der Säule oder Inductionsmaschine in der Zwischenzeit zu erfahren, und diese beiden Messungen unterscheiden sich von einander blos dadurch, dass zwischen Säule (oder Inductionsmaschine) und Multiplicator der Inductor entweder ausgeschlossen bleibt oder eingeschaltet wird, was ohne Zeitverlust vermittelst eines Commutators leicht bewerkstelligt werden kann.

Werden die Ströme mit der Tangentenboussole gemessen, deren Multiplicator vom Normalleiter gebildet wird, so wird

$$i^0 = \frac{T}{q}\,\mathrm{tg}\, v^0, \quad i' = \frac{T}{q}\,\mathrm{tg}\, v', \quad i_0 = \frac{T}{q}\,\mathrm{tg}\, v_0, \quad i_, = \frac{T}{q}\,\mathrm{tg}\, v'$$

gefunden, wo $T$ die horizontale Componente des Erdmagnetismus, und $v^0$, $v'$, $v_0$, $v_,$ die beobachteten von den Strömen $i^0$, $i'$, $i^0$, $i_,$ hervorgebrachten Nadelablenkungen bezeichnen, und $q$ die aus der Construction des Multiplicators bekannte Constante. Substituirt man diese Werthe, so erhält man

$$\frac{\xi}{w} = \frac{1}{4}\left(\frac{\mathrm{tg}\, v_0}{\mathrm{tg}\, v_0 - \mathrm{tg}\, v_,} - \frac{\mathrm{tg}\, v^0}{\mathrm{tg}\, v^0 - \mathrm{tg}\, v'}\right)$$
$$\frac{\varepsilon}{w} = \frac{T}{2q}\left(\frac{\mathrm{tg}\, v_0\, \mathrm{tg}\, v_,}{\mathrm{tg}\, v_0 - \mathrm{tg}\, v_,} - \frac{\mathrm{tg}\, v^0\, \mathrm{tg}\, v'}{\mathrm{tg}\, v^0 - \mathrm{tg}\, v'}\right).$$

In allen Fällen, wo der absolute Werth der zu messenden elektromotorischen Kräfte besonders in Betracht kommt, dürfte es angemessen erscheinen, jeder solchen Beobachtungsreihe eine genaue Widerstandsmessung des Normalleiters vorausgehen und folgen zu lassen. Doch kann derselbe Zweck noch leichter und vollkommener dadurch erreicht werden, dass zwischen den angegebenen Strommessungen $i^0$, $i'$ und $i_0$, $i$, eine Beobachtungsreihe zur Bestimmung der bei einer blos aus Inductor und Multiplicator gebildeten Kette durch einen Inductionsstoss hervorgebrachten Nadelelongation $\alpha$ eingeschaltet wird, welche in einer ebensolchen Reihe von Inductionsbeobachtungen besteht, wie bei jeder Widerstandsmessung zur Bestimmung der Geschwindigkeit $C$ gemacht wurde.

Sind ausserdem aus vorher oder nachher gemachten Schwingungs- und Torsions-Beobachtungen die Werthe $T'$, $T$, $\lambda'$, $\lambda$ bekannt, so kann $C$ und $\alpha$ bestimmt werden und es wird $w = \pi^2 \frac{pq}{CT^2}$ gefunden. Die Untersuchung der elektromotorischen Kraft und des Widerstandes einer Säule oder Inductionsmaschine und deren Variationen wird dadurch selbständig und unabhängig von allen willkürlichen Voraussetzungen gemacht.

**W. Hankel,** *Ueber die Entwickelung polarer Elektricität in hemimorphen Krystallen durch Aenderung des Druckes in der Richtung der unsymmetrisch ausgebildeten Axen.*[1])

Die Herren *Jacques* und *Pierre Curie* haben die Entdeckung gemacht[2]), dass beim Zusammenpressen hemimorpher Krystalle in der Richtung ihrer unsymmetrisch ausgebildeten Axen, und ebenso auch wieder beim Nachlassen einer solchen Pressung an den Enden der genannten Axen entgegengesetzte Elektricitäten auftreten, und zwar in der Weise, dass jedes Ende beim Zusammendrücken gerade die entgegengesetzte Polarität zeigt, als beim Nachlasssen des Druckes. Sie stellen diese Vorgänge in Parallele mit der auf denselben Krystallen durch Aenderungen der Temperatur erzeugten Thermoelektricität, und halten sich zufolge ihrer Untersuchungen zu dem Ausspruche des nachstehenden allgemeinen Gesetzes berechtigt:

»Quelle que soit la cause déterminante, toutes les fois, qu'un cristal hémièdre à faces inclinées, non conducteur, se contracte, il y a formation de pôles électriques dans un certain sens; toutes les fois, que le cristal se dilate, le dégagement d'électricité a lieu en sens contraire.«

An dieses allgemeine Gesetz fügen sie noch folgenden Zusatz an: »Si cette manière de voir est exacte, les effets dus à la compression doivent être de même sens que ceux dus à l'échauffement dans une substance possédant suivant l'axe d'hémièdrie un coëfficient de dilatation negatif.«

Die Herren *J.* und *P. Curie* heben hervor, dass sich ihre Untersuchungen erstreckt haben auf die Krystalle der Blende,

---

1) Vorgetragen in der Sitzung vom 24. Nov. 1880.

2) Développement, par pression, de l'électricité polaire dans les cristaux hémièdres à faces inclinées. Note de MM. *Jacques* et *Pierre Curie*, présentée par M. *Friedel*. Compt. rend. hebd. d. Séances de l'Acad. des Sciences. Bd. 91. S. 294 u. 295.

des chlorsauren Natrons, des Boracits, des Turmalins, des Bergkrystalls, des Kieselzinkerzes, des Topases, der gewöhnlichen Weinsäure, des Zuckers und des Seignettesalzes.

Das obige Gesetz, so sehr es auch durch die in ihm aufgestellte einfache Beziehung zwischen den Verschiebungen der Moleküle und der infolge derselben auftretenden Elektricitäten für sich einnehmen möchte, hat aber, wie ich zeigen werde, keine allgemeine Gültigkeit. Während bei einem Theile der hemimorphen Krystalle Druck und Erkaltung, und ebenso wieder Nachlassen des Druckes und Erwärmung die gleiche elektrische Polarität erzeugen, tritt bei einem andern Theile der umgekehrte Vorgang ein; es geben bei diesen letzteren Krystallen Druck und Erwärmung, und ebenso wieder Nachlassen des Druckes und Erkaltung dieselbe Art von elektrischer Spannung an den Enden der hemimorphen Axe.

Unter den von *J.* und *P. Curie* zum Beweise der Allgemeingültigkeit des aufgestellten Gesetzes angeführten Krystallen finden sich zunächst drei (die Blende, das chlorsaure Natron und das Seignettesalz), deren thermoelektrisches Verhalten noch nicht hinreichend festgestellt ist. Ich lasse dieselben also für jetzt bei Seite. Ferner findet sich in jener Aufzählung der Topas. Die Krystalle dieses Minerales sind aber, wie ich bereits im Jahre 1869 in meiner Abhandlung *über die thermoelektrischen Eigenschaften des Topases*[1]) nachgewiesen habe, nicht hemimorph. Es bleiben also aus dem obigen Verzeichnisse als thermoelektrisch sicher bestimmte hemimorph gebildete Krystalle nur übrig: der Boracit, der Turmalin, der Bergkrystall, das Kieselzinkerz, die gewöhnliche Weinsäure und der Rohrzucker.

Ausser den von *J.* und *P. Curie* untersuchten Substanzen existiren nun aber noch einige sehr ausgezeichnet hemimorphe und zugleich stark thermoelektrische: das neutrale weinsaure Kali[2]), der Milchzucker[3]) und der Struvit.

Bei sechs der genannten Substanzen, dem Boracit, dem Tur-

1) Abhandl. d. K. Sächs. Ges. d. Wissensch. Bd. XIV. S. 370.

2) Die hemimorphe Bildung und das thermoelektrische Verhalten des neutralen weinsauren Kalis habe ich bereits 1841 in Pogg. Annal. Bd. 53. S. 620 dargelegt.

3) Das thermoelektrische Verhalten des Milchzuckers werde ich in einer späteren Abhandlung erläutern.

malin, dem Kieselzinkerz, der Weinsäure, dem Rohrzucker und dem Milchzucker, geben nun Pressung und Abkühlung die gleiche Polarität, und ebenso wieder Nachlassen des Druckes und Erwärmung. Bei den drei übrigen, dem Bergkrystalle, dem neutralen weinsauren Kali und dem Struvit, erzeugt dagegen Pressung dieselbe Elektricität wie Erwärmung, und Nachlassen des Druckes dieselbe wie Erkaltung.

Von diesen drei letzten Substanzen sind das neutrale weinsaure Kali und der Struvit von *J.* und *P. Curie* nicht geprüft worden, wohl aber der Bergkrystall. Es bedarf daher einer Erläuterung, wie die Genannten dazu gekommen sind, ihre Beobachtungen am Bergkrystalle als eine Bestätigung ihres Gesetzes zu betrachten, obwohl solche, wie zuvor angeführt, thatsächlich mit demselben im Widerspruche stehen.

In meiner Abhandlung *über die thermoelektrischen Eigenschaften des Bergkrystalles* [1]) habe ich im Jahre 1866 nachgewiesen, dass die Bergkrystalle in der Richtung der Nebenaxen hemimorph gebildet sind, und daher auch an den Enden jeder der drei Nebenaxen entgegengesetzte elektrische Pole tragen. Beim Erwärmen sind diejenigen Seitenkanten des sechsseitigen Prismas eines einfachen Bergkrystalles, an welchen die sogenannten Rhombenflächen und die Flächen der trigonalen Trapezoeder liegen, negativ, beim Abkühlen positiv; dagegen zeigen die entgegengesetzten Axenenden, wo jene Flächen also fehlen, bei steigender Temperatur positive und bei sinkender negative Polarität.

Im Jahre 1879 hat nun Herr *Ch. Friedel* [2]) den Bergkrystall von Neuem untersucht. Er verband eine in kochendem Wasser erhitzte Metallkugel durch einen dünnen Draht mit dem Elektrometer und beobachtete den Ausschlag desselben, wenn die heisse Kugel auf die Kante des Bergkrystalles (oder vielmehr auf eine an ihrer Stelle angeschliffene Fläche) gelegt wurde. Aus diesen Versuchen glaubte er auf eine gerade entgegengesetzte elektrische Vertheilung, als solche von mir angegeben, schliessen zu müssen.

In einer im Laufe dieses Jahres (1880) in dem ersten Hefte

---

1) Abhandl. d. K. Sächs. Ges. d. Wissensch. Bd. XIII. S. 323—392.

2) Sur la pyroélectricité dans la topaze, la blende et le quartz. Bullet. de la société minéralogique de France. Bd. 2. S. 31.

dieser Berichte S. 71 veröffentlichten Abhandlung[1]) habe ich aber nachgewiesen, dass Herr *Friedel* mittelst seines Verfahrens gar nicht die infolge von Temperaturänderungen in der Masse des Krystalles erzeugten elektrischen Spannungen, sondern eine ganz andere Erscheinung, nämlich die von mir in jener Abhandlung dargelegte directe Umwandlung der Wärmestrahlung in Elektricität beobachtet hat. Bei diesem letzteren Vorgange entsteht beim Eintritt der Strahlung dieselbe elektrische Polarität, wie solche sonst auf dem erkaltenden Bergkrystalle wahrgenommen wird. Indem Herr *Friedel* die unmittelbar nach dem Auflegen der eisernen Kugel gefundene elektrische Spannung der Erhitzung zuschrieb, wurden seine Angaben über die durch Temperaturänderungen erzeugten Polaritäten gerade die entgegengesetzten von den thatsächlich durch diese Aenderungen hervorgerufenen.

Wenn nun die Herren *J.* und *P. Curie* die von Herrn *Friedel* angegebene elektrische Vertheilung am Bergkrystalle als der Aenderung der Temperatur entstammend zu Grunde legten, so mussten sie der Ansicht sein, dass ihr oben ausgesprochenes Gesetz auch für den Bergkrystall Geltung habe, während doch in Wirklichkeit die an ihm beobachteten Erscheinungen jenem Gesetze widersprechen. Dieser Widerspruch lässt sich auch nicht mittelst des oben S. 144 angeführten Zusatzes beseitigen; denn der Bergkrystall besitzt in der Richtung der Nebenaxen einen positiven Ausdehnungscoefficienten, und zwar ist derselbe sogar grösser als in der Richtung der Hauptaxe.

---

1) Ueber eine directe Umwandlung der Schwingungen der strahlenden Wärme in Elektricität.

Druck von Breitkopf & Härtel in Leipzig.

Tafel I.

Projection des Torsionskreises.

Fig. 5.

¼ nat. Groesse.

Torsionskreis.

r

r'

Spiegel.

Spiegel.

# Jahresbericht

der

# Fürstlich Jablonowski'schen Gesellschaft.

---

Leipzig, im April 1881.

Die von der historisch-nationalökonomischen Section für das Jahr 1880 gestellte Preisfrage über die griechischen Wörter der lateinischen Sprache hat drei umfangreiche Bearbeitungen gefunden, nämlich

A mit dem Motto: Ingeniorum Graeciae flatu impellimur. Plin.

B mit dem Motto: Qui stadium etc.

C mit einem Motto aus Horaz.

Alle drei Arbeiten sind von der Gesellschaft sorgfältig geprüft worden. Dieselbe erkennt in allen dreien den großen Fleiß an, mit welchem die sehr bedeutende Masse der lateinischen aus dem Griechischen entlehnten Wörter gesammelt und geprüft ist. Namentlich ist die mit B bezeichnete Schrift aus weit angelegten Vorarbeiten hervorgegangen. Allein der Preis konnte der letzteren schon deshalb nicht zuerkannt werden, weil sie einerseits in einigen wichtigen Stücken gegen A zurückstand, andrerseits aber größtentheils in einem unfertigen Zustande vorlag. Gleichmäßiger ist C durchgeführt, aber bei dieser Arbeit vermisste man fast ganz die Feststellung der sprachlichen Kriterien, welche die Grundlage der ganzen Untersuchung bilden musste.

Da nun die Abhandlung A in allen wesentlichen Punkten den gestellten Forderungen entsprach und sich namentlich durch vollständige Durchführung, durch genaue, umsichtige und selbständige Behandlung der sprachwissenschaftlichen Grundlage, so wie durchaus durch Sauberkeit der Ausführung und Beherrschung des Stoffes, so wie der einschlägigen Litteratur empfahl, so beschloss die Gesellschaft dieser mit dem Motto: Ingeniorum Graeciae flatu impellimur. Plin. bezeichneten Arbeit den Preis zu ertheilen, jedoch unter der Bedin-

gung, dass der Verfasser sich bereit erklärte, einige mehr auf die äußere Anordnung als auf den innern Gehalt der Arbeit bezügliche Rathschläge sich anzueignen und die danach verbesserte Schrift noch einmal in druckfertigem Zustande vorzulegen. Für diesen Fall beschloss die Gesellschaft für ihn mit Bezug auf den Umfang der Aufgabe und die erneute Bemühung den Preis von 700 Mark auf 1000 Mark zu erhöhen.

Als Verfasser ergab sich nach Öffnung des Couverts

**Dr. Oscar Weise**

Gymnasiallehrer in Eisenberg (Sachsen-Altenburg).

Derselbe machte sich auf geschehene Anfrage anheischig, der von der Gesellschaft gestellten Bedingung zu entsprechen. Den unter B und C bezeichneten Bewerbern steht es frei, sich ihre Arbeiten unter Angabe des vollständigen Mottos der betreffenden Schrift von dem Secretär des Jahres 1880 zurückgeben zu lassen.

Auf die für 1880 ausgeschriebene Aufgabe der mathematisch-naturwissenschaftlichen Section ist eine Bewerbungsschrift nicht eingegangen.

---

Für die Jahre 1881 bis 1884 sind von der Gesellschaft folgende Preisaufgaben gestellt worden:

## I. Historisch-nationalökonomische Section.

### 1. Für das Jahr 1881.

Im Andenken an die Wünsche und Bestrebungen ihres erlauchten Stifters und in Erinnerung an die vortreffliche Lösung, die einst die Preisaufgabe über die polnische Geschichtschreibung des Mittelalters durch Herrn Professor Heinrich von Zeissberg gefunden, wünscht die Gesellschaft,

> Regesten der polnischen Könige von der Krönung Przemyslaws II. (1295) bis zum Tode König Alexanders (1506),

als eine unentbehrliche Grundlage für die Bearbeitung der polnischen Reichsgeschichte dieses Zeitraumes, hervorzurufen, indem sie sich die Regesten der beiden Sigismunde für den Fall einer glücklichen Lösung der vorliegenden Aufgabe als Thema für eine, vielleicht später zu stellende vorbehält. Die Art der Bearbeitung der Regesten wird sich allerdings nach der Natur des Stoffes richten müssen. Doch verlangt die Gesellschaft, dass die Ansprüche der heutigen Wissenschaft in Beziehung auf die einleitungsweise Besprechung der Kanzleiverhältnisse, auf die Angabe des Inhalts der einzelnen Urkunden, auf die Heranziehung der Schriftsteller u. s. w. *mutatis mutandis* in ähnlicher Weise erfüllt werden, wie dies etwa in der Bearbeitung der Regesten Kaiser Karls IV. durch Huber geschehen ist. Erforderlich ist vor Allem die Sammlung und Sichtung des gedruckten Materials, so erwünscht der Gesellschaft die Herbeiziehung neuen Stoffes aus Archiven auch sein würde. Am zweckmäßigsten erscheint der Gesellschaft der Gebrauch der lateinischen Sprache; doch soll auch der der deutschen Sprache nicht ausgeschlossen sein, in welchem Falle die Gesellschaft ihr Eigenthumsrecht durch Vorbehalt aller Rechte zu schützen suchen würde. Preis 700 Mark.

### 2. Für das Jahr 1882.

In der vergleichenden Grammatik der indogermanischen Sprachen treten gegenwärtig die Untersuchungen über den Vocalismus besonders hervor und haben bereits wichtige Resultate geliefert. Dabei sind die einzelnen Familien des indogermanischen Sprachstammes nicht gleichmäßig herangezogen worden, namentlich vermisst man eine systematische Behandlung der litauischen und slawischen Sprachen in dieser Beziehung; die Gesellschaft wünscht daher eine

vergleichende Darstellung des litauischen und slawischen Vocalismus,

und erwartet von einer solchen Arbeit zunächst, dass sie das Verhältniss des litauischen zum slawischen Vocalismus, das noch in vielen Punkten unklar ist, festzustellen suche, dann aber auch, dass sie den litauisch-slawischen Vocalismus in Beziehung setze zu den Theorien und Problemen, die in den neueren Arbeiten über den indogermanischen Vocalismus überhaupt niedergelegt sind. Preis 700 Mark.

3. Für das Jahr 1883.

Bei der hohen Bedeutung, welche in unserem »Zeitalter der großen Städte« diejenigen Krankheiten der Volkswirthschaft haben, die auf einem Hinauswachsen der Einwohnerzahl in den Großstädten über die Mittel zur Befriedigung ihrer Bedürfnisse, insbesondere ihres Wohnungsbedürfnisses beruhen, ist die Frage von Wichtigkeit, ob auch im Alterthume ähnliche Erscheinungen vorgekommen sind, und welche Mittel man zu ihrer Heilung damals versucht hat. Namentlich für Rom geben die literarischen, wie die gesetzgeberischen Quellen ziemlich ergiebigen Aufschluss; doch fehlt es auch für andere Großstädte nicht an Material. Die Gesellschaft wünscht nun

eine möglichst vollständige Zusammenstellung der Thatsachen, welche sich auf die Übervölkerung, zumal die Wohnungsnoth der antiken Großstädte beziehen.

Dabei würde also das Mittelalter auszuschließen sein, und z. B. Constantinopel nur für die Zeit vor Justinian in Betracht kommen. Andererseits wäre eine Berücksichtigung der mit der Wohnungsfrage so eng zusammenhängenden Fragen der Wasserversorgung und der Unrathsabfuhr durchaus erwünscht. Preis 700 Mark.

4. Für das Jahr 1884.

Die Grenze zwischen dem hochdeutschen und niederdeutschen Sprachgebiete zwischen Rhein und Elbe ist in den letzten Jahren Gegenstand gründlicher Untersuchungen ge-

wesen und die nach Maßgabe unserer Quellen zu erzielenden Resultate sind in der Hauptsache wohl als festgestellt zu betrachten. Anders steht es auf dem rechten Elbufer nach Osten zu. Hier ist weder der gegenwärtige Bestand genau und sicher festgestellt, noch sind die geschichtlichen Quellen herbeigezogen, um den früheren Bestand, so weit es möglich ist, zu constatieren. Die Gesellschaft wünscht daher

> eine Darstellung der geschichtlichen Entwicklung und des gegenwärtigen Bestandes der Grenze zwischen dem hochdeutschen und dem niederdeutschen Sprachgebiete östlich der Elbe.

Die Beigabe einer Karte wird dringend gewünscht. Preis 700 Mark.

## II. Mathematisch-naturwissenschaftliche Section.

1. Für das Jahr 1881

wird die, ursprünglich für 1877 gestellte, in diesem Jahr aber nicht beantwortete Preisfrage wiederholt.

Der nach Encke benannte und von diesem Astronomen während des Zeitraumes von 1819—1848 sorgfältig untersuchte Comet I. 1819, hat in seiner Bewegung Anomalien gezeigt, welche zu ihrer Erklärung auf die Hypothese eines widerstehenden Mittels geführt haben. Da indessen eine genauere Untersuchung der Bahn nur über einen beschränkten Theil des Zeitraums vorliegt, über welchen die Beobachtungen seit 1786 sich erstrecken, und die von Asten'schen Untersuchungen, wenigstens so weit dieselben bekannt geworden sind, noch zu keinem definitiven Resultate geführt haben, so ist eine vollständige Neubearbeitung der Bahn des Encke'schen Cometen um so mehr wünschenswerth, als die bisher untersuchten Bewegungen anderer periodischer Cometen keinen analogen widerstehenden Einfluss verrathen haben. Die Gesellschaft wünscht eine solche vollständige Neubearbeitung herbeizuführen, und stellt desshalb die Aufgabe:

die Bewegung des Encke'schen Cometen mit Berücksichtigung aller störenden Kräfte, welche von Einfluss sein können, vorläufig wenigstens innerhalb des seit dem Jahre 1848 verflossenen Zeitraums zu untersuchen.

Die ergänzende Bearbeitung für die frühere Zeit behält sich die Gesellschaft vor eventuell zum Gegenstand einer spätern Preisbewerbung zu machen. Preis 700 Mark.

## 2. Für das Jahr 1882.

Für manche weniger erforschte Gebiete der Krystallographie hat sich das Studium der durch Einwirkung von Lösungs- und Corrosionsmitteln auf den Krystallflächen erzeugten sog. Ätzfiguren in hohem Grade ersprießlich erwiesen. Einerseits ist es wünschenswerth, die zahlreichen, in dieser Hinsicht an Mineralien und künstlichen Krystallen gemachten, und in sehr verschiedenen Zeitschriften seit einer langen Reihe von Jahren mitgetheilten, nur lose unter einander zusammenhängenden Untersuchungen kritisch zu sammeln und von einem bestimmten wissenschaftlichen Gesichtspunkt aus zur einheitlichen Darstellung zu bringen, insbesondere aber auch die bisherigen Ermittelungen durch weitere neue zu vermehren und zu ergänzen, wobei noch die früher weniger erörterten Fragen Berücksichtigung verdienen, in welcher Weise die Form der Ätzeindrücke von der Natur des Ätzmittels und von der Verschiedenartigkeit der Krystallflächen abhängig ist, ferner, wie sich die Ätzeindrücke bei isomorphen Substanzen verhalten. Andererseits ist es aber von noch höherer Bedeutung, wenn solche ältere und selbständige neue Untersuchungen dazu verwerthet werden, durch Entwickelung neuer allgemein gültiger und berechtigter Sätze unsere Kenntnisse von den Cohäsions- und Structurverhältnissen der Krystalle zu erweitern und die Frage zu lösen, ob die Ätzfiguren die Form der den Krystall aufbauenden Molecüle wiedergeben.

Die Gesellschaft wünscht daher

eine Zusammenstellung unserer bisherigen Kenntnisse und der durch selbständige Untersuchungen nach den angegebenen Richtungen hin neugewonnenen Erfahrungen über die Ätzfiguren der Krystalle, ferner eine daraus sich ergebende Ableitung allgemeiner Sätze, welche für die Auffassung der Cohäsions- und Structurverhältnisse, so wie der Molecularbeschaffenheit der Krystalle von Wichtigkeit sind.

Preis 700 Mark.

3. Für das Jahr 1883.

Unser Mitglied, Herr W. Hankel, hat in seiner Abhandlung »über die photo- und thermoelektrischen Eigenschaften des Flussspathes (im 20. Bd. der Abh. der Königl. Sächs. Ges. d. Wiss., 12 Bd. d. Abh. der math.-phys. Klasse) den Nachweis geführt, dass auf farbigen Flussspathkrystallen durch die Einwirkung des Lichtes elektrische Spannungen erregt werden. Diese photoelektrische Erregung der bezeichneten Krystalle ist eine Folge der Einwirkung des Lichtes auf den in ihnen enthaltenen Farbstoff; die hierdurch eingeleiteten Vorgänge werden durch die Structur der Substanz in bestimmter Weise beeinflusst, so dass die elektrischen Vertheilungen in strenger Abhängigkeit von der Gestalt und dem Wachsthum der Krystalle erscheinen. Dieselben stehen ferner bei dem Flussspath in engster Beziehung zu den durch Temperaturänderungen erzeugten thermoelektrischen Spannungen, dergestalt, dass beim Belichten dieselben Polaritäten, wenn auch in größerer oder geringerer Intensität, auftreten, wie bei steigender Temperatur. Ob bei anderen Krystallformen und namentlich bei anderen Farbstoffen die eben erwähnte Beziehung fortbesteht, lässt sich im Voraus nicht entscheiden. Für eine weitere Verfolgung der elektrischen Wirkungen des

Lichtes werden wahrscheinlich nur sehr wenige Mineralien außer dem Flussspathe tauglich sein; dagegen steht zu erwarten, dass es gelingen werde, auf künstlich dargestellten, mit geeigneten Farbstoffen imprägnirten Krystallen die photoelektrischen Erscheinungen hervorzurufen.

Die Gesellschaft stellt daher als Preisaufgabe:

> Die Nachweisung und nähere Bestimmung der durch Einwirkung des Lichtes auf künstlich dargestellten und mit geeigneten Stoffen gefärbten Krystallen hervorgerufenen photoelektrischen Spannungen, so wie ihrer Beziehung zu den durch Temperaturänderungen erzeugten thermoelektrischen Erregungen.

Preis 700 Mark.

### 4. Für das Jahr 1884.

wiederholt die Gesellschaft die zunächst für 1880 ausgeschriebene, damals aber ohne Bearbeitung gebliebene Aufgabe.

Nachdem durch die embryologischen Untersuchungen der letzten Jahre der Nachweis erbracht ist, dass der Körper sämmtlicher Thiere — mit Ausschluss der sog. Protozoen — in ähnlicher Weise aus Keimblättern sich aufbaut, entsteht die Frage, ob der Antheil, welchen diese Blätter an der Entwickelung der einzelnen Organe und Gewebe nehmen, überall genau der gleiche ist oder nicht; eine Frage, die dann naturgemäß weiter zu der Untersuchung führt, ob dieser Antheil durch die specifischen Eigenschaften der Keimblätter oder durch anderweitige Momente bedingt ist. In Anbetracht der großen Bedeutung, welche die Entscheidung dieser Fragen für die Auffassung der thierischen Organisation hat, wünscht die Gesellschaft

> eine auf eigene Untersuchungen gegründete Kritik der Lehre von der Homologie der Keimblätter.

Da die zur Bearbeitung dieser Aufgabe nöthigen Untersuchungen einen längern Aufenthalt an der See nothwendig machen dürften, also ungewöhnliche Kosten verursachen, sieht sich die Gesellschaft veranlasst, den dafür ursprünglich festgesetzten Preis von 700 Mark auf 1000 Mark zu erhöhen.

---

Die anonym einzureichenden Bewerbungsschriften sind, wo nicht die Gesellschaft im besonderen Falle ausdrücklich den Gebrauch einer anderen Sprache gestattet, in deutscher, lateinischer oder französischer Sprache zu verfassen, müssen deutlich geschrieben und paginirt, ferner mit einem Motto versehen und von einem versiegelten Couvert begleitet sein, das auf der Außenseite das Motto der Arbeit trägt, inwendig den Namen und Wohnort des Verfassers angiebt. Die Zeit der Einsendung endet mit dem 30. November des angegebenen Jahres, und die Zusendung ist an den Secretär der Gesellschaft (für das Jahr 1881 Prof. Dr. W. Scheibner) zu richten. Die Resultate der Prüfung der eingegangenen Schriften werden durch die Leipziger Zeitung im März oder April des folgenden Jahres bekannt gemacht.

Die gekrönten Bewerbungsschriften werden Eigenthum der Gesellschaft.

**W. Roscher**, Präses.

**G. Curtius. W. Hankel. A. Leskien. R. Leuckart.**

**W. Scheibner. G. Voigt. F. Zarncke. F. Zirkel.**



Druck von Breitkopf & Härtel in Leipzig.

# BERICHTE

ÜBER DIE

# VERHANDLUNGEN

DER KÖNIGLICH SÄCHSISCHEN

# GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN

ZU LEIPZIG.

MATHEMATISCH-PHYSISCHE CLASSE.

DREIUNDDREISSIGSTER BAND.

1881.

LEIPZIG

BEI S. HIRZEL.

# INHALT.

Protector der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften

SEINE MAJESTÄT DER KÖNIG.

---

## Ehrenmitglied.

Seine Excellenz der Staatsminister des Cultus und öffentlichen Unterrichts, Herr *Carl Friedrich von Gerber*.

---

## Ordentliche einheimische Mitglieder der philologisch-historischen Classe.

Herr Geheimer Hofrath *Heinrich Leberecht Fleischer* in Leipzig, Secretär der philol.-histor. Classe.
- ——— ——— *Friedrich Zarncke* in Leipzig, stellvertretender Secretär der philol.-histor. Classe.
- ——— ——— *Georg Curtius* in Leipzig.
- Professor *Georg Ebers* in Leipzig.
- ——— *Adolf Ebert* in Leipzig.
- ——— *Alfred Fleckeisen* in Dresden.
- ——— *Gustav Hartenstein* in Jena.
- Hofrath *Max Heinze* in Leipzig.

Herr Professor und Universitäts-Oberbibliothekar *Christoph Ludolf Ehrenfried Krehl* in Leipzig.
- Geheimer Hofrath *Ludwig Lange* in Leipzig.
- Professor *August Leskien* in Leipzig.
- Oberschulrath *Carl Joachim Marquardt* in Gotha.
- Professor *Carl von Noorden* in Leipzig.
- Geheimer Hofrath *Johannes Adolph Overbeck* in Leipzig.
- —— —— *Otto Ribbeck* in Leipzig.
- Geheimer Rath *Wilhelm Roscher* in Leipzig.
- Professor *Anton Springer* in Leipzig.
- Geheimer Hofrath *Johann Ernst Otto Stobbe* in Leipzig.
- Professor *Georg Voigt* in Leipzig.
- —— *Moritz Voigt* in Leipzig.

---

## Ordentliche auswärtige Mitglieder der philologisch-historischen Classe.

Herr Professor *Conrad Bursian* in München.
- —— *Johann Gustav Droysen* in Berlin.
- —— *Hermann Alfred von Gutschmid* in Tübingen.
- —— *Theodor Mommsen* in Berlin.
- Geheimer Regierungsrath *Hermann Sauppe* in Göttingen.
- Kirchenrath *Eberhard Schrader* in Berlin.
- Professor *Gustav Seyffarth* in New-York.

---

## Ordentliche einheimische Mitglieder der mathematisch-physischen Classe.

Herr Geheimer Hofrath *Wilhelm Gottlieb Hankel* in Leipzig, Secretär der mathem.-phys. Classe.
- Professor *Wilhelm Scheibner* in Leipzig, stellvertretender Secretär der mathem.-phys. Classe.
- Oberbergrath *Hermann Credner* in Leipzig.

Herr Geheimer Rath *Moritz Wilhelm Drobisch* in Leipzig.
– Professor *Gustav Theodor Fechner* in Leipzig.
– —— *Wilhelm His* in Leipzig.
– —— *Johann August Ludwig Wilhelm Knop* in Leipzig.
– Geheimer Hofrath *Hermann Kolbe* in Leipzig.
– —— —— *Rudolph Leuckart* in Leipzig.
– —— —— *Carl Friedrich Wilhelm Ludwig* in Leipzig.
– Professor *Adolph Mayer* in Leipzig.
– —— *Carl Neumann* in Leipzig.
– Oberbergrath *Ferdinand Reich* in Freiberg.
– Hofrath *August Schenk* in Leipzig.
– Geheimer Hofrath *Oskar Schlömilch* in Dresden.
– Hofrath *Gustav Wiedemann* in Leipzig.
– Professor *Ferdinand Zirkel* in Leipzig.
– —— *Johann Carl Friedrich Zöllner* in Leipzig.

---

## Ordentliche auswärtige Mitglieder der mathematisch-physischen Classe.

Herr Professor *Heinrich Richard Baltzer* in Giessen.
– Geheimer Hofrath *Carl Gegenbaur* in Heidelberg.
– Professor *Adalbert Krüger* in Kiel.
– Regierungsrath *Samuel Friedrich Nathanael v. Stein* in Prag.
– Geheimer Hofrath *Wilhelm Weber* in Göttingen.

# Verzeichniss

der bei der Königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften im Jahre 1881 eingegangenen Schriften.

---

## Von gelehrten Gesellschaften, Universitäten und öffentlichen Behörden herausgegebene und periodische Schriften.

Monatsberichte der Kgl. Preuss. Akad. d. Wissensch. zu Berlin. 1880, Sept. — Dec. 1881, Jan. — Oct.

Politische Correspondenz Friedrichs d. Gr. Bd. 5. 6. Berlin 1880. 81.

Denkschriften der Kaiserl. Akad. d. Wissensch. Mathem.-naturwiss. Cl. Bd. 40. 42. Wien 1880.

Denkschriften der Kaiserl. Akad. d. Wissensch. Philos.-histor. Cl. Bd. 31. Wien 1881.

Sitzungsberichte der Kaiserl. Akad. d. Wiss. Mathem.-naturwiss. Cl. Bd. 81 (1880), Abth. I, H. 1—5. Abth. II, H. 4. 5. Abth. III, H. 4. 5. Bd. 82 (1880), Abth. I, H. 1—5. Abth. II, H. 1—5. Abth. III, H. 1—5. Bd. 83 (1881), Abth. I, H. 1—4. Abth. II, H. 1—4. Abth. III, H. 1. 2. Register IX. zu Bd. 76—80. Wien 1880. 81.

Sitzungsberichte der Kaiserl. Akad. d. Wissensch. Philos.-histor. Cl. Bd. 96 (1880), H. 2. 3. Bd. 97 (1880), H. 1 — 3. Bd 98 (1881), H. 1. 2. Wien 1880. 81.

Anzeiger der Kaiserl. Akad. d. Wissensch. in Wien. Math.-phys. Cl. Jahrg. 1881, No. 1—25.

Almanach d. Kaiserl. Akad. d. Wiss. Jahrg. 30 (1880). 31 (1881). Wien 1880. 81.

Archiv für österreich. Geschichte. Herausg. v. der zur Pflege vaterländ. Geschichte aufgestellten Commission der Kaiserl. Akad. d. Wissensch. Bd. 60, 2. Hälfte. Bd. 61, 1. u. 2. Hälfte. Bd. 62, 2. Hälfte. Wien 1880.

Verhandlungen der k. k. geologischen Reichsanstalt. Jahrgang 1880, No. 12—18. Jahrg. 1881, No. 1—15.

Jahrbuch d. k. k. geologischen Reichsanstalt. Jahrg. 1880. Bd. 30, No. 4. Jahrg. 1881. Bd. 31, No. 1—3. Wien 1881.

Abhandlungen d. k. k. geologischen Reichsanstalt. Bd. 12, H. 2. Wien 1880.

Mittheilungen der k. k. geographischen Gesellschaft in Wien. 1880. Bd. 23 (N. F. Bd. 13). Wien 1880.

K. k. geologische Reichsanstalt. Catalog ihrer Ausstellungs-Gegenstände bei der Wiener Weltausstellung 1873. Wien (1873).

Hauer, Fr. v., und M. Neumayr, Führer zu den Excursionen der Deutschen geologischen Gesellschaft nach der allgemeinen Versammlung in Wien 1877. Wien (1877).

Verhandlungen der k. k. zoologisch-botanischen Gesellschaft in Wien. Jahrg. 1880. Bd. 30. Wien 1881.

Astronomische, magnetische und meteorologische Beobachtungen an der k. k. Sternwarte zu Prag im J. 1880. Jahrg. 41. Hrsg. von C. Hornstein. Prag 1881.

Achtzehnter Jahresbericht des Vereins für Geschichte der Deutschen in Böhmen. Für das Vereinsjahr 1879—80. Prag 1880.

Mittheilungen des Vereins für Geschichte der Deutschen in Böhmen. Jahrg. 18, No. 3. 4. Jahrg. 19, No. 1—4. Prag 1880. 81.

Bibliothek d. mittelhochdeutschen Litteratur in Böhmen. Hrsg. vom Verein f. Geschichte der Deutschen in Böhmen. Bd. 3. Das Leben des h. Hieronymus in der Übersetzung des Bischofs Johannes VIII. von Olmütz, hrsg. v. A. Benedict. Prag 1880.

Mittheilungen des histor. Vereines für Steiermark. H. 29. Graz 1881.

Berichte des naturwiss.-medizin. Vereines in Innsbruck. Jahrg. 10 (1879). 11 (1880—81). Innsbruck 1880. 81.

Zeitschrift des Ferdinandeums für Tirol u.Vorarlberg. 3. Folge. H. 24. 25. Innsbruck 1880. 81.

Viestnik Hrvatskoga arkeologičkago Družtva. Godina 3, Br. 1—4. U Zagrebu 1881.

Das k. k. Quecksilberwerk zu Idria in Krain. Zur Erinn. an d. Feier des 300jähr. ausschliesslich staatlichen Besitzes. Hrsg. von der k. k. Bergdirektion zu Idria. Wien 1881.

Personalstand u. Ordnung d. öffentl.Vorlesungen an der K. K. Franz-Josefs-Universität zu Czernowitz im Winter-Sem. 1881/82.

Acta regiae scient. Universitatis Claudiopolitanae anni 1879—80, Fasc. 2. 1880—81, Fasc. 1. Kolozsvárt 1880.

A Koloszvári magyar kir. Tudom.-egyetem Almanachja 1879—80. ról. Kolozsvárt 1880.

A Kolozsvári magyar kir. Tudom.-egyetem Tanrendje az 1880—81 tanév, felére 2. Kolozsvárt 1880.

Erdélyi Muzeum. Az Erd. Muzeum egylet tört. szakosztályának közlönye. Szerkesti Finály Henr. VII. évfolyam (1881), sz. 1—10. Kolozsvárt d. J.

Verhandlungen des Vereins für Natur- u. Heilkunde zu Presburg. N. F. H. 3 (Jahrg. 1873—75). 4 (Jahrg. 1875—80). Presburg 1880, 81.

Abhandlungen der histor. Cl. der k. bayer. Akad. d. Wissensch. Bd. 15 (in d. Reihe d. Denkschr. d. LIV. Bd.), Abth. 3. München 1880.

Abhandlungen d. mathemat.-physikal. Cl. der k. bayer. Akad. d.Wissensch. Bd.14 (in d. Reihe d. Denkschriften d. L. Bd.), Abth.1. München 1881.

Abhandlungen der philosoph.-philolog. Cl. der k. bayer. Akad. d. Wissensch. Bd. 15 (in d. Reihe d. Denkschriften d. LII. Bd.), Abth. 3. Bd.16 (in d. Reihe d. Denkschr. d. LV. Bd.), Abth.1. München 1881.

Heigel, Karl Theodor, Die Wittelsbacher in Schweden. Festrede, gehalten in der öffentl. Sitzung der k. bayer. Akad. d.Wissensch. zur Feier ihres 122. Stiftungstages am 28. März 1881. München 1881.

Christ, Wilh. v., Gedächtnissrede auf Leonhard v. Spengel, gehalten in der öffentl. Sitzung der k. bayer. Akad. d.Wissensch. zur Feier ihres 122. Stiftungstages am 28. März 1881. München 1881.

Sitzungsberichte der mathem.-physikal. Cl. der k. bayer. Akad. d. Wiss. zu München. Jahrg. 1881, H. 1—4. München 1881.

Sitzungsberichte der philos.-philol. u. histor. Cl. der k. bayer. Akad. d. Wissensch. zu München. Jahrg. 1880, H. 4—6. 1881, Bd. 1, H. 1—3. Bd. 2. H. 1. 2. München 1880. 81.

Zweiundzwanzigste Plenarversammlung der histor. Commission bei der k. bayer. Akad. d. Wissensch. Bericht des Secretariats. München 1881.

Meteorologische und magnetische Beobachtungen der k. Sternwarte bei München. Jahrg. 1880. München 1881.

Abhandlungen der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Bd. 26, aus d. J. 1880. Göttingen 1880.

Nachrichten von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften und der Georg-Augusts-Universität aus d. J. 1880. Göttingen 1880.

Katalog der Bibliothek der Herzogl. Technischen Hochschule Carolo-Wilhelmina zu Braunschweig. Abth. 1. Braunschweig 1880.

Zeitschrift des Vereins für Lübeckische Geschichte und Alterthumskunde. Bd. 4, H. 1. 2. Lübeck 1881.

Neues Lausitzisches Magazin. Im Auftrag d. Oberlausitz. Gesellsch. d. Wissensch. herausgeg. von Prof. Dr. Schönwälder. Bd. 56, H. 2. Bd. 57, H. 1. Görlitz 1880. 81.

Zeitschrift des k. sächsischen statistischen Bureau's. Redig. v. V. Böhmert. Jahrg. 26 (1880), H. 1—4. Dresden 1880. 81.

Vierteljahrsschrift der astronom. Gesellschaft. Jahrg. 15, H. 4. Jahrg. 16, H. 1—3. Leipzig 1880. 81.

Sitzungsberichte der Naturforschenden Gesellschaft zu Leipzig. Jahrg. V (1878) — VII (1880). Leipzig, d. J.

Kgl. Sächsisches Polytechnikum zu Dresden. Ergänzung zum Programm f. d. Studienjahr, bezieh. Wintersemester 1880/81, enthalt. d. Verzeichniss d. Vorlesungen f. d. Sommersem. 1881. — Programm f. d. Studienjahr, bezieh. Wintersemester 1881/82.

Förstemann, E. W., Mittheilungen aus d. Verwaltung der Königl. öffentl. Bibliothek zu Dresden in d. J. 1876—80. Dresden 1881.

Jahresbericht der K. Sächs. Kunstgewerbeschule u. des Kunstgewerbemuseums zu Dresden. Schuljahr 1880/81. Dresden 1881.

Jahresbericht der Gesellschaft für Natur- u. Heilkunde in Dresden. Sitzungsperiode 1879—80. Berlin 1880. Sitzungsper. 1880—81. Dresden 1881.

Sitzungsberichte der naturwissenschaftl. Gesellschaft Isis in Dresden. Herausg. v. C. Bley. Jahrg. 1880, Jan. — Dec. Jahrg. 1881, Jan. — Juni. Dresden 1881.

Jahresbericht der Fürsten- u. Landesschule Meissen vom Juli 1880 — Juli 1881. Meissen 1881.

Bericht über die im Jahr 1880 den Herzogl. Sammlungen des Schlosses Friedenstein zugegangenen Geschenke. Gotha 1881.

Pertsch, Wilh., Die arabischen Handschriften der Herzogl. Bibliothek zu Gotha. Bd. 3, H. 2. Gotha 1881.

Zuwachs der Grossherzogl. Bibliothek zu Weimar in d. Jahren 1879 u. 1880. Weimar 1881.

Metronomische Beiträge. No. 3. Thermometrische Untersuchungen. Hrsg. v. W. Förster, Direktor d. Kaiserl. Normal-Aichungs-Commission. Berlin 1881.

Zeitschrift f. d. gesammten Naturwissenschaften, redig. von C. G. Giebel. Dritte Folge. 1880. Bd. 5 (der ganzen Reihe 53. Bd.). Berlin 1880.

Die Fortschritte der Physik im J. 1876. Dargestellt von der physikal. Gesellsch. in Berlin. Jahrg. 32, Abth. 1. 2. Berlin 1880. 81.

Berichte der deutschen chemischen Gesellschaft zu Berlin. Jahrg. XIII, No. 19. Jahrg. XIV, No. 1—18. Berlin 1881.

Publicationen des Astrophysikalischen Observatoriums zu Potsdam. Bd. 2. Potsdam 1881.

Achtundfünfzigster Jahresbericht der Schlesischen Gesellschaft für vaterländische Cultur. Enthält den Generalbericht über die Arbeiten und Veränderungen der Gesellschaft im J. 1880. Breslau 1881.

Nova Acta Academiae Carolinae Leopoldinae Caesareae German. naturae curiosorum. T. 41, P. 1. 2. Halis 1879. 80.

Leopoldina. Amtliches Organ der kais.-leopoldinisch-carolinisch-deutschen Akademie der Naturforscher. Heft XVI, No. 23. 24. Heft XVII. No. 1—22. Halle 1881.

Abhandlungen der Naturforschenden Gesellschaft zu Halle. Bd. XV, H. 1. Halle 1880.

Ergebnisse der Beobachtungsstationen an den deutschen Küsten über die physikalischen Eigenschaften der Ostsee u. Nordsee u. die Fischerei. Jahrg. 1880, Heft 7—12. Jahrg. 1881, Einleitungsheft u. Heft 1. Kiel 1880. 81.

Schriften der Naturforschenden Gesellschaft in Danzig. N. F. Bd. V, H. 1. 2. Danzig 1881.

Schriften der Universität zu Kiel aus d. J. 1879/80. Bd. 26. Aus d. J. 1880/81. Bd. 27. Kiel 1880. 81.

29. u. 30. Jahresbericht der Naturhistorischen Gesellschaft zu Hannover für d. Jahre 1878—80. Hannover 1880.

Jahresbericht des physikal. Vereins zu Frankfurt a. M. für das Rechnungsjahr 1879—1880. Frankfurt a. M. 1881.

Jahrbücher des Vereins von Alterthumsfreunden im Rheinlande. H. 66—69. Bonn 1879. 80.

Neunter Jahresbericht des Westfälischen Provinzial-Vereins für Wissenschaft u. Kunst, f. 1880. Münster 1881.

Sitzungsberichte der physikal.-medicinischen Societät in Erlangen. Heft 12. (Nov. 1879 — Aug. 1880). Erlangen 1880.

Abhandlungen der naturhistorischen Gesellschaft zu Nürnberg. Bd. 7. Jubiläumsschrift zur Feier des 80jähr. Bestandes. Nürnberg 1881.

Anzeiger für Kunde der deutschen Vorzeit. Organ des Germanischen Museums. N. F. Jahrg. 27, No. 1—12. Nürnberg 1880. — 26. Jahresbericht des Germanischen Nationalmuseums.

Verhandlungen der physikal.-medicin. Gesellschaft in Würzburg. N. F. Bd. XV, H. 1—4. Würzburg 1881.

Württembergische Vierteljahrshefte für Landesgeschichte. Herausg. von d. Kgl. Statist.-topogr. Bureau. Jahrg. 3, H. 1—4. Stuttg. 1880.

Zwanzigster Bericht der Oberhessischen Gesellschaft für Natur- und Heilkunde. Giessen 1881.

19., 20. u. 21. Bericht über die Thätigkeit des Offenbacher Vereins für Naturkunde in den Vereinsjahren v. Mai 1877 — April 1880. Offenbach a. M. 1880.

Verhandlungen der Schweizerischen naturforschenden Gesellschaft in Brieg d. 13.—15. Sept. 1880 (63. Jahresversammlung). Jahresbericht 1879/80. Lausanne 1881.

Archives des sciences physiques et naturelles, Oct. 1880: Compte rendu des travaux présentés à la 63. session de la Société Helvétique des sciences naturelles réunie à Brigue les 13—15. Sept. 1880. Genève 1880.

Neue Denkschriften der allgemeinen Schweiz. Gesellschaft f. die gesammten Naturwissenschaften. Bd. 28, Abth. 1. Basel 1881.

Mittheilungen der naturforschenden Gesellschaft in Bern aus d. J. 1880. (No. 979—1003); aus d. J. 1881, H. 1 (No. 1004—17). Bern 1881.

Neunter Jahresbericht der historisch-antiquarischen Gesellschaft von Graubünden (Jahrg. 1879). Zehnter Jahresbericht (Jahrg. 1880). Chur d. J.

Jahresbericht d. naturforschenden Gesellschaft Graubündens. Jahrg. 23 u. 24. Vereinsjahre 1878/79 u. 1879/80. Chur 1881.

Mémoires de la Société de physique et d'histoire naturelle de Genève, T. XXVII, P. 1. Genève 1880.

Vierteljahrsschrift d. Naturforschenden Gesellschaft in Zürich. Jahrg. XXIV, H. 1—4. XXV, H. 1—4. Zürich 1879. 80.

Verhandelingen d. Kon. Akad. v. Wetenschappen. Afdeel. Letterkunde. Deel XIII. Amsterdam 1880. — Afdeel. Natuurkunde. Deel XX. Amsterdam 1880.

Verslagen en Mededeelingen der Kon. Akad. v. Wetensch. Afdeel. Letterkunde. II. Reeks, Deel 9. Amsterdam 1880. — Afdeel. Natuurkunde. II. Reeks, Deel 15. Amsterdam 1880. — Naam- en zaakregister op de Verslagen en Mededeelingen d. Kon. Akad. v. Wetenschappen. Afdeel. Natuurkunde, I. Reeks, Deel 1—17. Amsterdam 1880.

Jaarboek van de Kon. Akad. v. Wetensch. gevestigd te Amsterdam, voor 1879. Amsterdam 1879.

Processen-verbaal van de gewone Vergaderingen d. Kon. Akad. v. Wetensch. te Amsterdam. Afdeel. Natuurkunde. Mei 1879 — April 1880.

Esseiva, Petr., In mulieres emancipatas satira praemio aureo ornata in certamine poetico Hoeufftiano. Sequitur ad Eugeniam Augustam consolatio. Amstelod. 1880.

Catalogus der Bibliotheek van het Kon. Zoölogisch Genootschap 'Natura artis magistra' te Amsterdam. Amsterdam 1881.

Nederlandsch kruidkundig Archief. Verslagen en Mededeelingen der Nederlandsche botanische Vereeniging. Ser. II, Deel 3, St. 3. Nijmegen 1881.

Aanteekeningen van het verhandelde in de sectië-vergaderingen van het Provinc. Utrechtsche Genootsch. v. kunsten en wet., ter gelegenheid van de algem. vergadering gehouden d. 24. Juni 1879. Utrecht 1879.

Registers op de Aanteekeningen van het verhandelde in de vergaderingen der sectiën van het Provinc. Utrechtsche Genootsch. v. kunsten en wet. over de jaren 1845 tot en met 1878. Voorafgegaan door eene opgave van de openingsreden der algem. vergaderingen. Utrecht 1879.

Naamlijst der leden van het Provinc. Utrechtsche Genootsch. v. kunsten en wet. op 15. Apr. 1880.

Verslag van het verhandelde in de algem. vergaderingen van het Provinc. Utrechtsche Genootsch. v. kunsten en wet., gehouden d. 24. Juni 1879, d. 29. Juni 1880. Utrecht 1879. 80.

Questions mises au concours par la Société des arts et des sciences établie à Utrecht, 1881.

Acquoy, J. G. R., Het Klooster te Windesheim en zijn invloed. Uitg. door het Provinc. Utrechtsche Genootsch. v. kunsten en wet. Deel 3. Utrecht 1880.

Daniëls, C. E., Het leven en de verdiensten van Petrus Camper. Prijsverhandeling met goud bekroond en uitg. door het Provinc. Utrechtsche Genootsch. v. kunsten en wet. Utrecht 1880.

Valeton, I. M. J., De Polybii fontibus et auctoritate disputatio critica. Edid. Societas artium disciplinarumque Rheno-Trajectina. Traj. ad Rh. 1879.

Onderzoekingen gedaan in het Physiol. Laboratorium d. Utrechtsche Hoogeschool. Uitg. door F. C. Donders en Th. W. Engelmann. 3. Reeks. VI, Afl. 1. 2. Utrecht 1881.

Archives néerlandaises des sciences exactes et naturelles, publiées par la Société Hollandaise des sciences à Harlem. T. 15, Livr. 3—5. T. 16, Livr. 1. 2. Harlem 1880. 81.

Programme de la Société Hollandaise des sciences, à Harlem. Année 1881.

Archives du Musée Teyler. Sér. II, P. 1. Harlem 1881.

Verhandelingen rakende den natuurlijken en geopenbarden godsdienst, uitgeg. door Teylers Godgeleerd Genootschap. N. Ser. Deel 9. Stuk 1. 2. Haarlem 1880.

Handelingen en Mededeelingen van de Maatschappij der Nederlandsche Letterkunde te Leiden over het jaar 1864. 65. 66—80. Leiden 1864—80.

Bijdragen tot de geschiedenis van de Maatschappij der Nederlandsche Letterkunde te Leiden, 1766—1866. Gedenkschrift uitgeg. ter gelegenheid van het eerste eeuw feest. Leiden 1867.

Feestrede bij de viering van het eeuwgetijde van de Maatschappij der Nederlandsche Letterkunde te Leiden, den 20. Juni 1867, uitgespr. door M. de Vries. Leiden 1867.

Levensberigten der afgestorvene medeleden van de Maatschappij der Nederlandsche Letterkunde te Leiden. Bijlage tot de Handelingen van 1864. 65—80. Leiden 1864—80.

Oudemans, A. C., Taalkundig Woordenboek op de Werken van P. C. Hooft, ter aanvulling en verbetering van het Uitlegkundig Woordenboek op Hooft. Van wege de Maatsch. d. Nederlandsche Letterkunde te Leiden bewerkt. Leiden 1868.

Heinric van Aken, Die Rose, met de fragmenten der tweede vertaling van wege de Maatsch. d. Nederlandsche Letterkunde te Leiden uitgeg. door Eelco Verwijs. 's Gravenhage 1868.

Seghelijn van Jerusalem. Naar het Berlijnsche handschrift en den ouden druk van wege de Maatsch. d. Nederlandsche Letterkunde uitgeg. door J. Verdam. Leiden 1878.

Enqueste ende informatie upt stuck van der reductie ende reformatie van den schiltaelen, voertijds getaxeert ende gestelt gewest over de landen van Hollant ende Vrieslant. Gedaen in den jaere 1494. Uitgeg. van wege de Maatsch. d. Nederlandsche Letterkunde. Leiden 1876.

Overblyfsels van geheugchenis, der bisonderste voorvallen, in het leven van den heere Coenraet Droste. Derde druk, uitg. van wege de Maatsch. d. Nederlandsche Letterkunde. Text en Aanteekeningen. Leiden 1879.

Informacie up den staet, faculteyt ende gelegentheyt van de steden ende dorpen van Hollant ende Vrieslant, om daernae te reguleren de nyeuwe schiltaele. Gedaen in den jaere 1514. Uitgeg. van wege de Maatsch. de Nederlandsche Letterkunde. Leiden 1866.

Catalogus der Bibliotheek van de Maatsch. d. Nederlandsche Letterkunde te Leiden. Gedeelte 1. Handschriften. 3. Nederlandsche Tooneel. Leiden 1877.

Programme de la Société Batave de philosophie expérimentale de Rotterdam. 1880.

Publications de l'Institut Royal Grand-Ducal de Luxembourg. Section des sciences naturelles. T. 18. Luxembourg 1881.

Recueil des mémoires et des travaux publiés par la Société Botanique du Grand-Duché de Luxembourg. No. 4—5. 1877—78. Luxembourg 1880.

Annuaire de l'Académie des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique. 1879 (Année XLV). 1880 (Année XLVI). 1881 (Année XLVII). Bruxelles 1879—81.

Bulletins de l'Académie R. des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique. Année 47 (1878), 2. Sér. T. 46. Année 48 (1879), 2. Sér. T. 47. 48. Année 49 (1880), 2. Sér. T. 49. 50. Bruxelles 1878—80.

Mémoires de l'Académie R. des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique. T. 43. P. 1. Bruxelles 1880.

Mémoires couronnés et autres Mémoires publ. p. l'Académie R. des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique. Collection in-8$^{0}$. T. 29. 30. 32. Bruxelles 1880. 81.

Mémoires couronnés et Mémoires des savants étrangers, publ. par l'Acad. R. des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique. T. 39, P. 2. 42. 43. Bruxelles 1879. 80.

Tables des Mémoires des membres, des Mémoires couronnés et de ceux des savants étrangers. 1816—57. 1858—78. Bruxelles 1858. 1879.

Annales de la Société entomologique de Belgique. T. 23. 24. Bruxelles 1880.

Annales de l'Académie d'archéologie de Belgique. T. 36 (III. Série, T. 6). Anvers 1880.

Académie d'archéologie de Belgique. Bulletin (III. Série des Annales), Seconde Partie, 6—11. Anvers 1880. 81.

Bullettino dell' Instituto di corrispondenza archeologica per l'anno 1880, No. 12 (und Elenco de' participanti alla fine dell' anno 1880). 1881, No. 1—11. Roma 1881.

Atti della R. Accademia de' Lincei. Anno CCLXXIII (1875—76). Ser. II, Vol. 5—7. Roma 1880. — Anno CCLXXVII (1879—80). Serie III. Memorie della classe di scienze fisiche, matem. e naturali, Vol. 5—8. Roma 1880. Memorie della classe di scienze morali, storiche e filologiche, Vol. 4. 5. Roma 1880. — Anno CCLXXVIII (1880—81). Ser. III. Memorie della classe di scienze morali, storiche e filologiche, Vol. 6. Roma 1881. Transunti, Vol. 5, Fasc. 1—14. Vol. 6, Fasc. 1. 2. Roma 1881.

Atti della R. Accademia delle scienze di Torino. Vol. XVI, Disp. 1—7. Torino 1880. 81.

Memorie della R. Accademia delle scienze di Torino. Ser. II. T. XXXII. XXXIII. Torino 1880. 81.

Bollettino meteorologico ed astronomico dell' Osservatorio della Reg. Università di Torino. Anno XV (1880), Parte meteorologica. Torino 1880.

Atti della Società Toscana di scienze naturali residente in Pisa. Memorie, Vol. V, Fasc. 1. Pisa 1881.

Processi verbali della Società Toscana di scienze naturali residente in Pisa. Adunanza del 14. Nov. 1880, 9. Genn., 13. Marzo, 8. Maggio 1881.

Atti del R. Istituto Veneto di scienze, lettere ed arti. Ser. V, T. 4, Disp. 10. T. 5. T. 6. T. 7, Disp. 1—9. Venezia 1877—81. — Appendice ai temi di premio proposti nella sol. adunanza 15. agosto 1881.

Memorie del R. Istituto Veneto di scienze, lettere ed arti. Vol. XX, P. 2. 3. XXI, P. 1. 2. Venezia 1878—81.

Taramelli, Torquato, Monografia stratigrafica e paleontologica del Lias nelle provincie Venete. Premiata dal R. Istituto Veneto. Venezia 1880.

Pubblicazioni del R. Istituto di studi superiori pratici e di perfezionamento in Firenze. Sezione di filosofia e filologia. Vol. 2, Disp. 6 (Caix, C. N., Le origini della lingua poetica italiana). Firenze 1880. — Accademia Orientale. Il commento di Sabbatai Donnolo sul libro della creazione, pubbl. per la prima volta nel testo ebraico con note crit. e introduzione da David Castelli. Firenze 1880. — Sezione di medicina e chirurgia e scuola di farmacia. Pacini, Fil., Del processo morboso del Colera asiatico. Firenze 1880 Grassi, Ern., Il primo anno della Clinica ostetrica nella Nuova Maternità di Firenze. Rendiconto. Firenze 1880. — Sezione di scienze fisiche e naturali. Parlatore, Fil., Tavole per una „Anatomia delle piante aquatiche". Opera rimasta incompiuta. Firenze 1881.

Philosophical Transactions of the R. Society of London. For the year 1880. Vol. 171, P. 2. 3. London 1880. For the year 1881. Vol. 172, P. 1. London 1881. — The R. Society. 30th Nov. 1880. (London 1881.)

Proceedings of the R. Society of London. Vol. XXXI, No. 206—11. XXXII, No. 212. 13. London 1881.

Proceedings of the R. Institution of Great Britain. Vol. IX, P. 3 (No. 72). London 1880. — List of the members, London, July 1880.

Proceedings of the London Mathematical Society. Vol. 1 (1865/66) — 11 (1879/80). Vol. 12, No. 166—71. 176. 177. London 1865—81.

Journal of the R. Microscopical Society, containing its Transactions and Proceedings. Ser. II. Vol. 1, P. 1—6. London 1881.

Memoirs of the R. Astronomical Society. Vol. 45 (1879/80). London 1880.

Catalogue of Oriental coins in the British Museum. Vol. 6. London 1881.

Proceedings of the Cambridge Philosophical Society. Vol. III, P. 7. 8. IV, P. 1. Cambridge 1880. 81.

Transactions of the Cambridge Philosophical Society. Vol. XIII, P. 1. Cambridge 1881.

Proceedings of the R. Society of Edinburgh. Vol. X, No. 105 (Session 1879—80). Edinburgh 1880.

Transactions of the R. Society of Edinburgh. Vol. XXIX, P. 2. For the session 1879/80. Edinburgh 1880.

Proceedings of the Literary and Philosophical Society of Liverpool, during the session 1878—79 (No. 33), 1879—80 (No. 34). London and Liverpool 1880. 81.

Memoirs of the Literary and Philosophical Society of Manchester. III. Ser., Vol. 6. London 1879.

Proceedings of the Literary and Philosophical Society of Manchester. Vol. 16 (Session 1876/7). 17 (1877/8). 18 (1878/9). 19 (1879/80). Manchester 1877—80.

Journal of the R. Geological Society of Ireland. Vol. XV (N. Ser. Vol. V), P. 3. Vol. XVI (N. Ser. Vol. VI), P. 1. London 1880. 81.

Journal de l'École polytechnique, publ. p. le Conseil d'instruction de cet établissement. Cah. 48. T. 29. Paris 1880.

Bulletin de la Société mathématique de France. T. 9, No. 1—3. Paris 1880. 81.

Comité international des poids et mesures. Procès-verbaux des séances de 1880. Paris 1881.

Travaux et mémoires du Bureau international des poids et mesures, publ. sous l'autorité du Comité intérnational. T. 1. Paris 1881.

Annales des ponts et chaussées. Mémoires et documents relatifs à l'art des constructions et au service de l'ingenieur, lois, décrets, arrêtés etc. VI. Série, T. 1 (1881), Janvier. Paris.

Mémoires de la Société des sciences physiques et naturelles de Bordeaux. II. Série. T. 4, Cah. 2. Paris 1881.

Mémoires de la Société nationale des sciences naturelles de Cherbourg. T. 22 (III. Sér., T. 2). Paris et Cherbourg 1879.

Annales de la Société Linnéenne de Lyon. Nouv. Série. T. 26 (1879). 27 (1880). Paris, Lyon, d. J.

Mémoires de l'Académie des sciences, belles-lettres et arts de Lyon. Classe des lettres, Vol. 19. Classe des sciences, Vol. 24. Paris, Lyon 1879/80.

Académie des sciences et lettres de Montpellier. Mémoires de la section des sciences. T. X, Fasc. 1 (Année 1880). Montpellier 1881.

Discursos de recepcion y de contestacion leidos ante la R. Academia de ciencias morales y políticas. 1860—75. T. I. Madrid 1875.

Discursos leidos ante la R. Academia de ciencias morales y políticas en la recepcion pública de P. F. Monlau, 1870. M. A. Martinez, 1871. L. Gisbert, 1872. Vic. de la Fuente, 1875. J. G. Barzanallana, 1875. C. A. Martinez, 1875. Conde de Casa-Valencia, 1877. M. Salvá, 1880. Conde de Toreno, 1881. C. M. Perier, 1881. Madrid, d. J.

Molins, Marqués de, Discurso leido en la sesion pública celebrada para solemn. el segundo centenario de Pedro Calderon. Madrid 1881.

Memorias de la R. Academia de ciencias morales y políticas. T. III. Madrid 1875. — R. Academia de ciencias morales y políticas. Año de 1877. 1881. Madrid, d. J.

Memorias premiadas por la R. Academia de ciencias morales y políticas: Barzanallana, J. G., La liga aduanera Ibérica (Concurso de 1861). 2ª edicion. Barzanallana, J. G., La poblacion de España (Concurso de 1871). Paredes, Vic. S. de, La defensa del derecho de propriedad (1872). Menendez de la Pola, J., Breve refutacion de los falsos principios económicos de la Internacional (1872). Armengol y Cornet, Algunas verdades a la clase obrera (1872). Uhagon y Guardamino, F. de, Sobre la influencia que la acumulacion ó division excesiva de la propriedad territorial ejercen en la agricultura en España (1873). Carrasco, Doña C. A. de Garcia, Las colonias penales de la Australia y la pena de deportacion (1875). Armengol y Cornet, P., ¿A las islas Marianas ó al golfo de Guinea? (1875). Lastres y Juiz, F., La colonizacion penitenciaria de las Marianas y Fernando Póo (1875). Orti y Lara, J. M., La ciencia y la divina revelacion (1878). Paz, A. de, Luz en la tierra, demostracion de que entre la religion católica y ciencia no pueden existir conflictos (1878). Rubió

y Ors, J., Los supuestos conflictos entre la religion y la ciencia (1878). Arenal, Concepcion, La instruccion del pueblo (1878). Castro y Rossi, A. de, Discurso acerca de las costumbres públicas y privadas de los Españoles en el siglo XVII, fundado en el estudio de las comedias de Calderon (1881). Soler y Arqués, C., Los Españoles segun Calderon (1881). Madrid 1872—81.

R. Academia de ciencias morales y políticas. Resúmen de sus actas y discursos leidos en la junta pública 29. Junio 1871; 31. Dic. 1876. Madrid, d. J. — Programa para los concursos ordinarios de 1882 y 1883.

Vega de Armijo, Marqués de la, La huelga en los ferro-carriles de los Estados-Unidos de la América del Norte en 1877. Madrid 1879.

Anales del Instituto y Observatorio de marina de San Fernando, publ. por C. Pujazon. Seccion II. Observaciones meteorológicas. Año 1877. 78. 80. San Fernando 1878—81.

Oversigt over det Kong. Danske Videnskabernes Selskabs Forhandlinger og dets Medlemmers Arbejder i aaret 1880, No. 2. 3, 1881, No. 1. 2.

Det Kong. Danske Videnskabernes Selskabs Skrifter. Naturvid. og mathemat. Afd. 5. Række. Bd. XII, No. 6. Kjøbenhavn 1880. 6. Række. Bd. I, No. 1—4. Kjøbenhavn 1881.

Kongl. Svenska Vetenskaps-Akademiens Handlingar. Ny Följd. Bd. XIV, H. 2, XV. XVI. XVII. u. Atlas zu XV, H. 6 (Agardh, J. G., Florideernes Morphologi). Stockholm 1876—79.

Bihang till Kongl. Svenska Vetenskaps-Akademiens Handlingar. Bd. IV, H. 1. 2. V, H. 1. 2. Stockholm 1877—80.

Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar. Årgången 34 (1877) — 37 (1880). Stockholm 1877—81.

Lefnadsteckningar öfver Kongl. Svenska Vetenskaps-Akademiens efter år 1854 aflidna Ledamöter Bd. II, H. 1. Stockholm 1878. — Kongl. Svenska Vetenskaps-Akademien. Maj 1878. Maj 1879. Maj 1880. Maj 1881.

Santesson, Carl, Minnesteckning öfver Christopher Carlander. Föredragen på Kongl. Vetenskaps-Akademiens högtidsdag d. 4. April 1877. Malmsten, P. H., Minnesteckning öfver Pehr af Bjerkén. Föredragen d. 31. Mars 1878. Areschoug, J. E., Minnesteckning öfver Carl Jacob Sundevall. Föredr. d. 31. Mars 1879. Hildebrand, Bror Emil, Minnesteckning öfver Jonas Hallenberg. Föredr. d. 31. Mars 1880. Malmsten, P. H., Minnesord öfver Carl v. Linné, vid K. Vetenskaps-Akad. sammankomst d. 10. Jan. 1878. Stockholm 1877—80.

Meteorologiska Jakttagelser i Sverige, utg. af Kongl. Svenska Vetenskaps-Akademien. Bd. 17 (II. Ser. Bd. 3) — 19. 1875 — 77. Stockholm 1878 — 81.

Fries, Elias, Icones selectae Hymenomycetum nondum delineatorum, sub auspiciis Reg. Acad. scientiarum Holmiensis editae. Vol. II, Fasc. 1 — 6. Upsal. 1877.

Astronomiska Jakttagelser och Undersökningar anstälda på Stockholms Observatorium. Utg. af H. Gyldén. Bd. I, Häftet 2. Stockholm 1880.

Entomologisk Tidskrift, på föranstaltende af Entomologiska Föreningen i Stockholm utg. af Jac. Spångberg. Årgång I, H. 3. 4. II, H. 1. 2. Stockholm 1880. 81.

Bulletin météorologique mensuel de l'Observatoire de l'Université d'Upsal. Vol. XII (1880). Upsal 1880. 81.

Det Kongelige Norske Frederiks Universitets Aarsberetning for aaret 1878. 79. Christiania 1879. 80.

Beretning om Bodsfængslets virksomhed i aaret 1878. 79. Christiania 1879. 80.

Forhandlinger i Videnskabs-Selskabet i Christiania. Aar 1879. Christiania 1880.

Nyt Magazin for Naturvidenskaberne. Udg. ved Th. Kjerulf, D. C. Danielssen etc. Bind 24 (II. R., Bind 4), H. 4. 25, H. 1—4. 26, H. 1. Christiania 1878—80.

Norske Rigsregistranter, tildeels i uddrag. Bind VII, H. 2 (1637—40). Udg. ved O. G. Lundh. Christiania 1880.

Schübeler, F. C., Væxtlivet i Norge, med særligt hensyn til plantegeographien. Udg. som Festskrift til Kjøbenhavns Universitets 400 aars jubileum. Christiania 1879.

Daae, Ludv., Kong Christiern den Förstes Norske Historie 1448—58. Festskrift til Universitet i Kjøbenhavn ved dets firehundred aarsfest. Christiania 1879.

Lie, Sophus, Classification der Flächen nach d. Transformationsgruppe ihrer geodätischen Curven. Univ.-Progr. f. d. I. Semester 1879. Kristiania 1879.

Sars, G. O., Carcinologiske Bidrag til Norges Fauna. I. Monographi over de ved Norges kyster forekommende Mysider. Hefte 3. Univ.-Progr. for I. halvaar 1880. Christiania 1879.

Guldberg, C. M., et H. Mohn, Études sur les mouvements de l'atmosphère. 2. Partie. Progr. de l'Univ. pour le II. sem. 1880. Christiania 1880.

Siebke, H., Enumeratio insectorum Norvegicorum. Fasc. V, catalogum Hymenopterorum contin., auctore H. Siebke defuncto edid. J. Sparre Schneider. P. I. Programmatis nomine edid. Univ. Reg. Fredericiana. Christiania 1880.

Den Norske Nordhavs-Expedition 1876—78. Chemi: I. Om luften i søvandet. II. Om kulsgren i søvandet. III. Om saltholdigheden af vandet i det Norske Nordhav. Af Herc. Tornøe. Christiania 1880. — Zoologi: Collett, R., Fiske. Danielssen, D. C., og J. Koren, Gephyrea. Christiania 1880. 81.

Mémoires de l'Académie Impériale des sciences de St.-Pétersbourg. VII. Série. T. XXVII, No. 9. 13. 14. T. XXVIII, No. 1—7. St.-Pétersbourg 1880. 81.

Bulletin de l'Acad. Impér. des sciences de St.-Pétersbourg. T. XXVI, No. 3. XXVII, No. 1—3. St.-Pétersbourg 1880. 81.

Compte-rendu de la Commission Impériale Archéologique pour les années 1878 et 1879. Avec un Atlas. St.-Pétersbourg 1881.

Acta horti Petropolitani. T. VII, Fasc. 1. St.-Petersburg 1880.

Annalen d. physikalischen Centralobservatoriums, herausg. von H. Wild. Jahrg. 1879, Th. 1. 2. St.-Petersburg 1880.

Jahresbericht am 24. Mai 1880 (für 1878/9 u. 1879/80) u. am 20. Mai 1881 dem Comité der Nicolai-Hauptsternwarte abgestattet vom Director der Sternwarte. Aus d. Russ. übersetzt. St.-Petersburg 1880. 81.

Repertorium für Meteorologie, herausg. von der Kaiserl. Akademie der Wissenschaften, redig. von H. Wild. Bd. VII, H. 1. 2. St.-Petersburg 1880. 81.

Wild, H., Die Temperatur-Verhältnisse des Russischen Reiches (Supplementband zum Repertorium für Meteorologie). 2. Hälfte. Mit einem Atlas. St.-Petersburg 1881.

Svod zakonov Rossijskoj Imperii. T. II, 1. III. VIII, 1. IX. X, 2. XV. Izdanie 1876. goda. St.-Petersburg.

Prodolženie Svoda zakonov Ross. Imperii izdannago v 1857. godu. Po 1. Jan. 1876. goda. T. 1—3. St.-Petersburg.

Položenija o selskom sostojanii. Osoboe priloženie k T. 9. Zakonov o sostojanijach. Izdanie 1876. goda. St.-Petersburg.

Ustav telegraphnyj. Ustav ob akcizě s tabaky. Ustav o preduprežděnii i presěčenii prestuplenij. Ustav o pitejnom sborě. Ustavy o voinskoj povinnosti. Izdanie 1876. goda. St.-Petersburg.

Učreždenie ordenov i drugich znakov otličija. Učreždenie upravlenija Kavkazskago i Zakavk. kraja. Izdanie 1876. goda. St.-Petersburg.

Journal Russkago phisiko-chimičeskago Obščestva. T. 13, H. 1. 2. St.-Petersburg 1881.

Bericht über die Verhandlungen u. Ergebnisse der dritten internationalen Polar-Konferenz, abgehalten in St. Petersburg 1—6. Aug. 1881.

Annales de l'Observatoire de Moscou. Vol. VII, Livr. 1. 2. Moscou 1880. 81.

Bulletin de la Société Impér. des Naturalistes de Moscou. Année 1880, No. 2—4. 1881, No. 1. Moscou 1880. 81.

Izvěstija i učenyja zapiski Imper. Kazanskago Universiteta. God 47 (1880). Kazan 1880.

Observations de Poulkova, publ. p. O. Struve. Vol. XI. Observations faites à la lunette méridienne.

Librorum in bibliotheca speculae Pulcovensis contentorum Catalogus systematicus. P. II ab Ed. Lindemanno elaborata. Edend curavit O. Struve. Petropoli 1880.

Correspondenzblatt des Naturforscher-Vereins zu Riga. Jahrg. 23. Riga 1880.

Öfversigt af Finska Vetenskaps-Societetens Förhandlingar. XXII (1879—80). Helsingfors 1880.

Bidrag till kännedom af Finlands natur och folk, utg. af Finska Vetenskaps-Societet. Häftet 33. 34. Helsingfors 1880.

Proceedings of the American Philosophical Society, held at Philadelphia, for promoting useful knowledge. Vol. XVIII, No. 106. XIX, No. 107. 108. Philadelphia 1880. 81. — List of the members of the American Philosophical Society, March 15th 1880.

Transactions of the American Philosophical Society held at Philadelphia, for promoting useful knowledge. N. S. Vol. XV, P. 3. Philadelphia 1881.

Journal of the American Oriental Society. Vol. XII. New Haven 1881.

Proceedings of the American Oriental Society at New York, Oct. 1880; at Boston, May 1881.

American Journal of Mathematics pure and applied. Publ. under the auspices of the Johns Hopkins University. Vol. III, No. 2. 4. IV, No. 1. Cambridge, Baltimore 1880. 81.

Fifth annual Report of the Johns Hopkins University. Baltimore 1880.

Johns Hopkins University Circulars. No. 3. 9. Baltimore 1880. 81.

Anniversary Memoirs of the Boston Society of Natural History, published in celebration of the 50th anniversary of the Society's foundation. Boston 1880.

Proceedings of the American Academy of Arts and Sciences. New Series. Vol. VII (Whole Series Vol. XV), P. 2. Vol. VIII, P. 1. 2. Selected from the Records. Boston 1880. 81.

Bulletin of the Buffalo Society of Natural Sciences. Vol. III, No. 5. IV, No. 1. Buffalo 1877. 81.

Bulletin of the Museum of comparative Zoölogy, at Harvard College, Cambridge Mass. Vol. VIII, No. 1—5. Cambridge Mass. 1880. 81.

Memoirs of the Museum of comparative Zoölogy, at Harvard College, Cambridge Mass. Vol. VIII, No. 1. Cambridge Mass. 1881.

Annual Report of the Curator of the Museum of comparative Zoölogy, at Harvard College, Cambridge Mass., for 1880/81. Cambridge Mass. 1881.

Report of the board of managers of the Winchester Observatory of Yale College for the academic year 1880/81, to which is appended the report of the astronomer in charge of the horological and thermometric bureaus. (New Haven 1881.)

Jahresbericht des naturhistorischen Vereins von Wisconsin für d. J. 1880/81. Milwaukee 1881.

Annals of the Lyceum of natural history of New York. Vol. XI, No. 13. New York 1876.

Annals of the New York Academy of sciences (late Lyceum of natural history). Vol. I, No. 9—13. New York 1879. 80.

Bulletin of the American Geographical Society. 1879, No. 5. 6. 1880, No. 2—5. 1881, No. 1. New York 1880. 81.

Journal of the Academy of natural sciences of Philadelphia. II. Series, Vol. VIII, P. 4. Philadelphia 1874—81.

Proceedings of the Academy of natural sciences of Philadelphia. 1880, P. 1—3. Philadelphia 1880.

Contributions to the archaeology of Missouri by the archaeological section of the St. Louis Academy of science. P. I. Pottery. Salem Mass. 1880.

Memoirs of the Peabody Academy of science. Vol. I, No. 5. 6. Salem, Mass. 1881.

Bulletin of the U. S. geological and geographical Survey of the Territories. Vol VI, No. 1. 2. Washington 1881.

Washington Observations for 1876. Appendix III. Reports on the total solar eclipses of July 29, 1878 and Jan. 11, 1880. Issued by the U. S. Naval Observatory. Washington 1880.

Washington Observations 1877. Meteorological Observations made at the U. S. Naval Observatory during the year 1877. Washington 1881.

Report of the Superintendent of the U. S. Coast Survey, showing the progress of the work for the fiscal year ending with June 1877. Washington 1880.

Engineer Department, U. S. Army. Report on U. S. Geographical Surveys west of the 100th meridian, in charge of Geo. M. Wheeler, under the direction of A. A. Humphreys. Vol. II. Astronomy and barometric hypsometry. III. Geology. IV. Palaeontology. V. Zoology. VI. Botany. Washington 1875—78. — Geographical Explorations and Surveys west of the 100th meridian. Topographical Atlas, by G. M. Wheeler. Washington 1875.

Report of the Commissioner of agriculture for the year 1878. 1879. Washington 1879. 80.

Annual Report of the Board of Regents of the Smithsonian Institution for the year 1879. Washington 1880.

Smithsonian Contributions to knowledge. Vol. XXIII. Washington 1881.

Smithsonian Miscellaneous Collections. Vol. XVIII—XXI. Washington 1881.

Bulletin astronomique et météorologique de l'Observatoire Impér. de Rio de Janeiro. No. 1 (Juillet). 2 (Août). Rio de Janeiro 1881.

Boletin de la Academia nacional de ciencias de la Republica Argentina. T. III, Entrega 2 y 3. Cordoba 1879.

Verhandelingen van het Bataviaasch Genootschap van kunsten en wetenschappen. Deel 41, Stuk 2. Batavia 1880.

Notulen van de algemeene en bestuurs-vergaderingen van het Bataviaasch Genootschap van kunsten en wetensch. Deel XVIII (1880), No. 1—4. XIX (1881), No. 1. Batavia d. J.

Tijdschrift voor Indische taal-, land- en volkenkunde, uitgeg. door het Batav. Genootsch. van kunsten en wetensch. Deel XXVI, Afl. 2—6. Batavia 1880. 81.

Transactions and Proceedings of the R. Society of Victoria. Vol. XVII. Melbourne 1881.

## Einzelne Schriften.

Comes, O., Osservazioni su alcune specie di funghi del Napoletano, e descrizione di due nuove specie. Napoli 1880.

Pettersen, Karl, Lofoten og Vesteraalen (Separataftr. af Archiv for mathem. og naturvidensk). Kristiania o. J.

Herman, Otto, Sprache und Wissenschaft (Sep.-Abdr.). Budapest 1881.

Scheffler, Herm., Die Naturgesetze u. ihr Zusammenhang mit d. Principien der abstrakten Wissenschaften. Th. 4. Leipzig 1881.

Hirschfeld, Ophelia, ein poetisches Lebensbild von Shakespeare, zum ersten Mal im Lichte ärztlicher Wissenschaft. Danzig u. Leipzig 1881.

Zweiter Bericht des hydrotechnischen Comités über die Wasserabnahme in den Quellen, Flüssen und Strömen in den Culturstaaten (Sep.-Abdr. a. d. Zeitschr. des Österreich. Ingenieur- u. Architekten-Vereins). Wien 1881.

Cardona, Enrico, Wagner e il Lohengrin. Napoli 1881.

Harkness, Will., On the relative accuracy of different methods of determining the solar parallax (From the American Journal of science, Vol. 22). Washington 1881.

Holden, Edw. S., and Charles S. Hastings, A Synopsis of the scientific writings of Sir William Herschel (From the Smithsonian Report for 1880). Washington 1881.

**Carl Neumann**, *Ueber zwei von G. Cantor und P. du Bois-Reymond über die trigonometrischen Reihen aufgestellte Sätze, und deren Uebertragung auf solche Reihen, die nach Kugelfunctionen fortschreiten* *).

Der *Cantor*'sche Satz (1870. Borch. Journal, Bd. 72, S. 142) lautet: »*Wenn eine Function* $f(x)$ *einer reellen Variablen* $x$ *durch eine für jeden Werth von* $x$ *convergente trigonometrische Reihe gegeben ist, so giebt es keine andere Reihe von derselben Form* (aber mit andern constanten Coefficienten), *welche ebenfalls für jeden Werth von* $x$ *convergirt, und die nämliche Function* $f(x)$ *darstellt.*«

Andererseits lautet der *Du Bois-Reymond*'sche Satz (1875. Abhandl. der K. Bayersch. Ak. d. Wiss. II. Cl., XII. Bd., I. Abth., S. 121 resp. 5): »*Wenn eine trigonometrische Entwicklung von der Form:*

$$f(x) = \sum_0^\infty (a_p \cos px + b_p \sin px)$$

*gegeben ist, so giebt es keine zweite derselben Form, aber mit andern Coefficienten* $a_p$, $b_p$, *welche in dem Intervall* $(-\pi \ldots . + \pi)$ *die nämliche Function* $f(x)$ *darstellte.*«

Und weiter: »*Die Coefficienten der Entwicklung lassen sich durch die Summe der Reihe ausdrücken wie folgt:*

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} d\alpha \cdot f(\alpha) ,$$

$$a_p = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} d\alpha \cdot f(\alpha) \cos p\alpha ,$$

$$b_p = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} d\alpha \cdot f(\alpha) \sin p\alpha ,$$

*jedesmal, wenn diese Ausdrücke einen Sinn haben.*«

---

*) Vorgelegt und zum Druck gegeben in der Sitzung am 31. Januar 1881.

Es ist hier meine Absicht, auf eine *andere Methode* aufmerksam zu machen, mittelst deren man diese Sätze oder wenigstens einen Theil derselben zu reproduciren im Stande ist, und welche den Vortheil gewährt, dass man mittelst derselben auch die analogen Sätze *für die Kugelfläche*, d. i. für die nach Kugelfunctionen fortschreitenden Reihen festzustellen vermag.

Da es sich, wie eben gesagt, nur um die Darlegung meiner *neuen Methode* handelt, so beschränke ich mich der Einfachheit willen auf den bequemsten Fall, nämlich auf den, dass die zu betrachtende Function *längs der Kreisperipherie überall stetig ist;* und will dabei nur bemerken, dass ich eben so gut mittelst dieser Methode auch den Fall hätte behandeln können, dass die Function längs der Kreisperipherie nicht stetig sondern nur *abtheilungsweise stetig* ist; nur würden alsdann die Betrachtungen ein wenig complicirter geworden sein.

## § 1.

## Aufstellung einer Potentialfunction der Kreisfläche, welche am Rande derselben vorgeschriebene Werthe besitzt.

Es sei $d\sigma$ das Element einer gegebenen Kreisperipherie*), ferner $\nu$ die auf $d\sigma$ errichtete *innere* Normale, endlich $E$ die Entfernung des Elementes $d\sigma$ von einem beliebig gegebenen Puncte $x$. Alsdann kann das über die ganze Peripherie erstreckte Integral:

$$(1.)\qquad w_x = \int \frac{\partial}{\partial \nu}\left(\log \frac{1}{E}\right) d\sigma$$

auch so geschrieben werden:

$$(2.)\qquad w_x = \int \frac{-1}{E}\frac{\partial E}{\partial \nu}\, d\sigma = \int \frac{\cos\vartheta}{E}\, d\sigma\,,$$

wo $\vartheta$ den Winkel vorstellt, unter welchem die Linie $E(d\sigma \to x)$ gegen $\nu$ geneigt ist. Nun ist aber $\frac{\cos\vartheta}{E}d\sigma$ gleich dem Winkel

*) In nachstehender Figur ist das Element $d\sigma$ mit $\alpha\beta$ bezeichnet.

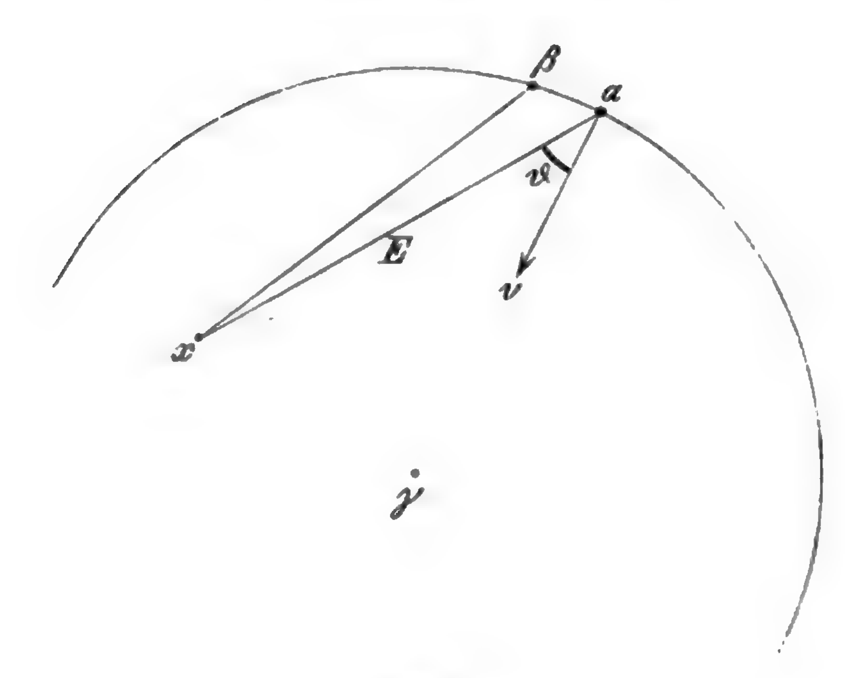



Fig. 1.

$\alpha x \beta$ (wo $\alpha$ und $\beta$ die beiden Endpunkte des Elementes $d\sigma$ vorstellen), also gleich der *scheinbaren Grösse* des Elementes $d\sigma$ für einen in $x$ befindlichen Beobachter, vorausgesetzt, dass der Punct $x$ *innerhalb* resp. *auf* der Peripherie liegt*). Acceptirt man also diese Voraussetzung, und bezeichnet man zugleich jene scheinbare Grösse mit $(d\sigma)_x$, so wird:

$$(3.)\qquad w_x = \int \frac{\partial}{\partial \nu}\left(\log \frac{1}{E}\right) \cdot d\sigma = \int \frac{\cos\vartheta}{E}\, d\sigma = \int (d\sigma)_x\,.$$

Wir werden im Folgenden sowohl dieses Integral, als auch das etwas allgemeinere

$$(4.)\qquad W_x = \int \frac{\partial}{\partial \nu}\left(\log \frac{1}{E}\right) \cdot f\,d\sigma = \int \frac{\cos\vartheta}{E} f\,d\sigma = \int f\,(d\sigma)_x$$

näher zu untersuchen haben. Dabei soll $f$ eine längs der Kreisperipherie willkürlich gegebene Function vorstellen.

Eine sehr merkwürdige Eigenschaft dieser Functionen $w_x$ und $W_x$ besteht darin, dass jede derselben längs der gegebenen Peripherie *constant* ist. Lässt man nämlich in der vorstehenden Figur den Punct $x$ nach der Peripherie rücken, so wird das von

*) Sollte nämlich $x$ *ausserhalb* der Peripherie liegen, so könnte $\cos\vartheta$ unter Umständen *negativ* werden. Dann aber würde die scheinbare Grösse des Elementes $d\sigma$ für einen in $x$ befindlichen Beobachter nicht durch $\left(+\frac{\cos\vartheta}{E}\, d\sigma\right)$ sondern durch $\left(-\frac{\cos\vartheta}{E}\, d\sigma\right)$ dargestellt sein.

den Puncten $x$, $a$ und $\gamma$ (dem Mittelpunkt der Peripherie) gebildete Dreieck ein *gleichschenkliges*. Und aus diesem Dreieck ergiebt sich alsdann sofort die Relation: $E = 2R\cos\vartheta$, wo $R$ den Radius der Peripherie vorstellt. Durch Substitution dieses Werthes von $E$ nehmen aber die Formeln (3.), (4.)

$$w_x = \int \frac{\cos\vartheta}{E}\, d\sigma ,$$

$$W_x = \int \frac{\cos\vartheta}{E} f\, d\sigma$$

folgende Gestalt an:

(3. a) $$w_x = \pi \frac{\int d\sigma}{2R\pi} = \pi ,$$

(4. a) $$W_x = \pi \frac{\int f d\sigma}{2R\pi} = \pi A ,$$

(vorausgesetzt, dass $x$ *auf* der gegebenen Kreisperipherie liegt),

wo $A$ das arithmetische Mittel derjenigen Werthe vorstellt, welche die Function $f$ längs der ganzen Peripherie besitzt. W. z. z. w.

Ausserdem sind, wie aus (3.), (4.) ersichtlich, $w_x$ und $W_x$ *Potentialfunctionen* der betrachteten Kreisfläche. Oder genauer ausgedrückt: Bezeichnet man eine dieser beiden Functionen mit $F$, und die Coordinaten des Punctes $x$ mit $(x, y)$, so werden $F$, $\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}$, etc. *stetig*, und $\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right) = 0$ sein für jedweden Punct $(x, y)$, der *innerhalb* der Kreisfläche liegt*).

In wie weit diese Eigenschaften auch noch stattfinden bei den *Rand*puncten der Fläche, bleibt vorläufig zweifelhaft. Doch werden wir bald sehen, dass die Function $F$ (d. i. $w_x$ oder $W_x$) beim Uebergange vom Innern der Fläche zu ihrem Rande sich *unstetig* ändert.

---

*) Das in (1.), (2.), (3.), (4.) enthaltene $\log\frac{1}{E}$ drückt sich nämlich durch die Coordinaten $(x, y)$ des Punktes $x$ und durch die Coordinaten $(a, b)$ des Elementes $d\sigma$ folgendermassen aus:

$$\log\frac{1}{E} = -\tfrac{1}{2}\log\left[(x-a)^2 + (y-b)^2\right] ;$$

und genügt also der Differentialgleichung $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = 0$. Hieraus aber folgt, mittelst der Formeln (3.), (4), dass $w_x$ und $W_x$ ebenfalls dieser Differentialgleichung Genüge leisten.

In der That folgt aus (3.) sofort, dass $w_x = 2\pi$ oder $= \pi$ ist, je nachdem der Punct $x$ *innerhalb* der Kreisfläche oder an ihrem Rande liegt *). Diese Function $w_x$ hat somit im Innern der Fläche einen *constanten Werth* $2\pi$, der jedoch beim Uebergange zum Rande *plötzlich sinkt* von $2\pi$ auf $\pi$. Wir können diese Verhältnisse, falls wir die *innern* Puncte mit $i$, und die *Rand*puncte mit $s$ bezeichnen, durch die Formeln andeuten:

$$(5.)\qquad \begin{aligned} w_i &= 2\pi\,, \\ w_s &= \pi\,. \end{aligned}$$

Construirt man also eine in den Puncten $i$ und $s$ resp. den Formeln

$$(6.)\qquad \begin{cases} \psi_i = w_i\,, \\ \psi_s = w_s + \pi \end{cases}$$

entsprechende Function $\psi_x$, *so wird diese letztere für die ganze gegebene Kreisfläche, ihren Rand mit eingeschlossen*, **constant,** *nämlich* $= 2\pi$ *sein.*

Einigermassen analoge Verhältnisse sind zu erwarten bei der allgemeinern Function (4.):

$$(7.)\qquad W_x = \int f(d\sigma)_x\,.$$

In der That wird es, ebenso wie bei $w$ das $\psi$ eingeführt wurde, ebenso auch hier zweckmässig sein, eine neue Function $\Psi$ einzuführen mittelst der Formeln:

$$(8.)\qquad \begin{cases} \Psi_i = W_i\,, \\ \Psi_s = W_s + \pi f_s\,. \end{cases}$$

Und zwar wird sich zeigen, *dass diese neue Function* $\Psi_x$ *auf der ganzen Kreisfläche, ihren Rand mit eingeschlossen, überall stetig ist*, vorausgesetzt, dass $f$ stetig ist längs des Randes.

Um näher hierauf einzugehen, markiren wir irgendwo am Rande der Kreisfläche einen festen Punct $c$, bezeichnen den in $c$ vorhandenen Werth $f_c$ der Kürze willen mit $C$, und subtrahiren von der Formel (7.) die mit $C$ multiplicirte Formel (3.):

$$(9.)\qquad Cw_x = C\int (d\sigma)_x\,,$$

---

*) Es ist nämlich nach (3.) $w_x = \int (d\sigma)_x$; und hieraus folgt, mittelst der geometrischen Bedeutung von $(d\sigma)_x$, unmittelbar, dass $w_x = 2\pi$ ist, sobald der Punct $x$ *innerhalb* der Kreisfläche liegt. Befindet sich andrerseits der Punct $x$ am *Rande* dieser Fläche, so wird nach (3.a): $w_s = \pi$.

wodurch sich ergiebt:

$$(10.)\qquad W_x - Cw_x = \int (f - C)\,(d\sigma)_x\,.$$

Sondern wir nun, mittelst eines kleinen um $c$ als Mittelpunct beschriebenen Hülfskreises $H$, sämmtliche Elemente $d\sigma$ in solche Elemente $d\sigma'$, die innerhalb $H$, und in solche Elemente $d\sigma''$, die ausserhalb $H$ liegen, so können wir die Formel (10.) auch so schreiben:

$$(11.)\qquad W_x - Cw_x = \underbrace{\int (f - C)\,(d\sigma')_x}_{U_x} + \underbrace{\int (f - C)\,(d\sigma'')_x}_{V_x}\,.$$

Da wir unter $x$ immer nur solche Puncte verstehen, die *innerhalb* oder *am Rande* der gegebenen Kreisfläche liegen, so sind die $(d\sigma)_x$, $(d\sigma')_x$, $(d\sigma'')_x$, ihrer geometrischen Bedeutung zufolge, sämmtlich *positiv*. Auch ist das über den ganzen Rand jener Fläche erstreckte Integral $\int (d\sigma)_x$, zufolge (3.), (5.), stets $\leqq 2\pi$; um so mehr also auch $\int (d\sigma')_x < 2\pi$. Denn dieses letztere Integral soll sich selbstverständlich nur über die Elemente $d\sigma'$, also nur über diejenigen der Elemente $d\sigma$ erstrecken, welche innerhalb des kleinen Hülfskreises $H$ liegen. Beachtet man diese Bemerkungen, und bezeichnet man ausserdem den absolut grössten Werth der Function $(f - C)$ innerhalb des Kreises $H$ mit $M$, so ergiebt sich aus (11.):

$$(12.)\qquad \text{abs}\,U_x \leqq \int [\text{abs}\,(f - C)]\,(d\sigma')_x \leqq M \int (d\sigma')_x < M \cdot 2\pi\,.$$

Wir wollen nun voraussetzen, *die längs des Kreisrandes gegebene Function $f$ sei daselbst* **überall stetig.** Gleiches gilt alsdann offenbar auch von der Function

$$(13.)\qquad f - C = f_s - C = f_s - f_c\,.$$

Auch wird diese letztere Function $= 0$ werden, sobald man den variablen Randpunct $s$ nach $c$ rücken lässt. Folglich wird man das in (12.) enthaltene $M$, d. i. den absolut grössten Werth der Function $(f - C)$ innerhalb des Hülfskreises $H$, durch Verkleinerung dieses Hülfskreises beliebig klein machen können. Und dies überträgt sich, vermöge jener Formel (12.), auf das $\text{abs}\,U_x$. Bezeichnet also $\varepsilon$ einen *ad libitum* gegebenen Kleinheitsgrad, so kann man das $\text{abs}\,U_x$ durch gehörige Verkleine-

rung des um den festen Punct $c$ beschriebenen Hülfskreises $H$ z. B. kleiner als $\frac{1}{3}\varepsilon$ machen.

Solches ausgeführt gedacht, beschreiben wir um $c$ einen zweiten noch kleinern Hülfskreis $h$, und lassen denselben soweit zusammenschrumpfen, dass für alle von ihm umschlossenen Puncte $x$ die Schwankung der Function $V_x$ ebenfalls kleiner als jenes $\frac{1}{3}\varepsilon$ wird*). Solches ausgeführt, sind alsdann offenbar die Schwankungen der Function $(U_x + V_x)$ für alle innerhalb $h$ befindlichen Puncte $x$ kleiner als $\varepsilon$. Gleiches gilt daher auch von der mit $(U_x + V_x)$ identischen Function $(W_x - Cw_x)$, vergl. (11.).

Wir wollen sofort noch einen Schritt weiter gehen, nämlich um den festen Punct $c$ einen neuen noch kleineren Hülfskreis $h^0$ beschreiben, und denselben so klein uns denken, dass die (stetige und in $c$ verschwindende) Function $\pi(f - C)$ ihrem absoluten Betrage nach innerhalb $h^0$ überall kleiner als jenes $\varepsilon$ ist.

*Alsdann werden also*, um die Hauptsache zusammenzufassen, *innerhalb des um c beschriebenen Hülfskreises $h^0$ einerseits die Schwankungen der Function*

$$(14.) \qquad \Delta_x = W_x - Cw_x ,$$

*und andererseits die absoluten Werthe der Function*

$$(15.) \qquad \lambda_s = \pi(f_s - C)$$

*überall kleiner als $\varepsilon$ sein, wo $\varepsilon$ den zu Anfang ad libitum gewählten Kleinheitsgrad vorstellt.* Dabei ist, was die Formel (14.) betrifft, wohl im Auge zu behalten, dass $x$ als Collectivbezeichnung dient für *alle Puncte der gegebenen Kreisfläche, ihren Rand mit eingeschlossen,* also als Collectivbezeichnung für sämmtliche Puncte $i$, $s$.

Dies constatirt, wollen wir nun statt der Functionen $W$, $w$ die ihnen adjungirten Functionen $\Psi$, $\psi$ in den Vordergrund treten lassen. Nach (6.) und (8.) ist:

---

*) Dass solches ausführbar ist, unterliegt keinem Zweifel. Denn das in (11.) mit $V_x$ bezeichnete Integral erstreckt sich nur über die Elemente $d\sigma''$, d. i. nur über denjenigen Theil der gegebenen Peripherie, welcher *ausserhalb* des Hülfskreises $H$ liegt. Folglich ist dieses $V_x$ für die *innerhalb* $H$ liegenden Puncte $x$ durchweg *stetig*.

$$\begin{cases} \Psi_i = W_i \,, \\ \Psi_s = W_s + \pi f_s \,, \end{cases} \qquad \begin{cases} \psi_i = w_i \\ \psi_s = w_s + \pi \,, \end{cases}$$

und folglich:

$$\begin{cases} \Psi_i - C\psi_i = (W_i - Cw_i) \,, \\ \Psi_s - C\psi_s = (W_s - Cw_s) + \pi(f_s - C) \,, \end{cases}$$

also mit Rücksicht auf die in (14.), (15.) eingeführten Bezeichnungen:

$$\begin{cases} \Psi_i - C\psi_i = \varDelta_i \,, \\ \Psi_s - C\psi_s = \varDelta_s + \lambda_s \,, \end{cases}$$

oder, weil $\psi_x$ [vergl. (6.)] auf der ganzen Kreisfläche, ihren Rand mit eingeschlossen, *constant*, nämlich $= 2\pi$ ist:

(16.)
$$\begin{cases} \Psi_i = 2\pi C + \varDelta_i \,, \\ \Psi_s = 2\pi C + \varDelta_s + \lambda_s \,. \end{cases}$$

Aus diesen Formeln (16.) aber folgt mit Rücksicht auf die Ergebnisse (14.), (15.), dass die Schwankungen der Function $\Psi_x$ innerhalb des um den festen Punct $c$ beschriebenen Hülfskreises $h_0$ überall kleiner als $3\varepsilon$ sind.

Auf die Gefahr hin, zu weitläufig zu werden, will ich das eben Gesagte noch ein wenig weiter erläutern: Sind $i$, $i_1$ irgend zwei Puncte innerhalb der gegebenen Kreisfläche, und $s$, $s_1$ irgend zwei Puncte an ihrem Rande, so sind die Schwankungen der Function $\Psi_x$ (16.) theils von der Form:

(α.) $$\Psi_i - \Psi_{i_1} = \varDelta_i - \varDelta_{i_1} \,,$$

theils von der Form:

(β.) $$\Psi_i - \Psi_s = \varDelta_i - (\varDelta_s + \lambda_s) \,,$$

theils endlich von der Form:

(γ.) $$\Psi_s - \Psi_{s_1} = (\varDelta_s + \lambda_s) - (\varDelta_{s_1} + \lambda_{s_1}) \,.$$

So lange aber $i$, $i_1$ und $s$, $s_1$ innerhalb des Kreises $h^0$ bleiben, ist jeder dieser Ausdrücke (α.), (β.), (γ.), zufolge der Sätze (14.), (15.), seinem absoluten Betrage nach kleiner als $3\varepsilon$*). W. z. z. w.

Innerhalb des um den Randpunct $c$ beschriebenen Hülfskreises $h^0$ sind also die Schwankungen der Function $\Psi_x$ kleiner

*) Nämlich der absolute Werth von (α.) kleiner als $\varepsilon$, der von (β.) kleiner als $2\varepsilon$, und der von (γ.) kleiner als $3\varepsilon$.

als $3\varepsilon$, wo das $\varepsilon$ einen zu Anfang *ad libitum* gewählten Kleinheitsgrad vorstellt. Mit andern Worten: *Die Function $\Psi_x$ ist in jenem Puncte c stetig.* Und solches gilt offenbar für *jeden beliebigen* Randpunct; denn $c$ war ja zu Anfang auf dem Rande der gegebenen Kreisfläche ganz beliebig gewählt. Dass andererseits die Function $\Psi_x$ auch stetig ist für jeden *innern* Punct $i$, bedarf keiner Erläuterung, folgt nämlich unmittelbar aus der für $\Psi_x$ gegebenen Definition (8.). Wir gelangen somit zu folgendem Resultat:

*Bezeichnet f eine längs des Randes der gegebenen Kreisfläche willkürlich gegebene, jedoch daselbst überall* **stetige** *Function, setzt man ferner:*

$$(17.)\qquad W_x = \int \frac{\partial}{\partial \nu}\left(\log \frac{1}{E}\right) \cdot f\,d\sigma = \int \frac{\cos\vartheta}{E} f\,d\sigma = \int f(d\sigma)_x\,,$$

*und construirt man endlich die den Formeln:*

$$(18.)\qquad \begin{cases} \Psi_i = W_i\,, \\ \Psi_s = W_s + \pi f_s \end{cases}$$

*entsprechende Function $\Psi_x$, so wird diese letztere auf der ganzen Kreisfläche*, **ihren Rand mit eingeschlossen,** *überall* **stetig** *sein.*

Da nun die $W_s$ [vergl. (4.a)] *constant,* nämlich $= \pi A$ sind, so kann man die Formeln (18.) auch so schreiben:

$$\begin{cases} \Psi_i = W_i\,, \\ \Psi_s = \pi(A + f_s)\,, \end{cases}$$

oder (was dasselbe ist) auch so schreiben:

$$\begin{cases} \frac{1}{\pi}\Psi_i - A = \frac{1}{\pi} W_i - A\,, \\ \frac{1}{\pi}\Psi_s - A = f_s\,, \end{cases}$$

oder endlich, falls man die Function $\frac{1}{\pi}\Psi - A = \Omega$ setzt, auch so:

$$\begin{aligned} &(19.)\qquad \Omega_i = \frac{1}{\pi} W_i - A\,, \\ &(20.)\qquad \Omega_s = f_s\,. \end{aligned}$$

Diese neue Function $\Omega = \frac{1}{\pi}\Psi - A$ wird offenbar (ebenso wie $\Psi$ selber) auf der Kreisfläche, ihren Rand mit eingeschlossen, überall stetig sein. Ferner wird sie nach (19.), ebenso wie $W$,

eine Potentialfunction der Kreisfläche sein; und endlich wird sie nach (20.) am Rande der Fläche identisch mit $f$ sein. Wir gelangen somit zu folgendem Satz:

*Man kann stets eine Potentialfunction der gegebenen Kreisfläche angeben, welche am Rande derselben willkürlich vorgeschriebene Werthe f besitzt, falls nur diese letztern* **stetig** *miteinander zusammenhängen. In der That wird eine solche Potentialfunction durch*

$$\Omega_i = \frac{1}{\pi} W_i - A \tag{21.}$$

*dargestellt sein, wo $W_i$ durch das Integral (4.), und die Constante A durch die Formel (4.a) definirt sind. Substituirt man diese Werthe von $W_i$ und A, so folgt:*

$$\Omega_i = \frac{1}{\pi} \int \left[ \frac{\partial}{\partial \nu} \left( \log \frac{1}{E} \right) - \frac{1}{2R} \right] f d\sigma\ , \tag{22.}$$

*wo E den Abstand des Punctes i vom Elemente $d\sigma$, ferner $\nu$ die auf $d\sigma$ errichtete* **innere** *Normale, endlich R den Radius der Kreisfläche vorstellt.*

Es fragt sich nun, ob diese Function $\Omega_i$ (10.) die *einzige* Potentialfunction der Kreisfläche ist, welche am Rande derselben die vorgeschriebenen Werthe $f$ besitzt, oder ob vielleicht ausser dieser noch *andere* existiren, die ebenfalls jener Anforderung entsprechen. Diese Frage soll im folgenden Paragraph beantwortet werden.

---

## § 2.

## Es wird gezeigt, dass ausser der gefundenen Potentialfunction keine andere existiren kann, welche am Rande die vorgeschriebenen Werthe besitzt.

Es bezeichne $F = F(x, y)$ irgend eine (völlig unbekannte) Potentialfunction der gegebenen Kreisfläche; oder genauer ausgedrückt, es bezeichne $F = F(x, y)$ eine Function, die folgende Eigenschaften hat:

I. *Die Werthe von F sind auf der ganzen Kreisfläche, ihren Rand mit einbegriffen, überall* **stetig**;

II. *Für jedweden Punct $(x, y)$, der* **innerhalb** *der Kreis-*

*fläche* (also nicht hart an ihrem Rande) *liegt*, *sind* $\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}$, etc. **stetig,** *und* $\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right)$ *gleich* **Null.**

Um diese Function $F$ zu untersuchen, bedienen wir uns der bekannten *Green*'schen Formeln. Doch können wir diese Formeln, da die Voraussetzungen II. nur auf *innere* Puncte sich beziehen, nicht unmittelbar auf die gegebene Kreisfläche anwenden, wohl aber auf jeden *innerhalb* derselben construirten Kreis $\sigma$; vergl. die Figur. Wir erhalten alsdann:

(1.) $$0 = \int \frac{\partial F}{\partial \nu} d\sigma\,,$$

(2.) $$F_i = \frac{1}{2\pi} \int \left[ F \frac{\partial}{\partial \nu} \left(\log \frac{1}{E}\right) - \left(\log \frac{1}{E}\right) \frac{\partial F}{\partial \nu} \right] d\sigma\,,$$

die Integrationen erstreckt über alle Elemente $d\sigma$ der Peripherie $\sigma$. Dabei bezeichnet $\nu$ die auf $d\sigma$ errichtete innere Normale, ferner $F_i$ den Werth von $F$ in einem *innerhalb* der Peripherie $\sigma$ gelegenen Puncte $i$, endlich $E$ die Entfernung dieses Punctes $i$ vom Elemente $d\sigma$.

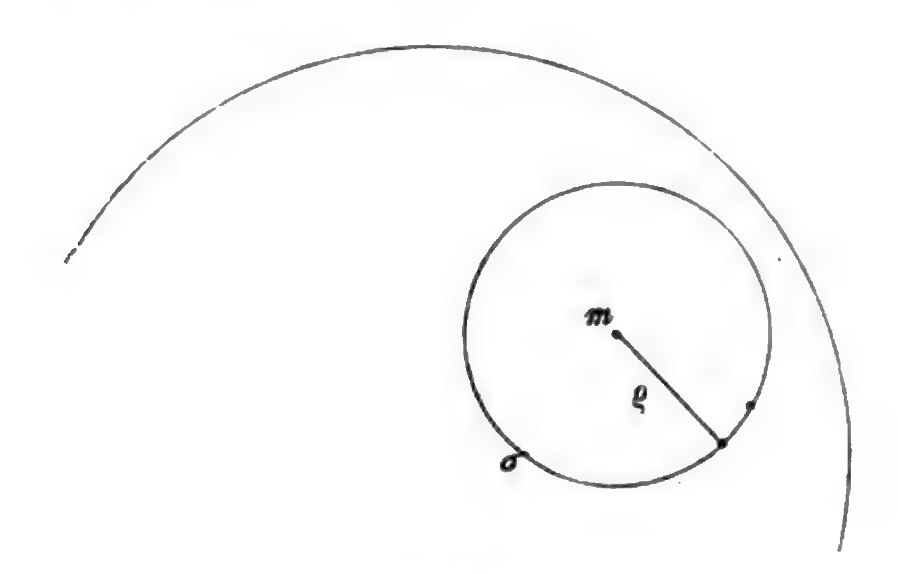



Fig. 2.

Nimmt man insbesondere für $i$ den Mittelpunct $m$ der Peripherie $\sigma$, und bezeichnet den Radius derselben mit $\varrho$, so wird

$$E = \varrho\,, \quad \text{und} \quad \frac{\partial}{\partial \nu}\left(\log \frac{1}{E}\right) = -\frac{\partial}{\partial \varrho}\left(\log \frac{1}{\varrho}\right) = \frac{1}{\varrho}\,;$$

so dass also die Formel (2.) übergeht in:

(3.) $$F_m = \frac{1}{2\pi} \int \left[ \frac{F}{\varrho} - \left(\log \frac{1}{\varrho}\right) \frac{\partial F}{\partial \nu} \right] d\sigma\,.$$

Hieraus aber folgt, weil $\varrho$ constant ist, mit Rücksicht auf (1.):

$$(4.) \qquad F_m = \frac{\int F d\sigma}{2\pi\varrho};$$

und diese Formel sagt aus, *dass der Werth von F im Puncte m identisch ist mit dem arithmetischen Mittel derjenigen Werthe, welche F besitzt längs der um m als Mittelpunct beschriebenen Peripherie σ.* Oder kürzer: Jene Formel (4.) sagt aus,

(5.) dass $F_m$ das arithmetische Mittel der $F_\sigma$ vorstellt.

Dabei ist, wie kaum noch der Erwähnung bedarf, unter den $F_\sigma$ die Gesammtheit derjenigen Werthe zu verstehen, welche $F$ längs der Peripherie $\sigma$ besitzt. — Nun sind offenbar nur zwei Fälle denkbar: *Entweder* die $F_\sigma$ sind constant, d. i. alle von einerlei Grösse. Alsdann wird ihr arithmetisches Mittel, d. i. $F_m$ eben dieselbe Grösse besitzen, also mit den $F_\sigma$ identisch sein. *Oder aber* die $F_\sigma$ sind nicht alle von einerlei Grösse. Alsdann wird ihr arithmetisches Mittel, d. i. $F_m$ zwischen den $F_\sigma$ eine mittlere Rangstufe einnehmen, indem es einige derselben an Grösse übertrifft, anderen nachsteht. Wir sehen somit, dass $F_m$ weder im einen noch im anderen Fall alle $F_\sigma$ an Grösse übertrifft, und können also, weil diese beiden Fälle die einzig denkbaren sind, geradezu sagen:

(6.) Es ist *unmöglich*, dass das $F_m$ die sämmtlichen $F_\sigma$ an Grösse übertrifft.

Dieser einfache Satz (6.) führt zu wichtigen Folgerungen. Um näher darauf einzugehen, bezeichnen wir (genau wie im vorhergehenden Paragraph) alle Puncte der ganzen gegebenen Kreisfläche, ihren Rand mit eingeschlossen, mit $x$, so dass also z. B. der Punct $m$ ein Individuum aus dem System der $x$, und ebenso $F_m$ ein Individuum aus dem System der $F_x$ repräsentirt. Dies festgesetzt, ergiebt sich sofort,

(7.) dass das $F_m$ unmöglich alle übrigen $F_x$ an Grösse übertreffen kann.

Denn wäre solches der Fall, so müsste es z.B. auch alle $F_\sigma$ an Grösse übertreffen, was dem Satze (6.) widerspricht.

Nun kann aber der Punct $m$ auf der gegebenen Kreisfläche *beliebig* gewählt werden; nur muss er *innerhalb* derselben liegen, d.i. vom Rande derselben durch irgend welchen Abstand

getrennt sein. Denn wie klein dieser Abstand auch sein mag, stets wird sich alsdann um $m$ als Mittelpunct eine kleine Kreisperipherie $\sigma$ beschreiben lassen, die ebenfalls vollständig *innerhalb* der gegebenen Kreisfläche liegt. Demgemäss ist der Satz (7.) folgendermassen auszusprechen:

(8.) Markirt man irgendwo *innerhalb* der gegebenen Kreisfläche einen Punct $m$, so wird der daselbst vorhandene Werth $F_m$ unmöglich grösser sein können als alle übrigen $F_x$.

Existirt also *überhaupt* unter den Werthen $F_x$ einer, der alle übrigen an Grösse übertrifft (und das wird immer der Fall sein, wenn nicht etwa $F$ auf der ganzen Kreisfläche constant ist), so muss dieser grösste Werth nothwendig *am Rande* liegen. Wir gelangen somit zu folgendem Satz:

*Setzt man voraus, die* [*den Anforderungen* I. II. (Seite 10) *entsprechende*] *Function F sei auf der gegebenen Kreisfläche nicht überall constant, so wird ihr* **grösster** *Werth nothwendig* **am Rande** *der Fläche gelegen sein.* Und ebenso wird sich offenbar zeigen lassen, *dass bei der gemachten Voraussetzung ihr* **kleinster** *Werth ebenfalls* **am Rande** *liegen muss.*

Hieraus aber folgt unmittelbar der weitere Satz: *Ist die* [*den Anforderungen* I. II. (Seite 10) *entsprechende*] *Function F* **längs des Randes** *der gegebenen Kreisfläche constant, so wird sie denselben constanten Werth auch besitzen in allen* **innern** *Puncten der Fläche.*

Sind nun $F_1$ und $F_2$ irgend zwei den Anforderungen I. II. (Seite 10) entsprechende Functionen, und besitzen beide *genau dieselben* Randwerthe, so wird offenbar ihre Differenz $(F_1 - F_2)$ eine Function sein, die ebenfalls jenen Anforderungen entspricht, und ausserdem *längs des Randes constant,* nämlich $= 0$ ist. Zufolge des letzten Satzes wird daher diese Function $(F_1 - F_2)$ auch *im Innern* der Kreisfläche überall $= 0$ sein. Also der Satz:

*Sind längs des Randes der Kreisfläche irgend welche stetig mit einander zusammenhängende Werthe f vorgeschrieben, so kann immer nur* **eine** *den Anforderungen* I. II. (Seite 10) *entsprechende und am Rande mit jenen f übereinstimmende Function F existiren. Und diese eine wird,* können wir hinzufügen, *in jedem beliebigen innerhalb der Kreisfläche liegenden Puncte i einen Werth*

*haben, der dargestellt ist durch folgendes über den* **Kreisrand** *hinerstreckte Integral* [vergl. (22.) Seite 10]:

$$(5.)\qquad F_i = \frac{1}{2\pi}\int\left[2\frac{\partial}{\partial\nu}\left(\log\frac{1}{E}\right) - \frac{1}{R}\right] f d\sigma\ .$$

*Dabei bezeichnet E den Abstand des Randelementes $d\sigma$ vom Puncte i, ferner $\nu$ die auf $d\sigma$ errichtete* **innere** *Normale, endlich R den Radius des Kreises.*

Wir bezeichnen nun die Polarcoordinaten des Punctes $i$ und des Elementes $d\sigma$ respective mit $(r, \varphi)$ und $(R, \Phi)$, und setzen dem entsprechend:

$$(\alpha.)\qquad d\sigma = R d\Phi\ , \qquad f = f(\Phi) \quad \text{und} \quad F_i = F(r, \varphi)\ .$$

Alsdann ist bekanntlich:

$$(\beta.)\qquad \log\frac{1}{E} = \log\frac{1}{R} + \sum_1^\infty \frac{1}{n}\left(\frac{r}{R}\right)^n \cos n(\varphi - \Phi)\ ,$$

$$(\gamma.)\qquad \frac{\partial}{\partial\nu}\left(\log\frac{1}{E}\right) = -\frac{\partial}{\partial R}\left(\log\frac{1}{E}\right) =$$

$$= \frac{1}{R} + \sum_1^\infty \frac{1}{R}\left(\frac{r}{R}\right)^n \cos n(\varphi - \Phi)\ ;$$

und aus $(\alpha.)$, $(\gamma.)$ folgt sofort:

$$(\delta.)\qquad \left[2\frac{\partial}{\partial\nu}\left(\log\frac{1}{E}\right) - \frac{1}{R}\right] d\sigma =$$

$$= \left[1 + 2\sum_1^\infty \left(\frac{r}{R}\right)^n \cos n(\varphi - \Phi)\right] d\Phi\ .$$

Mittelst $(\alpha.)$ und $(\delta.)$ aber geht unsere Formel (5.) über in:

$$(6.)\qquad F(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[1 + 2\sum_1^\infty \left(\frac{r}{R}\right)^n \cos n(\varphi - \Phi)\right] f(\Phi)\, d\Phi\ .$$

Die hier unter dem Integralzeichen stehende Reihe ist für den Fall $r < R$ *absolut convergent;* so dass wir also in diesem Fall ohne Bedenken *gliedweise* integriren dürfen. Und hierdurch erhalten wir:

$$(7.)\qquad F(r, \varphi) = \mathfrak{A}_0 + 2\sum_1^\infty \left(\frac{r}{R}\right)^n (\mathfrak{A}_n \cos n\varphi + \mathfrak{B}_n \sin n\varphi)\ ,$$

$$\text{für } r < R\ ,$$

wo die $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ die Werthe haben:

(8.)
$$\mathfrak{A}_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\Phi) \cos n\Phi \cdot d\Phi \,,$$
$$\mathfrak{B}_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\Phi) \sin n\Phi \cdot d\Phi \,.$$

Somit kann also der vorhergehende Satz auch so ausgesprochen werden:

*Es sei eine Kreisfläche gegeben vom Radius $R$; und demgemäss mögen die Randpuncte dieser Fläche mit $(R, \Phi)$, und die innern Puncte derselben mit $(r, \varphi)$ bezeichnet sein, wo $r < R$.*

*Sind nun längs des Randes der Kreisfläche irgend welche stetig zusammenhängenden Werthe $f(\Phi)$ vorgeschrieben, so wird immer nur* **eine** *den Anforderungen* I. II. (S. 10) *entsprechende und am Rande mit jenen $f(\Phi)$ übereinstimmende Function $F(r, \varphi)$ existiren. Diese eine aber wird in allen Puncten $(r, \varphi)$, deren $r < R$ ist, dargestellt sein durch die Formel* (7), *deren Coefficienten* $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ *die in* (8) *angegebenen Werthe haben.*

---

## § 3.

## Ableitung zweier von Cantor und Du Bois-Reymond aufgestellten Sätze.

Auf einer Kreisperipherie vom Radius $R$ bezeichnen wir die Polarcoordinaten eines beliebigen Punctes mit $(R, \Phi)$, und rechnen den Winkel $\Phi$ von 0 bis $2\pi$. Es sei nun $f(\Phi)$ eine beliebig gegebene, jedoch *auf der Kreisperipherie überall stetige* Function, und es sei (durch irgend welche Mittel, vielleicht auch durch Zufall) gelungen, diese Function durch eine nach den Cosinus und den Sinus der Vielfachen von $\Phi$ fortschreitende Reihe:

(1.)
$$f = f(\Phi) = \alpha_0 + 2\sum_1^\infty (\alpha_n \cos n\Phi + \beta_n \sin n\Phi)$$

darzustellen. Oder genauer ausgedrückt: *Es sei gelungen, die in dieser Formel enthaltenen Constanten $\alpha$, $\beta$ der Art zu bestimmen, dass die Formel convergent und gültig ist für jedweden Punct der Kreisperipherie.*

Solches vorausgesetzt, legen wir uns die Frage vor, ob ausser diesen *bestimmten speciellen* Constanten $\alpha$, $\beta$ vielleicht noch irgend welche *andern* Constanten $\alpha$, $\beta$ existiren könnten, welche dasselbe leisten, d. i. für welche die Entwicklung (1.) ebenfalls convergent und gültig sein würde in jedwedem Puncte der Peripherie. Zu diesem Zwecke bilden wir zunächst folgende *auxiliare* Function:

$$(2.)\qquad F = F(r, \varphi) = \alpha_0 + 2\sum_1^\infty \left(\frac{r}{R}\right)^n (\alpha_n \cos n\varphi + \beta_n \sin n\varphi)\ ,$$

$$r < R\ ;$$

indem wir unter $(r, \varphi)$ irgend welchen Punct *innerhalb* der Peripherie verstehen. Dass diese Reihe (2.) für $r < R$ convergent, und zwar *absolut convergent* ist, bedarf keiner Erläuterung.

Ein Blick auf die Formeln (1.), (2.) erweckt bereits die Vermuthung, es werde sich nachweisen lassen, dass die Function $F$ eine Potentialfunction der betrachteten Kreisfläche, und am Rande dieser Fläche identisch mit der gegebenen Function $f$ sei. Nachdem ich, zur Führung dieses Nachweises, mancherlei beschwerliche und weitläufige Wege verfolgt hatte, bin ich schliesslich zu einer Methode gelangt, die, wenn sie vielleicht auch auf den ersten Blick etwas künstlich erscheinen mag, doch in Bezug auf Kürze und Einfachheit nichts zu wünschen übrig lässt.

Innerhalb der gegebenen mit dem Radius $R$ beschriebenen Kreisperipherie construire ich eine zweite, mit jener *concentrische* Peripherie, mit irgend welchem Radius $R' < R$; bezeichne irgend ein Element dieser zweiten Peripherie mit $d\sigma'$, die auf $d\sigma'$ errichtete *innere* Normale mit $\nu'$, endlich die Coordinaten dieses Elementes $d\sigma'$ mit $(R', \Phi')$; so dass also $d\sigma' = R'd\Phi'$ wird. Markirt man nun *innerhalb* dieser zweiten Peripherie einen beliebigen Punct $(r, \varphi)$ und bezeichnet den Abstand dieses Punctes von $d\sigma'$ mit $E$, so gilt [wie früher in ($\delta$.) Seite 14 gefunden wurde] die Formel:

$$(3.)\qquad \left[2\frac{\partial}{\partial \nu'}\left(\log\frac{1}{E}\right) - \frac{1}{R'}\right] d\sigma' =$$

$$= \left[1 + 2\sum_1^\infty \left(\frac{r}{R'}\right)^n \cos n(\varphi - \Phi')\right] d\Phi'\ .$$

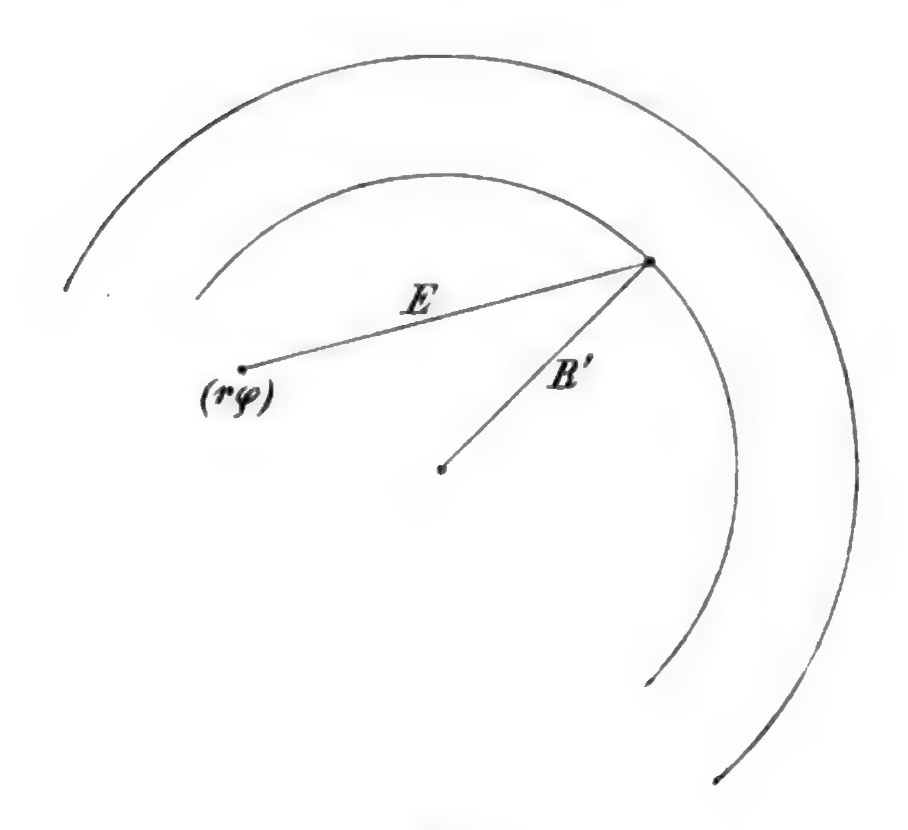



Fig. 3.

Multiplicirt man diese Formel mit der aus (2.) entspringenden:

$$(4.)\quad \frac{1}{2\pi}F(R', \Phi') =$$
$$= \frac{1}{2\pi}\left[\alpha_0 + 2\sum_1^\infty \left(\frac{R'}{R}\right)^n \alpha_n \cos n\Phi' + \beta_n \sin n\Phi')\right],$$

und integrirt sodann über alle Elemente $d\sigma'$, d. i. über $\Phi' = 0 \ldots 2\pi$, so ergiebt sich die Formel:

$$(5.)\quad \frac{1}{2\pi}\int\left[2\frac{\partial}{\partial\nu'}\left(\log\frac{1}{E}\right) - \frac{1}{R'}\right]F(R', \Phi')\,d\sigma'$$
$$= \alpha_0 + 2\sum_1^\infty \left(\frac{r}{R}\right)^n (\alpha_n \cos n\varphi + \beta_n \sin n\varphi),$$

deren rechte Seite offenbar identisch ist mit (2.), d. i. mit $F(r, \varphi)$. Man erhält also:

$$(6.)\quad F(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi}\int\left[2\frac{\partial}{\partial\nu'}\left(\log\frac{1}{E}\right) - \frac{1}{R'}\right]F(R', \Phi')\,d\sigma'.$$

Die Integration, durch welche ich hier von den Formeln (3.), (4.) zu (5.) resp. (6) gelangt bin, ist eine *völlig legitime*. Denn jene unendlichen Reihen in (3.) und (4.) sind, zufolge der hier gemachten Voraussetzung $r < R' < R$, *absolut convergent*.

Bezeichnet man nun aber die rechtwinkligen Coordinaten

des Punctes $(r, \varphi)$ mit $(x, y)$, und beachtet man, dass diese Coordinaten $(r, \varphi)$ oder $(x, y)$ auf der *rechten Seite* der Formel (6.) nur insofern vorkommen, als sie in

$$\log\frac{1}{E} = -\tfrac{1}{2}\log\left[r^2 + R'^2 - 2rR'\cos(\varphi - \Phi')\right],$$
$$= -\tfrac{1}{2}\log\left[(x - R'\cos\Phi')^2 + (y - R'\sin\Phi')^2\right]$$

enthalten sind, so ergiebt sich aus (6.) augenblicklich, dass erstens die Function $F = F(r, \varphi)$ nach $x$, $y$ *differentiirbar* ist, dass zweitens

$$(7.)\qquad F,\quad \frac{\partial F}{\partial x},\quad \frac{\partial F}{\partial y},\quad \frac{\partial^2 F}{\partial x^2},\quad \frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y},\quad \text{etc. etc.}$$

*stetig* sind, und dass endlich drittens

$$(8.)\qquad \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 0$$

ist. Und zwar ergiebt sich aus unserer Betrachtung, dass diese Eigenschaften (7.), (8.) stattfinden *für jedweden Punct* $(r, \varphi)$ *oder* $(x, y)$, *der* **innerhalb** *der gegebenen Kreisfläche liegt, d. i. dessen* $r < R$ *ist.* Denn wie klein bei einem solchen Puncte der Unterschied zwischen $r$ und $R$ auch sein mag, stets wird sich eine Grösse $R'$ angeben lassen, die der Bedingung $r < R' < R$ entspricht. Dann aber liegt der Punct innerhalb eines mit dem Radius $R'$ beschriebenen Hülfskreises und subordinirt sich also den vorhin angestellten Betrachtungen.

Um endlich zu zeigen, dass $F$ am Rande der gegebenen Kreisfläche identisch mit $f$ wird, markiren wir zwei auf *demselben Radius* gelegene Puncte $(R, \Phi)$ und $(r, \Phi)$, wo $r < R$ sein soll *). Für diese Puncte besitzen alsdann $f$ (1.) und $F$ (2.) die Werthe:

$$(9.)\qquad f = f(\Phi) = \alpha_0 + 2\sum_1^\infty(\alpha_n\cos n\Phi + \beta_n\sin n\Phi),$$

$$(10.)\qquad F = F(r, \Phi) = \alpha_0 + 2\sum_1^\infty\left(\frac{r}{R}\right)^n(\alpha_n\cos n\Phi + \beta_n\sin n\Phi),$$
$$r < R;$$

wofür wir zur augenblicklichen Abkürzung schreiben wollen:

*) Der Punct $(R, \Phi)$ liegt am *Rande* der gegebenen Kreisfläche. Denn es sollte ja $R$ der Radius dieser Fläche sein.

$$(11.)\quad f = \sum_0^\infty Y_n,$$

$$(12.)\quad F = \sum_0^\infty \varrho^n Y_n, \qquad \text{wo}\quad \varrho = \frac{r}{R} < 1 \quad \text{ist.}$$

Die eingeführten $Y$ haben dann also folgende Bedeutungen:

$$Y_0 = \alpha_0 \qquad \text{und} \qquad Y_n = 2\,(\alpha_n \cos n\Phi + \beta_n \sin n\Phi)$$

und sind also constant, so lange wir bei *ein und demselben Azimuth* $\Phi$ bleiben.

An der Voraussetzung $r < R$, d. i. $\varrho < 1$, werden wir durchweg festhalten, und den $\lim_{\varrho=1} F$ zu untersuchen haben. Bezeichnen wir die Restglieder der unendlichen Reihen (11.), (12.) mit $f_n$, $F_n$, indem wir setzen:

$$(13.)\qquad f_n = Y_{n+1} + Y_{n+2} + Y_{n+3} + \ldots,$$

$$(14.)\qquad F_n = \varrho^n\,(Y_{n+1}\varrho + Y_{n+2}\varrho^2 + Y_{n+3}\varrho^3 + \ldots),$$

so ergiebt sich einerseits aus (11.), (12.):

$$(15.)\qquad f - F =$$
$$= Y_1(1-\varrho) + Y_2(1-\varrho^2) + Y_3(1-\varrho^3) + \ldots,$$
$$= (1-\varrho)\,[Y_1 + Y_2(1+\varrho) + Y_3(1+\varrho+\varrho^2) + \ldots],$$

und andererseits aus (13.), (14.):

$$(16.)\qquad \varrho^n f_n - F_n =$$
$$= \varrho^n\,[Y_{n+1}(1-\varrho) + Y_{n+2}(1-\varrho^2) + Y_{n+3}(1-\varrho^3) + \ldots],$$
$$= \varrho^n(1-\varrho)\,[Y_{n+1} + Y_{n+2}(1+\varrho) + Y_{n+3}(1+\varrho+\varrho^2) + \ldots].$$

Die Formel (15.) können wir folgendermassen schreiben:

$$(17.)\qquad f - F = (1-\varrho)\times$$

$$\times\left\{\begin{array}{l}
\;\;Y_1\\
+ Y_2\cdot(1+\varrho)\\
\;\;\ldots\ldots\ldots\\
+ Y_n\cdot(1+\varrho+\varrho^2\ldots+\varrho^{n-1})\\
+ Y_{n+1}(1+\varrho+\varrho^2\ldots+\varrho^{n-1}) + \underline{Y_{n+1}\,\varrho^n}\\
+ Y_{n+2}(1+\varrho+\varrho^2\ldots+\varrho^{n-1}) + \underline{Y_{n+2}(\varrho^n+\varrho^{n+1})}\\
+ Y_{n+3}(1+\varrho+\varrho^2\ldots+\varrho^{n-1}) + \underline{Y_{n+3}(\varrho^n+\varrho^{n+1}+\varrho^{n+2})}\\
\;\;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}\right\}$$

Die Summe der hier unterstrichenen Glieder ist aber [den vorstehenden Factor $(1-\varrho)$ mit eingerechnet] identisch mit $\varrho^n f_n - F_n$, wie aus (16.) ersichtlich; und convergirt also, ebenso wie die Restglieder $f_n$ und $F_n$, mit wachsendem $n$ gegen 0. Folglich können wir die Formel (17.) ordnen nach den aufeinander folgenden Verticalreihen, und erhalten hierdurch:

$$(18.) \qquad f - F = (1-\varrho)\,[f_0 + f_1\varrho + f_2\varrho^2 + f_3\varrho^3 + \ldots],$$

wo die $f_n$ die in (13.) angegebene Bedeutung haben, also *endlich* sind, und mit wachsendem $n$ gegen 0 convergiren*). Bezeichnen wir den absolut grössten Werth all' dieser unendlich vielen Grössen $f_0, f_1, f_2, \ldots$ mit $M$, so ist offenbar:

$$\text{abs}\,[f_0 + f_1\varrho + f_2\varrho^2 \ldots + f_{n-1}\varrho^{n-1}] <$$
$$< M\,[1 + \varrho + \varrho^2 \ldots + \varrho^{n-1}] = \frac{M(1-\varrho^n)}{1-\varrho}.$$

Ferner ergiebt sich:

$$f_n\varrho^n + f_{n+1}\varrho^{n+1} + \ldots = g_n(\varrho^n + \varrho^{n+1} + \ldots) = \frac{g_n\varrho^n}{1-\varrho},$$

wo $g_n$ einen unbekannten Mittelwerth der Grössen $f_n$, $f_{n+1}$, $f_{n+2}$, $f_{n+3}$, ..... vorstellt, also (ebenso wie $f_n$) mit wachsendem $n$ gegen 0 convergirt. Mit Rücksicht auf diese beiden letzten Formeln folgt aus (18.):

$$(19.) \qquad \text{abs}\,(f-F) < M(1-\varrho^n) + (\text{abs}\,g_n)\,\varrho^n,$$

also, weil $\varrho$ der Bedingung $0 < \varrho < 1$ entsprechen soll:

$$(20.) \qquad \text{abs}\,(f-F) < M(1-\varrho^n) + (\text{abs}\,g_n).$$

Folglich kann man das abs $(f-F)$ durch Vergrösserung von $\varrho$ [d. i. durch Anwachsenlassen von $\varrho$ gegen 1] unter einen beliebigen Kleinheitsgrad $\varepsilon$ hinabdrücken; in der Weise, dass man zunächst das *zweite* Glied (abs $g_n$) durch Vergrösserung von $n$ kleiner als $\frac{1}{2}\varepsilon$, sodann aber das *erste* Glied $M(1-\varrho^n)$ durch Anwachsenlassen von $\varrho$ gegen 1 ebenfalls kleiner als $\frac{1}{2}\varepsilon$ macht. Auch bemerkt man, dass das *zweite* Glied ungeändert bleiben, das *erste* aber noch weiter sich verkleinern würde, sobald man nach Ausführung der genannten Operationen das $\varrho$

---

*) Dies ergiebt sich sofort aus der über die Reihe (11.) oder (1.) gemachten Voraussetzung. Denn in (1.) war ausdrücklich angenommen worden, dass diese Reihe *convergent* sei.

noch weiter gegen 1 anwachsen lassen wollte. Kurz, die Formel (20.) zeigt in deutlicher Weise, dass

(21.) $$\lim_{\varrho=1}(f-F) = 0$$

ist. Hierfür aber kann man, weil $f$ von $\varrho$ unabhängig ist, einfacher schreiben:

(22.) $$\lim_{\varrho=1} F = f. \qquad \text{W. z. z. w.}$$

Dieses Ergebniss (22.) mit den früheren Ergebnissen (7.), (8.) zusammenfassend, können wir also sagen, *die von uns eingeführte auxiliare Function F genüge auf der gegebenen Kreisfläche den Bedingungen* I. II. (Seite 10), *und sei am Rande dieser Fläche identisch mit der gegebenen Function f.*

Hieraus aber folgt mittelst des Satzes Seite 15 sofort, dass diese Function $F$ in jedwedem *innerhalb* der Kreisfläche gelegenen Puncte $(r, \Phi)$ darstellbar ist durch die Reihe:

(23.) $$F(r, \Phi) = \mathfrak{A}_0 + 2\sum_1^\infty \left(\frac{r}{R}\right)^n (\mathfrak{A}_n \cos n\Phi + \mathfrak{B}_n \sin n\Phi)\,; \qquad r < R\,,$$

wo die Constanten $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ die Werthe besitzen:

(24.) $$\mathfrak{A}_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\Phi)\cos n\Phi \cdot d\Phi\,,$$
$$\mathfrak{B}_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\Phi)\sin n\Phi \cdot d\Phi\,.$$

Für $r < R$ muss also diese Reihe (23.) gleichwerthig sein mit derjenigen Reihe (10.), durch welche $F$ ursprünglich definirt worden ist. Und hieraus folgt nach bekannten Sätzen über die Potenzreihen sofort, dass die Constanten $\alpha$, $\beta$ identisch sein müssen mit den Constanten $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$.

Es müssen also jene Constanten $\alpha$, $\beta$, *um welche sich unsere ganze Untersuchung dreht,* nothwendiger Weise die Werthe $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ (24.), d. i. Werthe besitzen, die durch die individuelle Beschaffenheit der gegebenen Function $f(\Phi)$ in bestimmter und eindeutiger Weise vorgeschrieben sind. Wir gelangen also mit Hinblick auf die Formel (1.)

$$f(\Phi) = \alpha_0 + 2\sum_1^\infty (\alpha_n \cos n\Phi + \beta_n \sin n\Phi)$$

zu folgendem Resultat:

*Rechnet man das Azimuth $\Phi$ eines Punctes der Kreisperipherie zwischen den Grenzen* 0 *und* $2\pi$, *und nimmt man an, eine auf dieser Peripherie* **stetige**, *sonst aber willkürlich gegebene Function* $f(\Phi)$ *sei entwickelbar in eine Reihe:*

(25.) $$f(\Phi) = \alpha_0 + 2\sum_1^\infty (\alpha_n \cos n\Phi + \beta_n \sin n\Phi),$$

*welche für* **jedweden** *Punct der Peripherie convergent und gültig ist, so müssen die in dieser Entwickelung enthaltenen Constanten* $\alpha$, $\beta$ *nothwendiger Weise die Werthe haben:*

(26.) $$\alpha_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\Phi) \cos n\Phi \cdot d\Phi, \qquad \beta_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\Phi) \sin n\Phi \cdot d\Phi.$$

Um die Hauptsache hervorzuheben: *Ist eine auf der Kreisperipherie* **stetige** *Function* $f(\Phi)$ *in eine nach den Cosinus und Sinus der Vielfachen von* $\Phi$ *fortschreitende Reihe entwickelbar, und ist diese Entwickelung für* **jedweden** *Punct der Peripherie convergent und gültig, so werden die in derselben enthaltenen constanten Coefficienten durch die individuelle Beschaffenheit der Function* $f(\Phi)$ **vollständig** *und* **eindeutig** *bestimmt sein.*

Dass man ganz ähnliche Betrachtungen im *Raum* (bei der Kugel) anzustellen im Stande ist, und in solcher Weise zu analogen Sätzen über *die nach Kugelfunctionen fortschreitenden Reihen* geführt wird, — unterlegt keinem Zweifel.

Leipzig, den 7. Januar 1881.

---

## Nachschrift.

Die beiden ersten Paragraphen des vorliegenden Aufsatzes beschäftigen sich mit Untersuchungen, die ich bereits *früher*, und zwar *in viel allgemeinerer Gestalt*, veröffentlicht habe. In

der That repräsentiren die Betrachtungen des §. 1 nur einen ganz speciellen Fall *meiner Methode des arithmetischen Mittels**). Und andererseits subordiniren sich die Betrachtungen des §. 2 *meinen allgemeinen Untersuchungen über die Theorie des Potentials***).

Indessen schien es mir der Mühe werth, die besonders einfache Gestalt, welche diese allgemeinen Untersuchungen bei ihrer Anwendung auf den speciellen Fall des *Kreises* gewinnen, in anschaulicher Weise hervortreten zu lassen. Und dieser Bemühung sind jene beiden ersten Paragraphen gewidmet.

Uebrigens sind die in jenen beiden Paragraphen behandelten Gegenstände dieselben, mit denen auch *Schwarz****) und *Prym*†) sich beschäftigt haben; wobei im Vorbeigehen bemerkt sein mag, dass der Schwarz'sche Aufsatz einige Bemerkungen über meine Schriften enthält, die entweder irrthümlich sind, oder doch wenigstens leicht zu irrthümlichen Auffassungen Veranlassung geben können††).

---

*) NEUMANN (1870): *Zur Theorie des Logarithmischen und Newton'schen Potentials*; in diesen Berichten vom 21. April 1870, und vom 31. October 1870. Ein Theil dieser Untersuchungen, und zwar derjenige, welcher *die Methode des arithmetischen Mittels* darlegt, ist von Neuem abgedruckt worden in den Mathematischen Annalen, Bd. 11, Seite 558. In *ausführlicher* Gestalt sind indessen alle diese Untersuchungen erst später publicirt worden, in dem (im Teubner'schen Verlag erschienenen) Werk: *Ueber das Logarithmische und Newton'sche Potential* (Leipzig, 1877). Ein kurzer Auszug dieses Werkes findet sich in den Mathematischen Annalen, Bd. 13, Seite 255.

**) NEUMANN (1870): *Revision einiger allgemeinen Sätze aus der Theorie des Logarithmischen und Newton'schen Potentials*; in den Math. Annalen, Bd. 3, Seite 325—354 und Seite 424—434. Auch diese Untersuchungen sind zum Theil von Neuem aufgenommen in dem in der vorgehenden Note genannten (bei Teubner erschienenen) Werk.

***) SCHWARZ (1870): *Ueber die Integration der partiellen Differentialgleichung* $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ *für die Fläche eines Kreises*; im XV. Jahrgang der Vierteljahrsschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich. In erweiterter Gestalt wurde dieser Aufsatz später (1871) von neuem publicirt im Borchardt'schen Journal, Bd. 74, Seite 218.

†) PRYM (1871): *Zur Integration der Differentialgleichung* $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$; im Borchardt'schen Journal, Bd. 73, Seite 340.

††) Man findet solche Bemerkungen in dem genannten Aufsatz (Borch. Journal, Bd. 74) z. B. auf Seite 220 und 240. Wollte irgend ein Autor den Satz drucken lassen: *Wenn in einem rechtwinkligen Parallelepipedum alle*

Die genannten beiden Autoren, *Schwarz* und *Prym*, haben in ihren Aufsätzen auf mehrere meiner Schriften Bezug genommen; aber merkwürdiger Weise haben sie dabei meinen Aufsatz über die *Methode des arithmetischen Mittels*, der hier vorzugsweise in Betracht zu ziehen gewesen wäre, so gut wie unbeachtet gelassen. Doch würde es Unrecht sein, denselben hieraus einen Vorwurf zu machen. Denn meine Methode des arithmetischen Mittels war zu jener Zeit, als Prym und Schwarz ihre Aufsätze im Borchardt'schen Journal drucken liessen, allerdings schon publicirt, aber nur in ihren Hauptumrissen, fast mit blosser Angabe der sich ergebenden Resultate, und mit Uebergehung vieler zur festen Begründung erforderlicher Betrachtungen. Erst viel später habe ich Zeit gefunden, jene Untersuchungen in ausführlicher Weise darzulegen, in dem schon citirten Werk über das Logarithmische und Newton'sche Potential (Teubner 1877).

---

*Kanten von gleicher Länge sind, so ist das Parallelepipedum ein Würfel;* so würde es für den Recensenten doch wohl wenig angemessen sein zu bemerken, jener Autor »*fordere*« die Gleichheit *aller* Kanten, und habe also die für den Satz nothwendigen Bedingungen nicht auf das geringste Maass reducirt. — Gewiss, habe ich in meinen Schriften sehr häufig Sätze ausgesprochen, ohne in ihnen die Bedingungen auf das geringste Maass zu reduciren. Aber ich habe in solchen Fällen eine derartige Reduction auch niemals beabsichtigt gehabt, — geschweige denn behauptet, dass in den betreffenden Sätzen eine derartige Reduction von mir bewerkstelligt sei. Wenn *Schwarz* oder irgend ein anderer Mathematiker eine solche (in vielen Fällen recht schwierige) *Reduction der Bedingungen auf ihr geringstes Maass* ausführt, oder auch nur Schritte thut, um einer solchen sich zu nähern, so halte ich das sicherlich für sehr verdienstlich. Aber man darf mir doch keinen Vorwurf daraus machen, dass bei meinen Untersuchungen noch Fragen *offen* bleiben, mit denen Andere sich beschäftigen können.

Nun kann ich mir allerdings kaum denken, dass Herr *Schwarz* wirklich beabsichtigt habe, an meinen Untersuchungen, die ihm doch bei seinen eignen Arbeiten vielfach zu Statten gekommen sind, irgend welche Ausstellungen zu machen. Aber die *Form*, in welche derselbe seine Bemerkungen einkleidet, ist jedenfalls eine *wenig passende*. Denn sie muss diejenigen Leser, welche mit meinen Schriften unbekannt sind, unwillkürlich zu *durchaus unrichtigen* Vorstellungen bringen, z. B. zu der Vorstellung, ich hätte behauptet, in gewissen Sätzen die erforderlichen Bedingungen auf ihr geringstes Maass reducirt zu haben, und diese Behauptung solle durch seine (des Herrn Schwarz) Bemerkungen rectificirt werden. (Dass meinerseits derartige Behauptungen *gar nicht* gemacht sind, ist bereits erörtert worden.)

Im Ganzen genommen dürften *meine* Methoden gegenüber denen von *Schwarz* und *Prym* den Vorzug verdienen; und zwar namentlich deswegen, weil sie bedeutend *allgemeiner* sind, indem sie nicht nur auf den Kreis, sondern auf eine sehr grosse Anzahl von *Curven in der Ebene* und von *Flächen im Raume* anwendbar sind, und indem sie nicht nur die *innerhalb* dieser Curven oder Flächen, sondern ebenso auch die *ausserhalb* derselben liegenden Gebiete betreffen.

Schliesslich habe ich, was den dritten Paragraphen des vorliegenden Aufsatzes betrifft, meinem Collegen *Scheibner* für seine gütige Unterstützung (bei der Führung des Beweises, dass $\lim_{\varrho=1} F = f$ ist) meinen aufrichtigen Dank auszusprechen.

---

## Inhalts-Uebersicht.

**W. Knop.** *Beiträge zur Kenntniss der Eiweisskörper* *).

Im Anschluss an meine letzten Mittheilungen (Sitzung vom 27. Januar 1879) über die Producte, welche die Eiweisskörper bei der Behandlung mit der Lösung von Brom in Chlorwasserstoff- oder Bromwasserstoffsäure liefern, gebe ich noch folgende Notiz über eine besondere Reihe derselben.

Untersucht hatte ich bis dahin eine Anzahl gebromter Substanzen, welche bei gewöhnlicher Temperatur sich bilden, wenn man Eiweisskörper mit jener Lösung im Ueberschuss übergiesst und einige Zeit darin liegen lässt, sowie diejenigen, welche durch völliges Auflösen der letzteren in der mit Brom versetzten Bromwasserstoffsäure bei höheren Temperaturen von 80° bis 90° und nachherigem Zusatz von Alkohol entstehen.

Der Zusatz von Alkohol hatte den Zweck, die Flüssigkeit farblos zu erhalten und den grössten Theil der angewandten Bromwasserstoffsäure durch Destillation als Bromäthyl wieder beseitigen zu können, machte es aber zugleich unmöglich zu bestimmen, ob unter den Producten auch flüchtige Körper enthalten sind.

Nach der Auflösung der Eiweisssubstanzen in der Mischung von Brom und Bromwasserstoffsäure und Entfernung des überschüssigen Broms durch Erhitzen der Lösung auf dem Wasserbade lässt sich in derselben stets ein gewisses Quantum von Ammoniak durch Platinchlorid nachweisen. Ob verwandte Ammoniakbasen dabei mit auftreten, ist noch nicht untersucht worden. Dieses Ammoniak ist eine Ursache mit, dass die saure Lösung nach dem Absättigen mit Kalk, Baryt oder irgend einer anderen Base gebräunt wird, namentlich beim Concentriren derselben durch Abdampfen, denn alle Alkalien zersetzen die

*) Vorgetragen und zum Druck gegeben in der Sitzung am 31. Januar 1881.

darin enthaltenen hoch bromirten Körper in gleicher Weise. Auch wenn man ohne Anwendung von Alkohol die saure Lösung mit platinirtem Zink oder Blei oder einem Zinkeisenelement bis zu einem gewissen Grade wieder entbromt hat, bleibt diese Bräunung durch eine verhältnissmässig geringe Menge zersetzter Substanz ein wesentliches Hinderniss, die Salze der erzeugten bromirten Säuren rein zu erhalten.

Diese andere Reihe von bromirten Eiweisskörpern, welche ohne Alkoholzusatz entstehen, ist noch nicht untersucht, und es muss noch ermittelt werden, ob die einzelnen Glieder derselben mit den früher bei Anwendung von Alkohol erhaltenen identisch sind oder nicht.

Ich habe nun kürzlich gefunden, dass diese bis jetzt noch fraglichen Producte durch eine leichte Behandlung mit schwefliger Säure rein erhalten werden können, und habe deshalb die Untersuchung derselben wieder aufgenommen, besonders in der Absicht festzustellen, ob bei der Behandlung der Eiweisskörper mit Brom auch flüchtige Körper gebildet werden.

**A. Mayer.** *Ueber die kürzesten und weitesten Abstände eines gegebenen Punktes von einer gegebenen Oberfläche und die dritte Variation in den Problemen des gewöhnlichen Maximums und Minimums*).*

Es giebt im ganzen Gebiete des gewöhnlichen Maximums und Minimums wohl kaum ein anderes Beispiel, in welchem die verschiedenen Fälle, die überhaupt beim Maximum und Minimum einer Function von mehreren Variabeln auftreten können, sich in so schöner Weise geometrisch deuten lassen, wie bei der Aufgabe: die grössten und kleinsten Abstände eines gegebenen Punktes von einer gegebenen Oberfläche zu finden. Natürlich muss man sich, solange nicht eine bestimmte, specielle Oberfläche vorliegt, damit begnügen, den gegebenen Punkt auf einer festen Normalen der Fläche variiren zu lassen, wodurch singuläre Punkte der Oberfläche von der Betrachtung ausgeschlossen werden und die Frage sich auf die folgende reducirt: Bei welcher Lage des gegebenen Punktes auf der betrachteten Normalen ist sein Abstand vom Normalenfusspunkte ein Maximum oder Minimum seiner Entfernung von einem beliebigen Punkte der Oberfläche?

In dieser nothwendigen Beschränkung ist die Aufgabe von *Serret* in seinem Calcul différentiel (2. Auflage, p. 226) als Beispiel zur Theorie des absoluten Max. und Min., und auf sehr elegante Art als Problem des relativen Max. und Min. von *Weierstrass* in seinen Vorlesungen über Variationsrechnung behandelt worden. Soviel ich weiss, ist man jedoch bisher immer nur bei den Resultaten stehen geblieben, die sich aus der zweiten Variation ziehen lassen, und hat die Fälle, in denen dieselbe die Existenz des Max. oder Min. allein noch nicht zu entscheiden vermag, nicht weiter untersucht. Man kann aber

---

*) Vorgetragen und zum Druck übergeben in der Sitzung am 14. Nov. 1881.

das Problem allgemein bis an die vierte Variation heranführen, oder, nur anders ausgedrückt, dasselbe soweit erledigen, als dies ohne Specialisirung der gegebenen Oberfläche überhaupt möglich ist, und auch hier wieder gestatten die Kriterien des Max. und Min. eine einfache und schöne geometrische Deutung. Diese Bemerkung war die erste Veranlassung zu dem folgenden Aufsatze, der sich allmälig erweiterte, indem es sich herausstellte, dass ein wesentlicher Theil der angewandten Betrachtungen überhaupt für jede Aufgabe des gewöhnlichen Max. und Min. Geltung behält, in welcher die dritte Variation mit ins Spiel kommt.

Jene Weiterführung des Normalenproblems konnte nicht wohl ohne eine vorgängige Untersuchung der beiden ersten Variationen auseinandergesetzt werden. Daher wurde es nöthig, auch die bereits bekannten Resultate von Neuem abzuleiten. Um dabei unter Wahrung der Symmetrie doch die einfachere und kürzere Theorie des absoluten Max. und Min. benutzen zu können, lege ich, abweichend von *Serret*, wie von *Weierstrass*, diejenige analytische Ausdrucksweise der gegebenen Oberfläche zu Grunde, welche die rechtwinkligen Coordinaten eines beliebigen Oberflächenpunktes als Functionen zweier unabhängiger Parameter darstellt.

Ersetzt man die Oberfläche durch eine Curve, so reducirt sich die Aufgabe auf ein Problem des Max. und Min. der Functionen von einer Variabeln und bietet daher keine Schwierigkeit mehr dar*). Aber auch in diesem einfacheren Falle ist das Problem noch nicht vollständig zu Ende geführt worden. Ich gebe daher im ersten Paragraphen ohne Beweis die Resultate an, welche sich bei den beiden Aufgaben ergeben, in der Ebene, resp. im Raume die kürzesten und weitesten Abstände eines gegebenen Punktes von einer gegebenen Curve zu finden. Das Normalenproblem einer Oberfläche wird erst in § 3 gelöst; um den Gedankengang nicht wiederholt durch Nebenbetrachtungen unterbrechen zu müssen, lasse ich in § 2 der eigentlichen Lösung eine Untersuchung der mehrfachen Normalen einer Oberfläche vorangehen. § 4 zeigt dann, wie dieselben algebraischen Sätze, welche zur vollständigen Lösung des Normalenproblems führten, sich genau ebenso in der ganzen Theorie des gewöhnlichen Max.

*) Vgl. *Serret* a. a. O. p. p. 205 u. 208.

und Min. wiederfinden. Aber diese Theorie selbst ist an eine stillschweigende Voraussetzung gebunden, die bisher wohl noch nicht hinreichend scharf hervorgehoben worden ist*). Der letzte Paragraph beschäftigt sich daher noch mit den Ausnahmefällen oder mit derjenigen eigenthümlichen Classe von Max. und Min., bei denen die zweite Variation selbst dann, wenn sie sich bei sonst festem Vorzeichen noch zum Verschwinden bringen lässt, in der Regel doch allein schon ausreicht, um die Frage des Max. und Min. zu entscheiden.

## § 1.

Die Lösung der Aufgabe, in der Ebene die Maxima und Minima der Entfernung eines gegebenen Punktes von einem beliebigen Punkte einer gegebenen Curve zu ermitteln, führt zu folgendem Satze:

*Der Abstand $\overline{AP}$ eines gegebenen Punktes $A$ der Curvennormalen von ihrem Fusspunkte $P$ ist ein Min. oder Max. der Entfernung des Punktes $A$ von der Curve, jenachdem die Punkte $A$ und $P$ auf derselben oder auf verschiedenen Seiten des Krümmungsmittelpunktes $K$ der Curve im Punkte $P$ liegen. Fällt dagegen $A$ mit $K$ zusammen, so ist $\overline{AP}$ nur dann ein Max. oder Min. der Entfernung, wenn im Punkte $P$ eine Berührung von der dritten* (oder von einer höheren ungeraden) *Ordnung zwischen Krümmungskreis und Curve stattfindet, oder, was dasselbe besagt, wenn $K$ ein Rückkehrpunkt der Evolute ist.*

Dieselbe Aufgabe, ausgedehnt auf den Raum, ergiebt folgendes Resultat:

*Construirt man in einem beliebigen Punkte $P$ der gegebenen Curve die Normalenebene und nimmt auf ihr willkürlich einen Punkt $A$ an, so ist die Verbindungslinie $\overline{AP}$ ein Min. oder ein Max. der Entfernung des Punktes $A$ von der Curve, jenachdem die Punkte $A$ und $P$ auf derselben oder*

---

*) Ich betrachte selbstverständlich nur solche Max. und Min., in deren Umgebung die betreffende Function soweit als erforderlich nach der begrenzten *Taylor*'schen Reihe entwickelbar ist.

auf verschiedener Seite der Krümmungsaxe der Curve im Punkte $P$ liegen. Auf der ganzen Krümmungsaxe selbst dagegen giebt es nur einen einzigen Punkt $A$, für welchen $\overline{AP}$ ein Max. oder Min. der Entfernung sein kann (und im Allgemeinen zugleich auch ist), und dieser Punkt ist der Mittelpunkt der Schmiegungskugel des Punktes $P$.

Des Folgenden wegen hebe ich hervor, dass die Bedingung, unter der allein $\overline{AP}$ ein Max. oder ein Min. der Entfernung sein kann in den Fällen, wo der Punkt $A$ (im ersten Satze) mit dem Krümmungsmittelpunkte zusammenfällt, oder (im zweiten Satze) auf der Krümmungsaxe liegt, für beide Aufgaben sich zuerst in der gemeinsamen Form ergiebt: Es muss $\overline{AP}$ dann eine dreifache Normale der Curve sein.

## § 2.

## Mehrfache Normalen einer Oberfläche.

Bezogen auf ein rechtwinkliges Axensystem sei eine Oberfläche gegeben durch die drei Gleichungen:

1) $$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v),$$

und es mögen zur Abkürzung für jede Function von $u$ und $v$ die partiellen Differentialquotienten nach $u$ und $v$ durch Anhängung der Indices 1 und 2 bezeichnet werden.

Betrachtet man dann $\xi$, $\eta$, $\zeta$ als laufende, von $u$ und $v$ unabhängige Coordinaten und setzt:

$$2\varphi = (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2,$$

so sind:

2) $$\begin{cases} \varphi_1 \equiv (x-\xi)x_1 + (y-\eta)y_1 + (z-\zeta)z_1 = 0, \\ \varphi_2 \equiv (x-\xi)x_2 + (y-\eta)y_2 + (z-\zeta)z_2 = 0, \end{cases}$$

oder

3) $$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \Delta$$

gesetzt

4) $$x-\xi = \mu \frac{\partial \Delta}{\partial \alpha}, \quad y-\eta = \mu \frac{\partial \Delta}{\partial \beta}, \quad z-\zeta = \mu \frac{\partial \Delta}{\partial \gamma}$$

die Gleichungen der Normale der Oberfläche 1) im Punkte $u$, $v$ oder $P$.

Ersetzt man $u$, $v$ successive durch:

$$u + hu', \quad v + hv'$$

und $u + ku' + \frac{k^2}{2} u''$, $v + kv' + \frac{k^2}{2} v''$, wo $h$ und $k$ sehr kleine Zahlen bezeichnen, deren höhere Potenzen von der zweiten, resp. dritten an zu vernachlässigen sind, so gehen die Gleichungen 2) über in die Gleichungen der Normalen zweier unendlich naher Punkte der Oberfläche:

$$5)\quad \begin{cases} \varphi_1 + h(u'\varphi_{11} + v'\varphi_{12}) = 0, \\ \varphi_2 + h(u'\varphi_{21} + v'\varphi_{22}) = 0, \end{cases} \text{ und}$$

$$6)\quad \begin{cases} \varphi_1 + k(u'\varphi_{11} + v'\varphi_{12}) + \frac{k^2}{2}(u''\varphi_{11} + v''\varphi_{12} + u'^2\varphi_{111} \\ \qquad + 2u'v'\varphi_{112} + v'^2\varphi_{122}) = 0, \\ \varphi_2 + k(u'\varphi_{21} + v'\varphi_{22}) + \frac{k^2}{2}(u''\varphi_{21} + v''\varphi_{22} + u'^2\varphi_{211} \\ \qquad + 2u'v'\varphi_{212} + v'^2\varphi_{222}) = 0. \end{cases}$$

Damit also der Punkt $\xi$, $\eta$, $\zeta$ den beiden aufeinanderfolgenden Normalen 2) und 5) gemein, oder ein **Hauptkrümmungscentrum** des Punktes $u$, $v$ der Oberfläche sei, müssen zugleich mit 2) die beiden Gleichungen:

$$7)\quad \begin{cases} u'\varphi_{11} + v'\varphi_{12} = 0, \\ u'\varphi_{21} + v'\varphi_{22} = 0 \end{cases}$$

bestehen können, muss folglich

$$8)\quad \begin{vmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} \end{vmatrix} = 0$$

sein.

Nun ist nach 2)

$$9)\quad \begin{cases} \varphi_{11} \equiv (x-\xi)x_{11} + (y-\eta)y_{11} + (z-\zeta)z_{11} + x_1^2 + y_1^2 + z_1^2, \\ \varphi_{12} \equiv (x-\xi)x_{12} + (y-\eta)y_{12} + (z-\zeta)z_{12} + x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2, \\ \varphi_{22} \equiv (x-\xi)x_{22} + (y-\eta)y_{22} + (z-\zeta)z_{22} + x_2^2 + y_2^2 + z_2^2. \end{cases}$$

Setzt man also:

$$10)\quad \begin{cases} x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = E \\ x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = F, \\ x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 = G, \\ \begin{vmatrix} x_{hi} & y_{hi} & z_{hi} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = (hi), \end{cases}$$

so wird durch die Substitutionen 4)

11) $\varphi_{11} = \mu(11) + E, \quad \varphi_{12} = \mu(12) + F, \quad \varphi_{22} = \mu(22) + G,$
und die Bedingung 8) geht über in die quadratische Gleichung für $\mu$:

12)
$$\begin{vmatrix} \mu(11) + E, & \mu(12) + F \\ \mu(12) + F, & \mu(22) + G \end{vmatrix} = 0,$$

deren Wurzeln stets reell sind.

Jede der beiden Wurzeln $\mu$ dieser Gleichung liefert daher, wenn man sie in 4) einführt, die Coordinaten $\xi$, $\eta$, $\zeta$ eines der beiden Hauptkrümmungscentren des Punktes $P = u, v$ der gegebenen Oberfläche, deren Verbindungslinien mit dem Punkte $P$ zweifache Normalen der Oberfläche sind, oder man erhält, ausgedrückt in den beiden unabhängigen Variabeln $u$ und $v$, die Gleichungen der beiden Mäntel der Centrafläche der gegebenen Oberfläche, wenn man in den Gleichungen 4) der Reihe nach $\mu$ durch die eine und die andere Wurzel der Gleichung 12) ersetzt*).

Soll weiter der Punkt $\xi$, $\eta$, $\zeta$ den drei aufeinanderfolgenden Normalen 2), 5), 6) gemeinschaftlich angehören, so müssen zugleich mit 2) und 7) noch die beiden Gleichungen gelten:

$$u'' \varphi_{11} + v'' \varphi_{12} + u'^2 \varphi_{111} + 2u'v' \varphi_{112} + v'^2 \varphi_{122} = 0,$$
$$u'' \varphi_{21} + v'' \varphi_{22} + u'^2 \varphi_{211} + 2u'v' \varphi_{212} + v'^2 \varphi_{222} = 0.$$

Hierzu ist, vorausgesetzt, dass nicht gerade $\varphi_{11}$, $\varphi_{12}$, $\varphi_{22}$ sämmtlich Null sind oder der Punkt $P = u, v$ ein Nabelpunkt der Oberfläche ist, nach 8) nothwendig und hinreichend, dass mit den Gleichungen 2) und 7) zugleich auch die Gleichung:

13)
$$\frac{u'^2 \varphi_{111} + 2u'v' \varphi_{112} + v'^2 \varphi_{122}}{u'^2 \varphi_{211} + 2u'v' \varphi_{212} + v'^2 \varphi_{222}} = \frac{\varphi_{11}}{\varphi_{12}} = \frac{\varphi_{21}}{\varphi_{22}}$$

stattfinde**).

---

*) Aus 4) folgt:
$$(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2$$
$$= \mu^2 \left[ \left(\frac{\partial \Delta}{\partial \alpha}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Delta}{\partial \beta}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Delta}{\partial \gamma}\right)^2 \right]$$
$$= \mu^2 (EG - F^2).$$
Nennt man also $\mu'$ und $\mu''$ die beiden Wurzeln der Gleichung 12) und $R'$ und $R''$ die beiden Hauptkrümmungsradien der Oberfläche 1) im Punkte $u$, $v$, so hat man:
$$R' = \mu' \sqrt{EG - F^2}, \quad R'' = \mu'' \sqrt{EG - F^2}.$$

**) Für einen Nabelpunkt $u$, $v$ müssten die beiden quadratischen Gleichungen:
$$u'^2 \varphi_{111} + 2u'v' \varphi_{112} + v'^2 \varphi_{122} = 0$$
$$u'^2 \varphi_{211} + 2u'v' \varphi_{212} + v'^2 \varphi_{222} = 0$$
eine gemeinschaftliche Wurzel $u' : v'$ besitzen.

Setzt man der ersten Gleichung 7) zu Folge:

$$u' = \lambda \varphi_{12}, \quad v' = -\lambda \varphi_{11},$$

so wird die Gleichung 13)

$$\frac{\varphi_{111}\varphi_{12}^2 - 2\varphi_{112}\varphi_{12}\varphi_{11} + \varphi_{122}\varphi_{11}^2}{\varphi_{211}\varphi_{12}^2 - 2\varphi_{212}\varphi_{12}\varphi_{11} + \varphi_{222}\varphi_{11}^2} = \frac{\varphi_{11}}{\varphi_{12}} = \frac{\varphi_{12}}{\varphi_{22}}.$$

Wegen $\varphi_{12}^2 = \varphi_{11}\varphi_{12}$ lässt sich dies so schreiben:

14) $$\frac{\varphi_{111}\varphi_{22} - 2\varphi_{112}\varphi_{12} + \varphi_{122}\varphi_{11}}{\varphi_{211}\varphi_{12} - 2\varphi_{212}\varphi_{12} + \varphi_{222}\varphi_{11}} = \frac{\varphi_{11}}{\varphi_{12}} = \frac{\varphi_{21}}{\varphi_{22}},$$

oder nach Wegschaffung der Nenner in symmetrischer Form:

15) $$(\varphi_{111}\varphi_{22} - 3\varphi_{112}\varphi_{12})(\varphi_{22} + \varphi_{12}) = (\varphi_{222}\varphi_{11} - 3\varphi_{221}\varphi_{21})(\varphi_{11} + \varphi_{21}).$$

Damit also (im obigen Sinne und abgesehen von den Nabelpunkten) der Punkt $\xi$, $\eta$, $\zeta$ der Schnittpunkt sei von drei aufeinanderfolgenden Normalen der gegebenen Oberfläche, ist nothwendig und hinreichend, dass $\xi$, $\eta$, $\zeta$, $u$, $v$ den vier Gleichungen 2), 8), 15) gleichzeitig genügen. Eliminirt man daher $\xi$, $\eta$, $\zeta$ aus diesen vier Gleichungen, so bestimmt die erhaltene Relation zwischen $u$ und $v$ eine solche Curve auf der Oberfläche 1), längs derer sich die Normale eines jeden Oberflächenpunktes mit den Normalen je zweier unendlich naher Punkte der Oberfläche in einem Punkte schneidet, auf welcher zugleich aber auch die Nabelpunkte der Oberfläche liegen, denen, wenigstens in der betrachteten Art, diese Eigenschaft im Allgemeinen nicht zukommt. Oder, wenn man $u$ und $v$ aus den Gleichungen 2), 8) und 15) eliminirt, so stellen die beiden resultirenden Gleichungen zwischen $\xi$, $\eta$, $\zeta$ diejenige Curve auf der Centrafläche dar, von der in jedem Punkte (mit Ausnahme der Krümmungscentren der Nabelpunkte) eine dreifache Normale an die gegebene Oberfläche geht*).

*) Selbstverständlich können diese beiden correspondirenden Curven der gegebenen Oberfläche und ihrer Centrafläche gleichzeitig jede auch in mehrere getrennte Curven zerfallen, resp. unter Umständen sich in einzelne Punkte zusammenziehen.

Setzt man ferner:

$$\begin{vmatrix} x_{hik} & y_{hik} & z_{hik} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = (hik),$$

Die Gleichungen 2) und 8) stellen zusammen, wenn man sich durch dieselben $\xi$, $\eta$, $\zeta$ als Functionen von $u$ und $v$ definirt denkt, die Centrafläche der Oberfläche 1) dar. Fragt man sich nun, ob es auf der Centrafläche solche Punkte $u$, $v$ giebt, für welche die drei Determinanten der Tangentenebene

$$\eta_1\zeta_2 - \eta_2\zeta_1\,,\quad \zeta_1\xi_2 - \zeta_2\xi_1\,,\quad \xi_1\eta_2 - \xi_2\eta_1$$

gleichzeitig verschwinden, so erhält man für diese Punkte wieder nur die eine Bedingung 14). Jene durch 2), 8) und 15) definirte Curve der Centrafläche ist also Rückkehrcurve der Centrafläche.

Man kann aber die Bedingung für eine dreifache Normale noch anders ausdrücken. Die Gleichungen 7) nämlich liefern

$$\frac{\varphi_{11}}{\varphi_{12}} = \frac{\varphi_{21}}{\varphi_{22}} = -\frac{v'}{u'}\,.$$

Daher kann man auch sagen — und diese Fassung ist für das folgende Maximums- und Minimums-Problem von Wichtigkeit —

16) Damit die Verbindungslinie des Punktes $\xi$, $\eta$, $\zeta$ mit dem Punkte $P = u$, $v$ der gegebenen Oberfläche eine dreifache Normale der letzteren sei, ist, vorausgesetzt, dass $P$ nicht gerade ein Nabel-

---

so wird nach 9), 10) und 4):

$$\varphi_{111} = \mu\,(111) + \frac{3}{2}\,\frac{\partial E}{\partial u}\,,$$

$$\varphi_{112} = \mu\,(112) + \frac{1}{2}\,\frac{\partial E}{\partial v} + \frac{\partial F}{\partial u}\,,$$

$$\varphi_{122} = \mu\,(122) + \frac{\partial F}{\partial v} + \frac{1}{2}\,\frac{\partial G}{\partial u}\,,$$

$$\varphi_{222} = \mu\,(222) + \frac{3}{2}\,\frac{\partial G}{\partial v}\,.$$

Hierdurch und durch die Substitutionen 11) verwandelt sich 15) in eine kubische Gleichung für $\mu$. Die Resultante dieser und der quadratischen Gleichung 12) ist daher die Gleichung jener Curve auf der gegebenen Fläche, längs derer sich jede Oberflächennormale mit zwei benachbarten Normalen in einem Punkte schneidet. Hat man den Parametern $u$, $v$ irgend zwei solche Werthe beigelegt, welche diese Gleichung erfüllen, und hierauf die gemeinsame Wurzel $\mu$ der beiden Gleichungen zweiten und dritten Grades bestimmt, so liefert die Substitution dieser Werthe von $u$, $v$ und $\mu$ in die Gleichungen 4) die Coordinaten $\xi$, $\eta$, $\zeta$ desjenigen Krümmungscentrums $K$ des Punktes $P = u$, $v$ der Oberfläche 1), für welchen $\overline{KP}$ eine dreifache Normale ist.

punkt, nothwendig und hinreichend, dass die Gleichung

$$\varphi_{111} u'^3 + 3\varphi_{112} u'^2 v' + 3\varphi_{122} u' v'^2 + \varphi_{222} v'^3 = 0$$

eine blosse Folge der Gleichungen 2) und 7) sei.

§ 3.

## Kürzeste und weiteste Abstände eines gegebenen Punktes von der gegebenen Oberfläche 1).

Die Aufgabe verlangt, wenn $A = a, b, c$ der gegebene Punkt ist, $u$ und $v$ so zu bestimmen, dass der Ausdruck

$$2f \equiv (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2,$$

in welchem $x, y, z$ die gegebenen Functionen 1) bezeichnen, ein Max. oder Min. werde.

Sie wird gelöst durch die beiden Gleichungen:

17) $$\begin{cases} f_1 \equiv (x-a)x_1 + (y-b)y_1 + (z-c)z_1 = 0, \\ f_2 \equiv (x-a)x_2 + (y-b)y_2 + (z-c)z_2 = 0. \end{cases}$$

Wenn man daher im Punkte $P = u, v$ der Oberfläche die Normale errichtet und auf ihr willkürlich den Punkt $A = a, b, c$ annimmt, so ist die Verbindungslinie $\overline{AP}$ stets eine Lösung des Problems und zwischen $u, v$ und $a, b, c$ bestehen die Relationen:

18) $$x - a = \lambda \frac{\partial \Delta}{\partial \alpha}, \quad y - b = \lambda \frac{\partial \Delta}{\partial \beta}, \quad z - c = \lambda \frac{\partial \Delta}{\partial \gamma},$$

von denen eine $\lambda$ bestimmt.

Für diese Lösung wird nach 11)

19) $$f_{11} = \lambda(11) + E, \quad f_{12} = \lambda(12) + F, \quad f_{22} = \lambda(22) + G.$$

Soll daher $\overline{AP}$ ein wirkliches Max. oder Min. der Entfernun des Punktes $A$ von der Oberfläche sein, so darf die zwei Variation der Function $f$:

$$\delta^2 f = [\lambda(11) + E]\,\delta u^2 + 2[\lambda(12) + F]\,\delta u\,\delta v + [\lambda(22) + G]\,\delta$$

keines Zeichenwechsels fähig sein. Hierzu ist bekanntlich nothwendig und hinreichend, dass die quadratische Gleichung:

20) $$\begin{vmatrix} \lambda(11) + E - \varrho\alpha, & \lambda(12) + F - \varrho\beta \\ \lambda(12) + F - \varrho\beta, & \lambda(22) + G - \varrho\gamma \end{vmatrix} = 0$$

keine Wurzeln $\varrho$ von verschiedenem Vorzeichen besitze, wo-

bei für $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ die Coefficienten jeder beliebigen reellen Function zweiten Grades

$$\psi = \alpha \delta u^2 + 2\beta \delta u \delta v + \gamma \delta v^2$$

gesetzt werden können, die stets positiv bleibt. Sind die
... ist $\overline{AP}$ sicher
...erschwindende
...nen von $f$ zu-

...en zu können,
... die Gleichung
...durch die An-
...il alsdann die
... Das Quadrat
... $G\delta v^2$
... Function. Wir
... $\varrho)^2$ die Gleichung
... $) + F$
...n ein Min. der Ent-
...zwischen $K'$ und $K''$ liegt,
...och ein Max.
...r der beiden Hauptkrüm-
...m Unendlichen liegt, so ist
...in Min. der Entfernung, wenn $A$ und
...ben Seite des anderen Hauptkrüm-
...mungs liegen, in jedem anderen Falle
12) und $\alpha'$ weder Min. noch Max.
...ndlich, wenn $A$ mit $K'$ oder $K''$ zusammenfällt, so kann
22) ...age, ob $\overline{AP}$ ein Max. oder Min. der Entfernung sei, nur
Nach ...Untersuchung der höheren Variationen von $f$ entschieden
$a$, $b$. ...en, indem dann die zweite Variation sich nimmer zum Ver-

...ung auf derselben ...
wie von $K''$ liegen und endlich ...
$K''$ liegen. $\varrho'$ und $\varrho''$ sind im erst...
zweiten Falle beide negativ und im dritt...
denem Zeichen.

Ist dagegen $\frac{\mu'}{\mu''} < 0$, so haben $x - \xi'$ und ...
denes Zeichen. Sollen also $\varrho'$ und $\varrho''$ dasselbe Ze...
so müssen auch $a - \xi'$ und $a - \xi''$ von entge...
Zeichen sein, d. h. $A$ muss ebenso wie $P$ zwischen $K$...
liegen. Wenn aber dann etwa $x - \xi'$ die positive von de...
den Differenzen $x - \xi'$ ist, so ist zugleich auch $a - \xi'$...
und also sind dann $\varrho'$ und $\varrho''$ beide positiv.

Fällt ferner $A$ mit $K'$ oder $K''$ zusammen, so wird $\varrho$...

schwinden bringen lässt und sogar identisch verschwindet, wenn $P$ ein Nabelpunkt der Fläche war.

Am Einfachsten gestaltet sich die Untersuchung im letzteren Falle. Es ist dann:

$$25)\begin{cases} f_{11} \equiv (x-a)x_{11} + (y-b)y_{11} + (z-c)z_{11} + x_1{}^2 + y_1{}^2 + z_1{}^2 = 0, \\ f_{12} \equiv (x-a)x_{12} + (y-b)y_{12} + (z-c)z_{12} + x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0, \\ f_{22} \equiv (x-a)x_{22} + (y-b)y_{22} + (z-c)z_{22} + x_2{}^2 + y_2{}^2 + z_2{}^2 = 0; \end{cases}$$

die zweite Variation:

$$\delta^2 f \equiv f_{11}\delta u^2 + 2f_{12}\delta u\delta v + f_{22}\delta v^2$$

verschwindet identisch und Max. oder Min. kann also nur dann stattfinden, wenn zugleich auch die dritte Variation

$$\delta^3 f \equiv f_{111}\delta u^3 + 3f_{112}\delta u^2\delta v + 3f_{122}\delta u\delta v^2 + f_{222}\delta v^3$$

identisch Null wird, d. h. gleichzeitig

$$26)\qquad f_{111} = 0, \quad f_{112} = 0, \quad f_{122} = 0, \quad f_{222} = 0$$

ist. Die Gleichungen 17), 25), 26) sind aber nichts anderes als die Bedingungen dafür, dass im Punkte $P$ eine Berührung 3. O. stattfinde zwischen der gegebenen Oberfläche und der Kugel:

$$2f \equiv (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = \text{const.}$$

Ist also $P$ ein Nabelpunkt der Oberfläche und $K$ sein Krümmungscentrum, so kann $\overline{KP}$ nur dann ein Max. oder Min. der Entfernung des Punktes $K$ von der Oberfläche sein, wenn (wie bei den Rotationsflächen 2. O.) im Punkte $P$ eine Berührung 3. O. stattfindet zwischen der Oberfläche und der osculirenden Kugel*).

Einen Nabelpunkt von dieser Beschaffenheit will ich des kürzeren Ausdrucks wegen einen ausgezeichneten Nabelpunkt nennen.

Ist weiter $A = a, b, c$ ein Hauptkrümmungscentrum des Punktes $P = u, v$ der gegebenen Oberfläche, aber dieser kein Nabelpunkt, so hat die Gleichung 21) nur eine Wurzel $\varrho = 0$ und die zweite Variation $\delta^2 f$ lässt sich daher zwar nicht zu einer Zeichenänderung, wohl aber noch zum Verschwinden bringen. Soll also $\overline{AP}$ ein Max. oder Min. sein, so muss jedenfalls $\delta^3 f$ für alle Werthe von $\delta u$ und $\delta v$ verschwinden, welche $\delta^2 f = 0$ machen.

*) Wieder ist dann $\overline{KP}$ eine dreifache Normale.

Diese Werthe haben aber jetzt ein eindeutig bestimmtes Verhältniss und ebensolche Werthe ergeben sich aus den beiden linearen Gleichungen:

27) $$\begin{cases} f_{11}\,\delta u + f_{12}\,\delta v = 0\,, \\ f_{21}\,\delta u + f_{22}\,\delta v = 0\,, \end{cases}$$

die stets $\delta^2 f = 0$ liefern und wegen $f_{11}f_{22} - f_{12}{}^2 = 0$ sich auf eine einzige Gleichung reduciren. Die obige Bedingung ist daher identisch mit der: die Gleichung

$$f_{111}\,\delta u^3 + 3f_{112}\,\delta u^2\,\delta v + 3f_{122}\,\delta u\,\delta v^2 + f_{222}\,\delta v^3 = 0$$

muss eine blosse Folge der Gleichungen 27) sein.

Das aber wieder ist, da die Gleichungen 17) bei unseren Annahmen eo ipso erfüllt sind, nach 16) die Bedingung dafür, dass $\overline{AP}$ eine dreifache Normale der Oberfläche sei. Also erhält man für einen Punkt $P$ der Oberfläche, der kein Nabelpunkt ist, den Satz:

Ein Hauptkrümmungsradius $\overline{KP}$ der Oberfläche kann nur dann ein Max. oder Min. der Entfernung des zugehörigen Hauptkrümmungsmittelpunktes $K$ von der Oberfläche sein, wenn $\overline{KP}$ eine dreifache Normale der Oberfläche ist, oder also $K$ der Rückkehrcurve der Centrafläche angehört.

Damit soll natürlich noch nicht gesagt sein, dass $\overline{KP}$ dann stets ein Max. oder Min. der Entfernung ist. Vielmehr ist hierzu überdies nöthig, dass durch den Werth des Verhältnisses $\delta u : \delta v$, welcher sich aus 27) ergiebt, die vierte Variation von $f$ (falls sie nicht ebenfalls verschwindet) dasselbe Vorzeichen erhalte, welches die nicht verschwindende Wurzel $\varrho$ der Gleichung 21) besitzt. Das aber hängt von der besonderen Gestalt der gegebenen Oberfläche ab und entzieht sich ebenso wie die entsprechende Frage für den vorhergehenden Satz der allgemeinen Untersuchung*).

*) Beim Ellipsoid:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1\,, \quad a > b > c\,,$$

z. B. ist die Bedingung des letzten Satzes erfüllt für alle Hauptkrümmungscentren $K$, die in einer der drei Coordinatenebenen liegen und nicht der Evolute des betreffenden Ellipsoidhauptschnittes angehören. Aber nur, wenn $K$ in der $xy$- oder $yz$-Ebene liegt, ist $\overline{KP}$ ein Min. oder Max. der

## § 4.

## Allgemeine Untersuchung der dritten Variation in den Problemen des gewöhnlichen Maximums und Minimums.

Die algebraischen Sätze, durch die es im Vorhergehenden gelang, das Normalenproblem soweit zu führen, als es sich überhaupt ohne Specialisirung der gegebenen Oberfläche führen lässt, sind nicht bloss diesem speciellen Probleme eigenthümlich, sondern gelten für die ganze Theorie des gewöhnlichen Max. und Min. und gestatten auch hier jedes Problem, in welchem die zweite Variation allein noch nicht ausreicht, die Existenz des Max. und Min. mit Sicherheit nachzuweisen, bis auf die vierte und die höheren Variationen zu erledigen. Für das allgemeine Problem des absoluten Max. und Min.

$$f(x_1, x_2, \cdots x_n) = \text{Max., Min.}$$

— und man braucht hier nur dieses zu betrachten, da sich ja jedes Problem des relativen Max. und Min. wenigstens in Gedanken immer auf eine Aufgabe des absoluten Max. und Min. zurückführen lässt — kann man diesen Sätzen die folgende Fassung geben, in der analog wie früher $f_h$, $f_{hi}$, $f_{hik}$ zur Abkürzung für

$$\frac{\partial f}{\partial x_h}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_h \partial x_i}, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x_h \partial x_i \partial x_k}$$

geschrieben worden ist:

I. Wenn für ein System reeller Auflösungen der $n$ Gleichungen

1) $$f_1 = 0, \quad f_2 = 0, \cdots f_n = 0$$

die zweite Variation der Function $f$:

2) $$\delta^2 f \equiv \sum_1^n {}_h \sum {}_i f_{hi} \xi_h \xi_i$$

---

Entfernung. Zugleich sind, übereinstimmend mit dem vorletzten Satze, die Hauptkrümmungsradien der Nabelpunkte weder Max. noch Min.

Für das abgeplattete oder das gestreckte Rotationsellipsoid

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad a > c \quad \text{oder} \quad < c,$$

dagegen ist $\overline{KP}$ nur dann ein Min. oder Max., wenn der Krümmungsmittelpunkt $K$ in der $xy$-Ebene liegt, und die Krümmungsradien der beiden Nabelpunkte sind Max. oder Minima.

bei sonst festem Zeichen noch zum Verschwinden gebracht werden kann, so gehören diese Auflösungen immer einem mindestens zweifachen Wurzelsystem der Gleichungen 1) an und zugleich werden stets die allgemeinsten Werthe der Variationen $\xi_1$, $\xi_2, \cdots \xi_n$, welche $\delta^2 f = 0$ machen, durch die $n$ linearen Gleichungen geliefert:

$$3) \qquad \sum_1^n {}^i f_{hi}\xi_i = 0\,, \quad h = 1, 2, \cdots n.$$

II. Wenn ein System reeller Auflösungen der Gleichungen 1), für welches $\delta^2 f$ bei sonst festem Zeichen noch zum Verschwinden gebracht werden kann, ein wirkliches Maximum oder Minimum der Function $f$ erzeugen soll, so muss dasselbe einem unbeschränkt dreifachen Wurzelsystem dieser Gleichungen angehören. Umgekehrt verschwindet für ein solches Lösungssystem die dritte Variation der Function $f$ immer gleichzeitig mit der zweiten.

Hierbei verstehe ich allgemein unter einem $m$-fachen Wurzelsystem der Gleichungen 1) ein Werthsystem von der Form:

$$x_i = a_i + \varepsilon\xi_i + \frac{\varepsilon^2}{2}\xi_i' + \cdots + \frac{\varepsilon^{m-1}}{(m-1)!}\xi_i^{(m-2)},$$
$$i = 1, 2, \cdots n,$$

welches den Gleichungen 1) genügt, wie klein man auch $\varepsilon$ annehmen mag, sobald man nur die höheren Potenzen dieser Zahl von der $m^{\text{ten}}$ an vernachlässigt, und nenne im Besonderen (für $m > 2$) das Wurzelsystem unbeschränkt $m$-fach, wenn es aus jedem $(m-1)$-fachen Wurzelsystem mit denselben Gliedern nullter Ordnung in Bezug auf $\varepsilon$ durch Hinzufügung passender Glieder $(m-1)^{\text{ter}}$ Ordnung erhalten werden kann.

Der präcise Sinn dieser Definitionen, die vielleicht noch schärfer gefasst werden sollten, wird aus der Ableitung der Bedingungen für ein 2- und 3-faches Wurzelsystem sogleich klar werden.

Vertauscht man jedes

$$x_i \text{ mit } x_i + \varepsilon\xi_i + \frac{\varepsilon^2}{2}\xi_i'$$

und vernachlässigt die höheren Potenzen von $\varepsilon$ von der dritten an, so geht $f_h$ über in:

$$f_h + \varepsilon \sum_1^n {}^i f_{hi}\xi_i + \frac{\varepsilon^2}{2}\left(\sum_1^n {}^i f_{hi}\xi_i' + \overline{\sum^i \sum^k}_1^n f_{hik}\,\xi_i\xi_k\right).$$

Damit also ein System Auflösungen $x_1, \cdots x_n$ der Gleichungen 1) einem zweifachen Wurzelsystem dieser Gleichungen angehöre, ist nothwendig und hinreichend, dass man für dasselbe den $n$ Gleichungen 3) genügen könne durch Werthe der $\xi$, die nicht sämmtlich Null sind, d. h. die Lösungen müssen zugleich die Bedingung

4) $$\Sigma \pm f_{11} f_{22} \cdots f_{nn} = 0$$

erfüllen.

Einem dreifachen Wurzelsystem ferner gehören die Lösungen an, sobald nach Substitution derselben mit den $n$ Gleichungen 3) zugleich auch die $n$ Gleichungen

5) $$M_h \equiv \sum_1^n {}^i f_{hi}\xi_i' + \overline{\sum^i \sum^k}_1^n f_{hik}\xi_i\xi_k = 0,$$
$$h = 1, 2, \cdots n,$$

bestehen können für Werthe von $\xi_1, \cdots \xi_n$, die nicht sämmtlich Null sind. Soll aber insbesondere das Wurzelsystem unbeschränkt dreifach sein, so muss überdies den Gleichungen 5) genügt werden können für alle beliebigen Werthe der $\xi$, welche die Gleichungen 3) befriedigen.

Was nun die obigen Sätze selbst betrifft, so beruht der Beweis des ersten wesentlich auf den bekannten Eigenschaften der Transformation der ganzen homogenen Functionen zweiten Grades, während der zweite direct aus dem ersten folgt.

Soll ein System reeller Auflösungen $x_1, \cdots x_n$ der Gleichungen 1) ein wirkliches Max. oder Min. der Function $f$ hervorrufen, so darf nach Substitution dieser Lösungen die zweite Variation von $f$ keines Zeichenwechsels fähig sein, und wenn sie noch verschwinden kann, so muss immer zugleich auch die dritte Variation

$$\delta^3 f \equiv \overline{\sum^h \sum^i \sum^k}_1^n f_{hik}\,\xi_h\xi_i\xi_k$$

verschwinden.

Mit Hülfe der Wurzeln $\varrho_1, \varrho_2, \cdots \varrho_n$ der Gleichung $n^{\text{ten}}$ Grades:

$$6)\qquad \varDelta(\varrho) \equiv \begin{vmatrix} f_{11}-\varrho, & f_{12}, & \cdots f_{1n} \\ f_{21}, & f_{22}-\varrho, & \cdots f_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ f_{n1}, & f_{n2}, & \cdots f_{nn}-\varrho \end{vmatrix} = 0,$$

die nur reelle Wurzeln besitzt, kann man nun bekanntlich $\delta^2 f$ stets auf die Form bringen:

$$\delta^2 f \equiv \varrho_1 \eta_1^2 + \varrho_2 \eta_2^2 + \cdots \varrho_n \eta_n^2,$$

wo $\eta_1, \eta_2, \cdots \eta_n$ reelle, lineare, von einander unabhängige Functionen der $\xi$ sind.

Soll daher $\delta^2 f$ bei sonst festem Zeichen noch verschwinden können, so müssen nothwendig eine oder mehrere Wurzeln der Gleichung 6) $= 0$ sein und die übrigen alle dasselbe Zeichen haben. Die Bedingung $\varDelta(0) = 0$ ist aber identisch mit 4): die zu Grunde gelegten Lösungen der Gleichungen 1) müssen also einem mindestens zweifachen Wurzelsystem dieser Gleichungen angehören.

Ist weiter etwa

$$\varrho_1 = \varrho_2 = \cdots = \varrho_m = 0,$$

während die übrigen Wurzeln der Gleichung 6) sämmtlich positiv, oder sämmtlich negativ sind, so sind die allgemeinsten Substitutionen, welche $\delta^2 f = 0$ machen, die folgenden:

$$\eta_{m+1} = 0, \quad \eta_{m+2} = 0, \cdots \eta_n = 0,$$

d. h. die allgemeinste Art, $\delta^2 f$ zu Verschwinden zu bringen, ist dann die, dass man zwischen den $n$ Variationen $\xi_1, \cdots \xi_n$ passende $n-m$ von einander unabhängige lineare Gleichungen herstellt.

Es ist aber dann zugleich $\varrho = 0$ eine gemeinsame Wurzel der $m$ Gleichungen:

$$\varDelta(\varrho) = 0, \quad \varDelta'\varrho = 0, \cdots \overset{(m-1)}{\varDelta}\varrho = 0.$$

Nach einem bekannten Satze reduciren sich in Folge dessen die $n$ linearen Gleichungen 3), die stets die Gleichung $\delta^2 f = 0$ nach sich ziehen, ebenfalls auf nur $n-m$ unabhängige Gleichungen. Sie liefern daher selbst die allgemeinsten Werthe der $\xi$, welche bei den gemachten Voraussetzungen $\delta^2 f$ zum Verschwinden bringen.

Hiermit ist Satz I. bewiesen.

Aus ihm folgt sofort: Wenn ein System reeller Auflösungen der Gleichungen 1), für welches $\delta^2 f$ bei sonst festem Zeichen noch verschwinden kann, ein wirkliches Max. oder Min. der Function $f$ hervorrufen soll, so muss nothwendig nach Substitution desselben die dritte Variation von $f$:

$$7)\qquad \sum_1^n{}^h \sum{}^i \sum{}^k f_{hik}\xi_h\xi_i\xi_k = 0$$

werden für alle Werthe der $\xi$, welche den Gleichungen 3) genügen.

Nach 5) ist nun:

$$8)\quad \sum_1^n{}^h \xi_h M_h \equiv \sum_1^n{}^i \xi_i' \sum_1^n{}^h f_{hi}\xi_h + \sum_1^n{}^h \sum{}^i \sum{}^k f_{hik}\xi_h\xi_i\xi_k.$$

Ist daher die Gleichung 7) eine blosse Folge der Gleichungen 3), so hat man für alle Werthe der $\xi$, welche den Gleichungen 3) genügen:

$$9)\qquad \sum_1^n{}^h \xi_h M_h \equiv 0.$$

Wenn sich also die $n$ Gleichungen 3) auf nur $m$ unabhängige Gleichungen reduciren, so dass etwa die allgemeinsten Substitutionen, welche sie erfüllen, von der Form sind:

$$\xi_i = \sum_{m+1}^n{}^\lambda \mu_i^\lambda \xi_\lambda,\quad i = 1, 2, \cdots m,$$

und zugleich irgend eine der Determinanten:

$$10)\qquad \Sigma \pm f_{\alpha 1} f_{\beta 2} \cdots f_{\sigma m} \equiv \Sigma \pm f_{1\alpha}, f_{2\beta} \cdots f_{m\sigma},$$

in der $\alpha, \beta, \cdots \sigma$ $m$ verschiedene der Zahlen $1, 2, \cdots n$ bedeuten, nicht Null ist, so bestehen bei unserer Annahme für alle Werthe der $\xi$, welche den Gleichungen 3) genügen, zwischen $M_1, M_2, \cdots M_n$ die $n - m$ identischen Relationen:

$$\sum_1^m{}^i \mu_i^\lambda M_i + M_\lambda \equiv 0,\quad \lambda = m + 1, \cdots n,$$

und es werden folglich für alle diese Werthe die $n$ Gleichungen 5) erfüllt, sobald man für $\xi'_\alpha, \xi'_\beta, \cdots \xi'_\sigma$ ihre Werthe aus den $m$ Gleichungen

$$M_1 = 0,\quad M_2 = 0, \cdots M_m = 0$$

einsetzt, Gleichungen, die nach 5) und 10) eben in Bezug auf $\xi'_\alpha, \xi'_\beta, \cdots \xi'_\sigma$ von einander unabhängig sind; d. h. aber nach dem Früheren: das betrachtete Lösungssystem $x_1, \cdots x_n$ gehört einem unbeschränkt dreifachen Wurzelsystem der Gleichungen 1) an.

Umgekehrt, wenn dies der Fall ist, so kann man für alle Werthe von $\xi_1, \xi_2, \cdots \xi_n$, welche den Gleichungen 3) genügen, die $\xi'$ so bestimmen, dass die Gleichungen 5) identisch erfüllt werden, und nach 8) wird daher auch die Bedingung 7) durch alle diese Werthe der $\xi$ befriedigt.

Damit ist auch Satz II. bewiesen.

In beiden Sätzen tritt die Analogie mit der Theorie der Max. und Min. der Functionen von einer Variabeln klar zu Tage. Entsprechende Sätze werden wohl auch für die höheren Variationen gelten; um sie aber dort entdecken, resp. streng beweisen zu können, müsste man vermuthlich über das Problem der Transformation der ganzen homogenen Functionen $2p^{\text{ten}}$ Grades im Falle $p > 1$ erst mehr wissen als bisher*).

## § 5.

## Ausnahmen.

Es darf indessen nicht unerwähnt bleiben, dass die obigen Sätze, ebenso wie die ganze gewohnte Theorie des gewöhnlichen Max. und Min. nur für solche Systeme von Auflösungen der Gleichungen 1) gelten, die keine der $n$ Unbekannten $x_1, \cdots x_n$ unbestimmt lassen.

In den besonderen Fällen nämlich, wo es möglich ist, den $n$ Gleichungen 1) dadurch zu genügen, dass man für einen Theil der Unbekannten passende Functionen der übrigen setzt, kann man für ein solches Lösungssystem die zweite Variation $\delta^2 f$ immer zum Verschwinden bringen und trotzdem kann sie, auch wenn sie eines Zeichenwechsels nicht fähig ist, doch allein schon die Frage nach dem Max. oder Min. endgiltig entscheiden. In solchen Fällen, für welche das Beispiel einer Oberfläche, die keine vereinzelten höchsten oder tiefsten Punkte, sondern ganze

*) Ein Analogon zum Satze I. findet sich bekanntlich auch in den Kriterien des Max. und Min. der einfachen Integrale wieder. Vgl. Crelle J. 17 die *Jacobi*'sche Abhandlung »Zur Theorie der Variationsrechnung«, oder auch Crelle J. 69, S. 261.

höchste oder tiefste Linien besitzt*), die beste Illustration darbietet, ist also eine Untersuchung der höheren Variationen ganz überflüssig, ja sogar geradezu unzulässig.

Die Eigenthümlichkeiten, welche diese Classe von Max. und Min. aufweist, rühren daher, dass, wenn sich die $n$ Gleichungen 1) erfüllen lassen durch $m < n$ Substitutionen etwa von der Form:

11) $$x_i = \varphi_i(x_{m+1}, \cdots, x_n), \quad i = 1, 2, \cdots m,$$

diese Substitutionen zugleich auch stets der Function $f$ einen constanten, d. h. von $x_{m+1}, \cdots x_n$ unabhängigen Werth ertheilen, so dass also, wenn man:

$$\varphi_i(x_m, \cdots x_n) = \varphi_i, \quad \varphi_i(x'_{m+1} \cdots x_n') = \varphi_i'$$

setzt, stets:

12) $$f(\varphi_1, \cdots \varphi_m, x_{m+1}, \cdots x_n) = f(\varphi_1', \cdots \varphi'_m, x'_{m+1}, x_n')$$

ist**). Wollte man daher streng an der ursprünglichen Definition des Max. und Min. festhalten, wonach der Werth der Function $f$ an der Stelle $(x_1 \cdots x_n)$ grösser oder kleiner sein muss, als an allen Nachbarstellen $(x_1' \cdots x_n')$, wenn die Function am ersten Orte ein Max. oder Min. erreichen soll, so müsste

*) Vgl. *Spitzer*, Grunert's Archiv Bd. XXII.

**) In der That, bezeichnet man die Substitution der Werthe 11) durch Einschliessung in runde Klammern, so hat man in Folge der Voraussetzung, dass jedes $(f_h) \equiv 0$ ist, auch für $\lambda = m + 1, \cdots n$

$$\frac{\partial (f)}{\partial x_\lambda} \equiv (f_\lambda) + \sum_1^m {}_i (f_i) \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_\lambda} \equiv 0.$$

Aus den Identitäten $(f_h) \equiv 0$ folgt zugleich durch Differentation nach $x_\lambda$:

$$(f_{h\lambda}) + \sum_1^m {}_i (f_{hi}) \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_\lambda} \equiv 0.$$

Für das Lösungssystem 11) wird daher die zweite Variation von $f$:

$$\partial^2 f \equiv \sum_1^n {}_h \xi_h \sum_1^m {}_i (f_{hi}) \left( \xi_i - \sum_{m+1}^n {}_\lambda \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_\lambda} \xi_\lambda \right)$$

und lässt sich somit immer zum Verschwinden bringen durch die $m$ Substitutionen:

$$\xi_i = \sum_{m+1}^n {}_\lambda \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_\lambda} \xi_\lambda.$$

man sagen, dass ein solches Lösungssystem der Gleichungen 1) niemals ein wirkliches Max. oder Min. der Function $f$ hervorbringen könne. Dann aber würde man unter anderen von vornherein alle diejenigen Aufgaben des Max. und Min. ausschliessen, bei denen es, wie z. B. bei der analytischen Behandlung des Problems des $n$-Ecks von grösster Fläche bei gegebenem Umfange in rechtwinkligen Coordinaten, a priori klar ist, dass die Gleichungen, welche das Problem lösen, unmöglich alle Variabeln der Function bestimmen können. Man muss also, will man anders auf solche Max. und Min. nicht ganz verzichten, die ursprüngliche Definition des Max. und Min. für die in Rede stehenden Ausnahmefälle erweitern und darf im Besondern bei den gemachten Annahmen für ein Max. oder Min. der Function $f$ an der Stelle $(\varphi_1 \cdots \varphi_m x_{m+1} \cdots x_n)$ nur verlangen, dass die Differenz

$$13)\qquad f(\varphi_1' + \varepsilon\xi_1, \cdots \varphi'_m + \varepsilon\xi_m, x'_{m+1}, \cdots x'_n) \\ - f(\varphi_1, \cdots \varphi_m, x_{m+1}, \cdots x_n)$$

bei hinreichend kleinem $\varepsilon$ für alle nicht gleichzeitig verschwindenden Werthe der Variationen $\xi_1, \cdots \xi_m$ ein festes Vorzeichen bewahre.

Nach 12) aber ist diese Differenz

$$= f(\varphi_1' + \varepsilon\xi_1, \cdots, \varphi'_m + \varepsilon\xi_m, x'_{m+1}, \cdots x'_n) \\ - f(\varphi_1', \cdots \varphi'_m, x'_{m+1}, \cdots x'_n)$$

und die erhaltene Bedingung somit keine andere als diejenige, welche erfüllt sein muss, wenn die Werthe

$$x_i = \varphi_i(x'_{m+1}, \cdots x'_n), \quad i = 1, 2, \cdots m,$$

die Function $f(x_1, \cdots x_m, x'_{m+1}, \cdots x'_n)$, die neben den Variabeln $x_1, \cdots x_m$ noch die unbestimmten Parameter $x'_{m+1}, \cdots x'_n$ enthält, im alten Sinne zu einem Max. oder Min. machen sollen.

In dem betrachteten Falle reducirt sich also das Problem $f$ = Max., Min. s. z. s. von $n$ auf $m$ Variable. Die willkürlich gebliebenen Variabeln spielen die Rolle von unbestimmten Constanten und die Sache verhält sich ganz so, als ob es sich nur darum handelte, $x_1, \cdots x_m$ als Functionen der Constanten $x_{m+1}, \cdots x_n$ so zu bestimmen, dass $f$ ein Max. oder Min. wird.

Tritt in der letzteren Aufgabe für alle reellen Werthe der Constanten $x_{m+1}, \cdots x_n$ an der Stelle $x_1 = \varphi_1, \cdots x_m$

$= \varphi_m$ ein wirkliches Max. oder Min. der Function $f$ ein, so ist dieses Max. oder Min. auch für alle reellen Werthe der Variabeln $x_{m+1}, \cdots x_n$ ein Max. oder Min. in dem ursprünglichen Problem. Findet dagegen in der zweiten Aufgabe das Max. oder Min. nur so lange statt, als die Constanten $x_{m+1}, \cdots x_n$ zwischen gewissen Grenzen bleiben, so ist auch das Max. oder Min. im ursprünglichen Problem hinsichtlich der Variabeln $x_{m+1}, \cdots x_n$ an dieselben Grenzen gebunden.

Das Vorkommen des eben erklärten Ausnahmefalles beschränkt sich wohlbemerkt nicht bloss auf solche Probleme des Max. und Min., bei denen man wie bei der Aufgabe des $n$-Ecks von grösster Fläche bei gegebenem Umfange von vornherein auf sein Eintreffen rechnen kann. Häufig erscheint er auch als ein besonderer Glücksfall erst in Folge der Substitutionen, durch die man gerade eine vorgelegte Aufgabe des relativen Max. und Min. auf ein absolutes Problem zurückgeführt hat. In dieser Weise kann er im Besondern auch in dem Normalenproblem einer Oberfläche eine Rolle spielen, zumal dann, wenn die Oberfläche gewisse Singularitäten besitzt.

Giebt man z. B. der Frage nach den kürzesten und weitesten Abständen eines gegebenen Punktes $A = a, b, c$ von der Centrafläche des Rotationsparaboloides:

$$X^2 + Y^2 = 2pZ, \quad p > 0,$$

die absolute Form:

$$2f \equiv (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = \text{Max., Min.},$$
$$x \equiv -\frac{u^3 \cos v}{p^2}, \quad y \equiv -\frac{u^3 \sin v}{p^2}, \quad z \equiv p + \frac{3u^2}{2p},$$

so wird den beiden Gleichungen $f_1 = 0$, $f_2 = 0$, welche die Aufgabe lösen, gleichzeitig genügt durch $u = 0$. Die Verbindungslinie des Punktes $A$ mit dem Punkte $x = 0$, $y = 0$, $z = p$, d. h. mit dem Krümmungscentrum des Nabelpunktes des Paraboloids, ist also eine Lösung und zwar wird für dieselbe:

$$f_{11} = \frac{3}{p}(p-c),$$
$$f_{111} = \frac{6(a \cos v + b \sin v)}{p^2}.$$

Sie ist also ein Min. der Entfernung, oder ein Max., oder keins von beiden, je nachdem $c < p$, oder $> p$, oder $= p$ ist*).

*) Dieselbe Lösung erscheint in derselben Aufgabe, wenn man nur in dieser die Substutionen:

Entsprechendes gilt auch von den Centraflächen des Rotationsellipsoides und des zweischaligen Rotationshyperboloides, wie denn überhaupt für die Centrafläche einer jeden Oberfläche, die einen ausgezeichneten Nabelpunkt besitzt, die Verbindungslinie des Krümmungscentrums dieses Nabelpunktes mit einem gegebenen Punkte im Allgemeinen immer ein Max. oder Min. der Entfernung des gegebenen Punktes von einem beliebigen Punkte der Centrafläche ist. —

---

$$x = -\frac{(X^2+Y^2)X}{p^2}, \qquad y = -\frac{(X^2+Y^2)Y}{p^2},$$
$$z = p + \frac{3(X^2+Y^2)}{2p}$$

an Stelle der oben benutzten anwendet, als ein gewöhnliches, reguläres Min. oder Max., bei der Substitution

$$z = p + \tfrac{3}{2}p^{\frac{1}{3}}(x^2+y^2)^{\frac{1}{3}}$$

dagegen als Min. oder Max. an einer Stelle, an der die Entwickelbarkeit der Function aufhört, und entzieht sich endlich, wenn man der Aufgabe die bedingte Form

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = \text{Max., Min.},$$
$$\varphi(xyz) \equiv 27p(x^2+y^2) - 8(z-p)^3 = 0$$

giebt, den gewöhnlichen Regeln des relativen Max. und Min., weil für sie

$$\varphi'x, \quad \varphi'y, \quad \varphi'z$$

sämmtlich Null werden.

**W. G. Hankel**, *Ueber die aktino- und piezoelektrischen Eigenschaften des Bergkrystalles und ihre Beziehung zu den thermoelektrischen* *).

In der Sitzung am 23. April des vorigen Jahres habe ich einen allgemeinen Bericht **) gegeben über Vorgänge an Bergkrystallen, bei welchen eine directe Umwandlung der Schwingungen der strahlenden Wärme in Elektricität stattfindet, und ich lege heute der Gesellschaft die Abhandlung vor, welche die ausführliche Untersuchung darüber enthält. Wie ich schon in jenem Berichte gezeigt, ist diese durch Wärmestrahlung auf den prismatischen Seitenkanten des Bergkrystalles entstehende Erregung von der von mir bereits im Jahre 1866 festgestellten thermoelektrischen wesentlich verschieden. Ich habe daher die durch Strahlung erzeugte Elektricität mit dem Namen der Aktinoelektricität bezeichnet.

Im Jahre 1880 hatten die Herren *J.* und *P. Curie* gefunden, dass bei hemimorphen Krystallen durch Druck in der Richtung der hemimorphen Axe und Nachlassen desselben, elektrische Spannungen erzeugt werden, und sie glaubten, dass dieser Vorgang mit der Thermoelektricität dergestalt zusammenhinge, dass Druck und Erkaltung, weil bei beiden Vorgängen die Moleküle einander genähert werden, und ebenso andererseits Erwärmung und Nachlassen des Druckes (Entfernen der Moleküle) dieselbe Modification der Elektricität hervorbrächten. In einer kurzen Mittheilung***) habe ich gezeigt, dass dieser Regel keine allgemeine Gültigkeit zukommt. Es beruht also auch die durch Druckänderungen erzeugte Elektricität auf einem besonderen Vorgange, und ich habe sie deshalb als Piezoelektricität unterschieden.

---

*) Vorgetragen in der Sitzung vom 23. April 1881.

**) Ber. d. math.-phys. Klasse d. K. Sächs. Ges. d. Wiss. für 1880 S. 60.

***) Ebend. S. 144.

Die drei beim Bergkrystalle möglichen Erregungsweisen polarer Elektricität, durch Aenderungen in der Temperatur, in der Wärmestrahlung und in dem Drucke, stehen in enger Beziehung zu einander, und hängen von der eigenthümlichen Bildung des Bergkrystalles ab. In dem ersten Abschnitte meiner Abhandlung gebe ich daher eine genauere Darstellung der krystallographischen Verhältnisse dieses Minerals, während der zweite die thermoelektrischen, der dritte die aktinoelektrischen und der vierte die piezoelektrischen Vorgänge behandelt.

## I. Krystallographische Verhältnisse des Bergkrystalles.

Bereits in meiner früheren Abhandlung über die thermoelektrischen Eigenschaften des Bergkrystalles*) habe ich den Nachweis geführt, dass wir die Krystalle desselben als nach den Nebenaxen hemimorph gebildet anzunehmen haben; damit stimmt auch das thermoelektrische Verhalten überein, indem bei Temperaturänderungen an den beiden Enden einer jeden Nebenaxe entgegengesetzt elektrische Pole auftreten. Wir können die Enden derselben als beim Erkalten positive oder negative unterscheiden.

Aus der dihexagonalen Pyramide $mPn$ lassen sich durch Wachsen und Verschwinden der abwechselnden Flächen zwei hemiedrische Gestalten, nämlich zwei hexagonale Trapezoeder herleiten, welche sich durch die Richtung der in ihnen ausgesprochenen Drehung unterscheiden. Betrachten wir die an jedem Ende der Nebenaxen liegenden vier Flächen als ein zusammengehöriges System, so entsteht das eine hexagonale Trapezoeder, wenn wir die Fläche oben links und unten rechts, und das andere, wenn wir die Fläche oben rechts und unten links bis zum gegenseitigen Durchschnitte wachsen lassen. Um den Sinn der Drehung festzustellen, denken wir uns in die Hauptaxe gestellt, und bezeichnen die Drehung, welche eine durch die Hauptaxe und den Schwerpunkt der oberen Fläche gelegte Ebene um die Hauptaxe ausführen muss, um den Schwerpunkt der unteren Fläche zu erreichen, durch die Buchstaben $l$ (links) und $r$ (rechts). Die dihexagonale Pyramide zerfällt dann in die bei-

*) Abh. d. K. Sächs. Ges. d. Wiss. Bd. XIII. S. 319.

den hexagonalen Trapezoeder $l\frac{mPn}{2}$ und $r\frac{mPn}{2}$. Tritt nun an diesen Gestalten in der Richtung der Nebenaxen eine hemimorphe Bildung ein, indem die zu jedem Eckpunkte einer solchen gehörigen Flächen nur an dem zuvor als positiv, oder an dem als negativ bezeichneten Ende erhalten bleiben, so entstehen vier trigonale Trapezoeder, welche sich durch die Symbole $+r\frac{mPn}{2}$, $-r\frac{mPn}{2}$, $+l\frac{mPn}{2}$ und $-l\frac{mPn}{2}$ völlig bestimmt bezeichnen lassen, wobei das Vorzeichen dasjenige Ende der Nebenaxen angibt, an welchem die Flächen vorhanden sind.

Wird für die beiden hemiedrischen Gestalten $r\frac{mPn}{2}$ und $l\frac{mPn}{2}$ der Ableitungscoefficient $n = 1$, so gehen die beiden hexagonalen Trapezoeder in eine der gewöhnlichen hexagonalen Pyramide $mP$ an Gestalt gleiche sechsseitige Pyramide über, die sich aber dadurch von der gewöhnlichen hexagonalen unterscheidet, dass bei ihr nur die an jedem Eckpunkte der Nebenaxen oben links und unten rechts, oder oben rechts und unten links gelegenen Flächen zusammengehören. Die Symbole für diese beiden scheinbaren hexagonalen Pyramiden würden also sein $\left(r\frac{mPn}{2}\right)_{n=1}$ und $\left(l\frac{mPn}{2}\right)_{n=1}$; und wenn $m = 1$ ist, $\left(r\frac{Pn}{2}\right)_{n=1}$ und $\left(l\frac{Pn}{2}\right)_{n=1}$.

Tritt nun an diesen Gestalten eine nach den Nebenaxen hemimorphe Bildung ein, so entstehen vier scheinbare Rhomboeder $+\left(r\frac{mPn}{2}\right)_{n=1}$, $-\left(r\frac{mPn}{2}\right)_{n=1}$, $+\left(l\frac{mPn}{2}\right)_{n=1}$ und $-\left(l\frac{mPn}{2}\right)_{n=1}$, wo wieder das Vorzeichen diejenigen Axenenden bezeichnet, an welchen die Flächen erhalten bleiben.

Wird $n = 2$, so entsteht die Pyramide $mP2$, in welcher keine Drehung ausgesprochen ist. Durch hemimorphe Bildung entstehen die beiden trigonalen Pyramiden $+mP2$ und $-mP2$ (die sogenannten Rhombenflächen beim Bergkrystalle, wenn $m = 2$).

An den Bergkrystallen zeigt sich nun die hemimorphe Bildung dadurch, dass an den negativen Enden der Nebenaxen

grosse Flächen $-\left(r\frac{P\,n}{2}\right)_{n=1}$ bei sogenannten rechten, und $-\left(l\frac{P\,n}{2}\right)_{n=1}$ bei linken Krystallen auftreten, dass dagegen an den positiven Enden der Nebenaxen kleine Flächen $+\left(r\frac{P\,n}{2}\right)_{n=1}$ bei rechten, und $+\left(l\frac{P\,n}{2}\right)_{n=1}$ bei linken, sowie die Flächen $+2P2$ und die Flächen trigonaler Trapezoeder, sowohl rechter als linker $+\left(r\frac{m\,P\,n}{2}\right)$ und $+\left(l\frac{m\,P\,n}{2}\right)$ erscheinen.

## II. Thermoelektricität.

Im zweiten Abschnitte habe ich zunächst die specielle Untersuchung der thermoelektrischen Vorgänge auf sowohl an beiden Enden der Hauptaxe ausgebildeten, als auch an dem einen Ende verbrochenen einfachen Bergkrystallen mitgetheilt und dieselben auf den beigefügten vier Tafeln übersichtlich dargestellt.

Die Beobachtungen der elektrischen Spannungen sind nach dem in meinen früheren Abhandlungen beschriebenen Verfahren ausgeführt; die Krystalle wurden bis auf die zu prüfende Fläche oder Kante in Kupferfeilicht eingesetzt, in einem kleinen Ofen bis 120⁰ erhitzt, und dann während des Erkaltens den verschiedenen Punkten der freien Oberfläche das abgerundete Ende eines mit dem Goldblättchen des von mir construirten Elektrometers in leitender Verbindung stehenden Platindrahtes mittelst einer Hebelvorrichtung genähert.

Bei vollkommen normal gebildeten Bergkrystallen, wo jedes Ende der Hauptaxe drei grosse Pyramidenflächen, abwechselnd mit drei kleinen trägt, wächst auf den oberen grossen Flächen $-\left(l\frac{P\,n}{2}\right)_{n=1}$ bei linken Krystallen die negative Spannung von links nach rechts und zieht sich über die rechts anliegende Seitenkante des Prismas*) und ihre Umgebung in der Richtung von links nach rechts hinab, bis zu der entsprechenden grossen Fläche $-\left(l\frac{P\,n}{2}\right)_{n=1}$ des unteren Endes, auf welcher dann

*) Dieselbe trägt keine Rhomben- oder Trapezoederflächen.

die negative Spannung nach rechts hin abnimmt. Auf den oberen kleinen Flächen $+\left(l\frac{P\,n}{2}\right)_{n=1}$ wachsen die elektrischen Spannungen in der Richtung von links nach rechts in positivem Sinne, und ziehen sich über die rechts anliegenden, Rhomben- oder Trapezoederflächen tragenden Seitenkanten von links nach rechts bis zu der entsprechenden kleinen Fläche $+\left(l\frac{P\,n}{2}\right)_{n=1}$ am unteren Ende*).

In gerade entgegengesetzter Richtung ändern sich die elektrischen Spannungen bei den rechten Krystallen; es wachsen also auf den oberen grossen Flächen $-\left(r\frac{P\,n}{2}\right)_{n=1}$ die negativen, und auf den kleinen Flächen $+\left(r\frac{P\,n}{2}\right)_{n=1}$ die positiven Spannungen von rechts nach links, und die elektrischen Zonen ziehen sich über die links anliegenden Kanten des Prismas nach den entsprechenden Flächen am unteren Ende; dabei gehen die positiven Zonen, ebenso wie bei den linken Krystallen, über diejenigen Kanten hinweg, welche Rhomben- und Trapezoederflächen tragen.

Wenn ein einfacher Bergkrystall keine Rhomben- und Trapezoederflächen besitzt, also kein äusseres Anzeichen trägt, welches erkennen lässt, ob er ein linker oder ein rechter ist, so genügt, wie aus dem Vorstehenden erhellt, die thermoelektrische Prüfung einer einzigen grossen Pyramidenfläche, um zu entscheiden, welcher Abtheilung derselbe angehört.

Wir können dem Bergkrystalle im Allgemeinen drei polare elektrische Axen, welche mit den drei Nebenaxen zusammenfallen, beilegen. An denjenigen Enden der Nebenaxen, an welchen die Rhomben- oder Trapezoederflächen auftreten, liegen beim Erkalten die positiven, an den drei andern die negativen Pole.

Bei steigender Temperatur sind überall die elektrischen Polaritäten die entgegengesetzten.

Weicht die Bildung des einen Endes eines Bergkrystalles von der oben beschriebenen ab, so zeigt sich auf den Flächen

*) Eine Umkehrung des Krystalles, bei welcher das untere Ende zum oberen gemacht wird, lässt selbstverständlich die beschriebene Vertheilung unverändert.

dieses Endes eine mehr oder weniger grosse Störung der normalen elektrischen Vertheilung.

Einer besonderen Prüfung habe ich ferner die äusserlich im Ganzen einfach erscheinenden, aber aus zwei um 60° oder 180° gegen einander gedrehten Individuen zusammengesetzten Bergkrystalle unterzogen; jedoch standen mir nur solche Exemplare zur Verfügung, bei denen beide verwachsene Individuen derselben Abtheilung angehörten, also beide linke oder beide rechte Krystalle waren. Die elektrische Vertheilung auf dem ganzen Krystalle erscheint durch die Einschaltung eines oder zweier Stücke eines zweiten Individuums verändert, weil jedes Flächenstück die ihm zukommende Polarität beibehält. Infolge der Zusammensetzung des Krystalles können also zwei benachbarte Kanten dieselbe Polarität zeigen, wobei eine entgegengesetzt elektrische Zone in der Mitte der zwischen ihnen liegenden Fläche erscheint. Aus den Abweichungen von der normalen elektrischen Vertheilung lässt sich, wie ich in der Abhandlung speciell nachweise, ein sicherer Schluss auf die Lage und die Grösse der eingeschobenen Stücke machen.

Schliesslich habe ich auch die elektrischen Vorgänge in der Richtung der Hauptaxe, nach welcher der Bergkrystall nicht hemimorph gebildet ist, genauer untersucht. Bei vollkommen normal gestalteten Krystallen zeigen die beiden Enden der Hauptaxe positive Elektricität, und es erstreckt sich diese Beschaffenheit durch den ganzen Krystall hindurch, so dass auf senkrecht gegen die Hauptaxe gemachten Querschnitten die Mitte beim Erkalten positive Spannung besitzt. Wenn dagegen nur das eine Ende normal, das andere aber abweichend gestaltet ist, so ist die Mitte der Querschnitte, wenn dieselben in der Nähe des ersteren Endes gemacht werden, noch positiv. Wenn der Querschnitt sich weiter vom ersteren Ende entfernt, so nimmt die positive Spannung in der Mitte desselben ab, und geht bei Annäherung an das andere Ende, wenn dieses infolge der abweichenden Bildung bereits selbst negativ ist, gleichfalls ins Negative über.

### III. Aktinoelektricität.

Bei der Untersuchung der aktinoelektrischen Vorgänge waren die Krystalle gewöhnlich in verticaler Stellung ihrer Hauptaxe mittelst Siegellacks auf kleine Metallscheiben aufgekittet; biswei-

len befanden sie sich aber auch, gerade wie bei den thermoelektrischen Versuchen, bis auf die zu prüfenden Kanten oder Flächen in Kupferfeilicht eingesetzt. Die elektrischen Spannungen wurden theils auf der Seite, auf welcher die Wärmestrahlung einfiel, theils auf der gegenüberliegenden beobachtet, indem die Vertheilungswirkung gemessen wurde, welche der Krystall auf einen an die betreffende Stelle angelegten, mit dem Goldblättchen des Elektrometers in leitender Verbindung stehenden Draht (oder Kugel) ausübte.

Wenn die Strahlung der Sonne, des elektrischen Kohlenlichtes, einer Flamme oder eines erhitzten Körpers einen einfachen Bergkrystall durchdringt, so erscheinen gleichzeitig auf allen sechs Kanten desselben elektrische Pole; und es ist für die Entstehung derselben überhaupt gleichgültig, in welcher Richtung die Strahlen durch den Krystall gehen; sie können selbst parallel mit der Hauptaxe, also senkrecht gegen die Nebenaxen gerichtet sein. Diese sechs elektrischen Pole sind abwechselnd positiv und negativ, so dass jede Nebenaxe an dem einen Ende einen positiven, an dem anderen einen negativen Pol trägt, und zwar stimmen dieselben in Bezug auf die Art der in ihnen auftretenden Elektricität mit der bei der Abkühlung an denselben Stellen entstehenden thermoelektrischen überein. Es zeigen also beim Eintritt der Strahlung und während der Dauer derselben diejenigen drei Kanten des Prismas, an welchen die Rhomben- und Trapezoederflächen auftreten, positive, die drei anderen aber negative Spannung.

Ich habe oben nachgewiesen, dass der Bergkrystall nach seinen drei Nebenaxen hemimorph gebildet ist, und dass infolge dessen die beiden Enden jeder Nebenaxe in einem Gegensatze stehen, wie ein solcher auch in den thermoelektrischen Vorgängen sich gezeigt hat, wo stets an einer Nebenaxe das eine Ende die positive, das andere die negative Polarität besass. Ein solcher Gegensatz zwischen den beiden Enden einer Nebenaxe tritt nun nicht ein, wenn wir die von *Briot* zur Erklärung der Drehung der Polarisationsebene des Lichtes im Bergkrystalle gemachte Annahme einer in der Richtung der Radien der Basis spiralförmig angeordneten Lagerung der Aethermoleküle aufstellen, weil eine Spirale, von aussen gesehen, an jedem ihrer Enden in gleicher Weise erscheint. Dagegen lässt sich eine Anordnung, welche den geforderten Gegensatz gibt, gewinnen,

wenn wir den Aether in den Bergkrystallen durch den Einfluss der krystallisirten materiellen Substanz so constituirt annehmen, dass seine Theilchen um die Nebenaxen leichter in der einen als in der anderen Richtung beweglich sind. Die Richtung der leichteren Drehung würde dann von dem einen Ende der Axe betrachtet z. B. rechtsum, von dem anderen Ende aus aber linksum erscheinen.

Wenn wir nun die Elektricität als kreisförmige Schwingung des Aethers unter Betheiligung der materiellen Moleküle auffassen, so unterscheiden sich die beiden Modificationen der Elektricität nur durch den Sinn der Drehung. Eine solche kreisförmige Schwingung erfolgt von der einen Seite gesehen rechtsum, von der andern gesehen linksum, stellt also auf der einen Seite die positive, auf der anderen die negative Modification der Elektricität dar.

Wenn beliebig gerichtete Wärmeschwingungen einen Bergkrystall durchdringen, so werden sie die Aethertheilchen unter Betheiligung der materiellen Moleküle stets im Sinne der leichteren Drehung in Bewegung setzen, und es müssen dann an den Enden einer jeden Nebenaxe entgegengesetzt elektrische Pole sich zeigen, wie solche zuvor angegeben wurden.

Diese aktinoelektrischen Spannungen erreichen in sehr kurzer Zeit (30 bis 40 Secunden) ihr Maximum und bleiben auf demselben, so lange die Bestrahlung in gleicher Stärke anhält; jedoch tritt nach und nach eine Schwächung durch den Umstand ein, dass durch die beginnende Erwärmung der Masse des Krystalles eine thermoelektrische Spannung hervorgerufen wird, welche in ihrem Vorzeichen der aktinoelektrischen gerade entgegengesetzt ist. Beim Beginn der Bestrahlung ist die Zunahme der Aktinoelektricität am stärksten und nimmt dann ab, wie folgender Versuch zeigt:

| Nach Beginn der Bestrahlung verflossen | Stärke der Aktinoelektricität |
|---|---|
| 0 Minuten | 0 |
| 5 - | + 18,7 |
| 10 - | + 28,5 |
| 15 - | + 34,5 |
| 20 - | + 37,5 |
| 25 - | + 39,5 |
| 30 - | + 41,0 |

Wird die Strahlung aufgehoben, so verschwindet die Aktinoelektricität in derselben Weise, anfangs rascher, später langsamer abnehmend.

Diese Vorgänge weisen auf einen Widerstand hin, welcher durch die Strahlung bei der Erregung der Aktinoelektricität überwunden werden muss und durch die Betheiligung der materiellen Moleküle an den elektrischen Schwingungen bedingt ist; derselbe wächst, je schneller die Schwingungen werden, und kann durch eine gegebene Bestrahlungsintensität nur bis zu einer gewissen Höhe überwunden werden. Dauert die Strahlung ungeändert fort, so bleibt die aktinoelektrische Spannung auf gleicher Höhe, und die fortwährend zur Erhaltung der elektrischen Schwingungen verwendete Arbeit der Wärmestrahlung setzt sich in eine Erhöhung der Temperatur der Moleküle um. Dieser Widerstand der materiellen Moleküle bewirkt auch nach dem Aufheben der Strahlung das Verschwinden der aktinoelektrischen Schwingungen in der zuvor bezeichneten Weise.

Das Maximum, welche durch eine gegen 40 Secunden anhaltende Strahlung erzeugt wird, ist der Intensität der Strahlung proportional.

Die Erregung dieser Aktinoelektricität erfolgt durch die Wärmestrahlen, wie sich leicht durch Einschaltung mehr oder weniger diathermaner Substanzen in die Bahn der Strahlen nachweisen lässt. So ist z. B. die elektrische Spannung dieselbe, wenn die Strahlen einer Gasflamme durch eine farblose, und dann durch eine ebenso dicke mittelst Jod tief dunkelroth gefärbte Schicht von Schwefelkohlenstoff hindurchgehen. Die Reihenfolge der auf die Stärke ihrer Absorption der aktinoelektrischen Strahlen untersuchten Substanzen war dieselbe, wie bei Einschaltung derselben in die auf eine Thermosäule fallenden Strahlen; für die Strahlung einer Gasflamme waren aber die Procentsätze nur nahe zwei Drittel der auf die Thermosäule wirkenden. Wenn also für die freie Strahlung die erzeugte Aktinoelektricität und die in der Thermosäule erregte Wärme = 100 gesetzt wird, so sank z. B. bei Einschaltung einer fast farblosen Glasplatte die aktinoelektrische Wirkung auf 25, während die Wärmewirkung noch 36 betrug.

Die Strahlung des elektrischen Kohlenlichtes (gleich 4000 Normalkerzen) erzeugte eine Aktinoelektricität, deren Stärke siebenmal grösser war, als die durch die Flamme eines einfachen

Schnittbrenners in gleichem Abstande hervorgerufene. Die Strahlung der Sonne (30. Mai Mittags) rief ungefähr dieselbe aktinoelektrische Spannung hervor, wie die oben genannte Flamme in 244 mm Abstand vom Krystalle.

Die aktinoelektrischen Spannungen sind auf den prismatischen Seitenkanten am stärksten; der Verlauf der verschiedenen elektrischen Zonen entspricht im Allgemeinen den oben für die thermoelektrischen angegebenen.

Durch Zwillingsbildung, durch Einlagerung von Stücken eines zweiten um 60° oder 180° gedrehten Individuums wird auf dem ganzen Krystalle die Vertheilung der aktinoelektrischen Spannungen in genau gleicher Weise gestört, wie die der thermoelektrischen, weil jedes Stück die ihm seiner krystallographischen Stellung nach zukommende Polarität beibehält.

Wenn eine heisse Kugel der Kante eines kalten Bergkrystalles genähert oder auf dieselbe aufgelegt wird, so entsteht, wie oben angedeutet, sofort durch die von ihr ausgehende Strahlung eine aktinoelektrische Spannung, welche mit der bei sinkender Temperatur auftretenden thermoelektrischen in ihrem Vorzeichen übereinstimmt. Dieser Vorgang lässt sich umkehren: wird eine kalte Kugel der Kante eines erhitzten Bergkrystalles genähert oder auf dieselbe aufgelegt, so entsteht infolge der Strahlung gegen die kalte Kugel auf dieser Kante eine elektrische Polarität, wie sie daselbst thermoelektrisch beim Erhitzen auftritt. Die Beobachtung dieses Vorganges wird aber sehr erschwert durch die fortwährend sich einmischenden thermoelektrischen Spannungen des seine Temperatur ändernden Bergkrystalles.

In einem heissen Bergkrystalle wirken alle Theilchen strahlend auf die übrigen und rufen infolge dessen aktinoelektrische Schwingungen von entsprechender Geschwindigkeit hervor. Nach aussen hin kann aber diese Aktinoelektricität nur gemischt mit der Thermoelektricität wirksam werden. Unmittelbar nach dem Beginn der Erkaltung eines erhitzten Bergkrystalles wird infolge der isolirenden Eigenschaften desselben die während der Erhitzung erzeugte Elektricität noch stark angehäuft sein; ihr entgegengesetzt ist die bestehende Aktinoelektricität; die Wirkung nach aussen entspricht also der Differenz zwischen der Thermoelektricität und der Aktinoelektricität. Wird nun eine kalte Kugel genähert, so werden sofort die aktinoelektrischen

Schwingungen vermindert; die Kante zeigt also eine Aenderung in ihrer elektrischen Spannung, und zwar eine Zunahme, als ob ihre Temperatur erhöht würde. Ist nach etwas längerer Dauer der Abkühlung die von der Erhitzung herrührende Thermoelektricität durch die infolge des Erkaltens auftretende überwunden, so wirkt nach aussen die Summe der Thermoelektricität und der freilich sehr verringerten Aktinoelektricität. Bei Annäherung einer kalten Kugel wird nun die letztere noch mehr geschwächt; die elektrische Spannung nimmt also ab, wie dies durch eine neue Erhitzung eintreten würde.

Ein sehr eigenthümlicher Vorgang entsteht durch kurzes Ueberstreichen der Kante eines Bergkrystalles mit einer Alkoholflamme. Durch die Annäherung der Flamme wird in dem Krystalle eine starke Aktinoelektricität hervorgerufen; zugleich führt aber die Flamme als Leiter soviel entgegengesetzte Elektricität auf die Kante und deren Umgebung, dass dieselbe, wenn die Strahlung unverändert fortdauerte, nach aussen keine elektrische Wirkung zeigen würde. Sobald nun aber die Flamme zurückgezogen wird, verschwinden auch die aktinoelektrischen Schwingungen im Krystalle; dagegen bleibt infolge der isolirenden Eigenschaft die auf der Oberfläche angehäufte entgegengesetzte Elektricität zurück und kann frei nach aussen hin wirken.

## IV. Piezoelektricität.

Um die durch Druck und Nachlassen des Druckes bei hemimorphen Krystallen entstehende Piezoelektricität nachzuweisen, bedürfen die Krystalle keiner weiteren Zubereitung; ich konnte daher die für die thermo- und aktinoelektrische Prüfung benutzten Bergkrystalle in dem gegebenen Zustande auch für die Untersuchung ihres piezoelektrischen Verhaltens verwenden. Um den ausgeübten Druck genau messen zu können, wurde ein kleiner einarmiger Hebel angewandt; auf seiner unteren Seite war eine durch Hartgummi isolirte Zinnplatte oder Zinnschneide angebracht, welche auf die zu prüfende Stelle der Kante oder Fläche des Krystalles aufgelegt wurde.

Am stärksten tritt bei einfachen Bergkrystallen die Piezoelektricität auf, wenn der Druck in der Richtung einer Nebenaxe vergrössert oder verringert wird, und zwar erscheint auf

denjenigen Seitenkanten des Prismas, welche Rhomben- und Trapezoederflächen tragen, bei Vergrösserung des Druckes negative, bei Verminderung desselben positive Spannung; die anderen drei Kanten, an welche keine Rhomben- und Trapezoederflächen liegen, verhalten sich gerade umgekehrt. Hiernach widerspricht also der Bergkrystall der von den Herren *J.* und *P. Curie* aufgestellten Regel, wonach Druck und Erkaltung, und andererseits Nachlassen des Druckes und Erwärmung stets dieselbe Polarität hervorrufen sollen. Beim Bergkrystalle ist vielmehr die durch Druck erzeugte Polarität mit der bei Erwärmung, und die durch Nachlassen des Druckes erzeugte mit der bei der Erkaltung auftretenden gleichnamig.

Die auftretenden elektrischen Spannungen sind, wie schon von *J.* und *P. Curie* angegeben, den Druckänderungen proportional. Beim Bergkrystalle reicht schon eine Aenderung des Druckes um 1 Gramm aus, um eine noch wahrnehmbare piezoelektrische Spannung zu erzeugen.

Wenn ein Bergkrystall in der Richtung einer Nebenaxe gedrückt wird, so entstehen an den gedrückten Kanten die zuvor angegebenen der Zunahme des Druckes entsprechenden elektrischen Spannungen; dagegen erscheinen an den vier anderen Kanten die dem Nachlassen des Druckes (der Ausdehnung) entsprechenden. Ebenso zeigt sich, wenn ein Bergkrystall in der Richtung einer Zwischenaxe (durch Auflegen der Zinnplatte auf eine prismatische Seitenfläche) zusammengedrückt wird, an den Enden der um 90° von dieser Zwischenaxe abstehenden Nebenaxe die der Ausdehnung zugehörige elektrische Spannung.

Bei zusammengesetzten Bergkrystallen treten infolge der eingeschobenen Stücke eines zweiten um 60° oder 180° gedrehten Individuums bei Aenderungen des Druckes ebenso wie bei der Thermo- und Aktinoelektricität Abweichungen von dem normalen Verhalten ein, weil jedes Stück die ihm zukommende piezoelektrische Beschaffenheit bewahrt.

---

**W. G. Hankel**, *Ueber die thermoelektrischen Eigenschaften des Helvins, Mellits, Pyromorphits, Mimetesits, Phenakits, Pennins, Dioptases, Strontianits, Witherits, Cerussits, Euklases und Titanits* *).

Als ich durch die Untersuchung des Topases erkannt hatte, dass die von *Hauy* ausgesprochene und dann allgemein angenommene Ansicht, wonach nur hemimorphe Krystalle durch Temperaturänderung elektrisch zu werden vermöchten, zu eng sei, dass vielmehr alle Krystalle thermoelektrische Spannungen zeigen müssen, soweit nicht die besondere Beschaffenheit ihrer Substanz ein Auftreten und Anhäufen derselben bis zu messbarer Stärke hindern, war es natürlich, dass ich zunächst diejenigen Mineralien einer genaueren Prüfung unterwarf, welche in zahlreichen, möglichst grossen und vollkommenen Krystallen vorkommen. Der weiteren Ausdehnung meiner Untersuchung stellen sich nun immer grössere Schwierigkeiten dadurch entgegen, dass die Mineralien, deren elektrisches Verhalten noch zu bestimmen ist, häufig nur in sehr unvollkommenen und kleinen Krystallen existiren, die oft wenig zahlreich und schwer zu erlangen sind. Die Wahl der auf ihre thermoelektrischen Eigenschaften zu prüfenden Krystalle muss daher gar wesentlich durch den Umstand geleitet werden, dass gerade von denselben einigermassen brauchbare Individuen zu erlangen sind. Infolge dessen finden sich in der Abhandlung, welche ich heute der Gesellschaft vorlege, Krystalle der verschiedensten Systeme zusammengestellt.

## 1. Reguläres System.

*Helvin.* Der Helvin krystallisirt in Tetraedern, deren Ecken durch kleine Flächen des Gegentetraeders abgestumpft sind, und stellt sonach eine nach den Eckenaxen des Würfels hemi-

*) Vorgetragen in der Sitzung am 14. Nov. 1881.

morphe Form dar. Beim Erkalten*) sind die grossen Tetraederflächen positiv, die durch ihren Durchschnitt gebildeten Kanten, sowie die kleinen Tetraederflächen aber negativ. Die Polaritäten sind also gerade die entgegengesetzten, als bei den tetraedrischen Boracitkrystallen; bei diesen fand ich**) die Flächen des grossen Tetraeders negativ, die auf den Kanten desselben liegenden Würfelflächen nebst den Flächen des kleinen Tetraeders positiv. Beim Helvin sind die grossen Tetraederflächen glänzender als die kleinen; bei den tetraedrischen Boraciten erscheinen umgekehrt die kleinen Flächen glänzender als die grossen. Bei beiden Mineralien herrscht also darin Uebereinstimmung, dass die glänzenderen Flächen positive, die weniger glänzenden aber negative Spannung annehmen.

## 2. Tetragonales System.

*Mellit* (Honigstein). Von Krystallen des tetragonalen Systems habe ich früher***) den Apophyllit und Idokras auf ihr thermoelektrisches Verhalten untersucht. Bei beiden lagen im Allgemeinen an den Enden der Hauptaxe die positiven Pole, wähend die Randkanten und prismatischen Seitenflächen negative Elektricität zeigten. Ebenso verhielt sich ein grosser Mellitkrystall: die Enden der Hauptaxe und die anliegenden Flächenstücke waren positiv, die eine infolge ihrer guten Ausbildung zur Beobachtung geeignete Randkante nebst den anliegenden Flächenstreifen negativ.

## 3. Hexagonales System.

*Pyromorphit* und *Mimetesit*. Die beiden sehr nahe verwandten Mineralien (das erstere vorzugsweise phosphorsaures Bleioxyd und Chlorblei, das zweite arsensaures Bleioxyd und Chlorblei) sind mit dem Apatit (phosphorsaurem Kalk mit Fluorcalcium) isomorph; sie stimmen auch in ihrem elektrischen Verhalten mit der auf dem grössten Theile der Apatite beobachteten

*) Ich führe in dem Folgenden stets nur die beim Erkalten auftretenden elektrischen Spannungen an; die beim Erwärmen erscheinenden sind ihrem Vorzeichen nach gerade die entgegengesetzten.

**) Abh. der K. Sächs. Ges. der Wiss. Bd. VI. S. 453.

***) Abh. der K. Sächs. Ges. der Wiss. Bd. XVIII.

elektrischen Vertheilung überein. Die Enden der Hauptaxe (Endflächen und umliegende Pyramidenflächen) sind positiv, die seitlichen Prismenflächen negativ.

Eine Eigenthümlichkeit zeigt sich bei den Mimetesitkrystallen darin, dass die Prismenflächen mit denen oder in deren Nähe sie aufgewachsen gewesen, nicht negative, sondern positive Spannung besitzen. Sie gleichen darin gewissen gelben und grünen Beryllen*), bei welchen ebenfalls auf einer oder zwei Prismenflächen in mehr oder minder grosser Ausdehnung positive anstatt negativer Polarität auftritt.

*Phenakit.* Die Krystalle des Phenakits gehören zur rhomboedrisch-tetartoedrischen Abtheilung des hexagonalen Systems. Bei einem ziemlich gut ausgebildeten Krystalle von Framont in Lothringen fand sich am Ende der Hauptaxe und auf den umliegenden Rhomboederflächen positive, auf den prismatischen Seitenflächen negative Elektricität. Damit stimmte auch die auf einem Bruchstücke eines vom Ilmengebirge stammenden Krystalles beobachtete elektrische Vertheilung im Allgemeinen überein. Auf grossen Krystallen aus den Smaragdgruben bei Katharinenburg (Ural), die zum Theil noch mit einer dünnen Lage von Glimmerschiefer bedeckt waren, liess sich die Lage der Pole nicht mit Sicherheit bestimmen.

*Pennin.* Die Krystalle des Pennins werden seitlich entweder nur von den Flächen des Hauptrhomboeders $R$, oder auch von den Flächen des Gegenrhomboeders $-R$ begrenzt, und tragen an den Enden der Hauptaxe kleine Flächen $0R$. Da der Pennin in der Richtung der letztgenannten Flächen sehr vollkommen spaltbar ist, so sind die meisten Exemplare an ihren Enden durch diese Durchgänge begrenzt. Während bei den vorhergehenden Mineralien die Enden der Hauptaxe positiv und die seitlichen Flächen negativ waren, sind beim Pennin die Endflächen $0R$ negativ, und die seitlichen Flächen ($+R$, und auch $-R$) positiv. Dabei zeigt sich auch hier wieder die Eigenthümlichkeit, dass einzelne seitliche Flächen nicht positive, sondern negative Polarität annehmen; jedoch lässt sich bei der jetzt vorliegenden Begrenzung der Krystalle nicht erkennen, ob diese Abweichung zu der Stelle, mit welcher der Krystall ursprünglich angewachsen gewesen ist, in Beziehung steht.

---

*) Abh. der K. Sächs. Ges. der Wiss. Bd. XVIII. S. 238,

Welche Polarität auf den am oberen und unteren Ende vorhandenen Durchgangsflächen auftritt, hängt von ihrer Lage zum ganzen Krystalle ab. Liegt ein solcher Durchgang nahe am natürlichen Ende, so ist er noch negativ, wenn auch schwächer als die ausgebildete Endfläche $0R$; je weiter er sich von diesem Ende entfernt, um so mehr nimmt die negative Spannung ab, und geht bei einem gewissen Abstande in die positive über.

*Dioptas.* Nimmt man das Rhomboeder, nach welchem der Dioptas vollkommen spaltbar ist, als Grundrhomboeder $R$, so werden die Krystalle desselben gewöhnlich von den Flächen $\infty P2$ und $-2R$ begrenzt. Zu ihnen treten bisweilen noch Flächen eines Rhomboeders dritter Ordnung hinzu, so dass die Krystalle der rhomboedrisch-tetartoedrischen Abtheilung des hexagonalen Systems angehören. Die Feststellung des thermoelektrischen Verhaltens des Dioptases wird durch den Mangel an ringsum vollkommen ausgebildeten Krystallen erschwert. Die von mir untersuchten bestanden meist aus mehreren, nicht in paralleler Stellung verwachsenen grösseren oder kleineren Individuen. Aus der Gesammtheit aller Beobachtungen ergibt sich jedoch, dass die Enden der Hauptaxe und die umliegenden Rhomboederflächen negativ, die Prismenflächen dagegen positiv sind, wobei indess, ebenso wie beim Pennin, der Fall eintritt, dass einzelne Prismenflächen negativ erscheinen. In welcher Beziehung diese letzteren Flächen zu der ursprünglichen Anwachsungsstelle stehen, liess sich bei der gegenwärtig vorliegenden Begrenzung nicht ermitteln. Eine Bruchfläche am Ende der Hauptaxe, die nicht allzu nahe dem natürlichen Ende gelegen hat, nimmt stets positive Spannung an.

### 4. Rhombisches System.

*Strontianit*, *Witherit* und *Cerussit* (Weissbleierz). Die Krystalle der drei genannten Mineralien sind mit denen des Aragonits isomorph, jedoch stimmt in Betreff der Zwillingsbildung der Strontianit mit dem Aragonit viel mehr überein, als der Witherit und Cerussit.

Die Krystalle des Strontianits gleichen im Allgemeinen den böhmischen Aragoniten, stellen also prismatische von $\infty P$ und $\infty \breve{P} \infty$ gebildete, am oberen Ende Flächen von $P$ und $\breve{P} \infty$ tra-

gende Säulen dar, die aber vielfach Zwillingslamellen (wobei $\infty P$ die Zwillingsfläche) einschliessen. Beim Erkalten treten an den Enden der Hauptaxe und der Brachydiagonale die positiven, an den Enden der Makrodiagonale (also auf den Flächen $\infty \bar{P} \infty$) die negativen Pole auf. Mit diesen böhmischen Aragoniten stimmen nun sowohl in der Gestalt als auch in der elektrischen Vertheilung die Strontianitkrystalle von Drensteinfurt überein.

Während bei dem Aragonite und Strontianite prismatische Formen vorherrschen, bilden die Witherite und Cerussite (von Wolfach in Baden) scheinbare sechsseitige Pyramiden, welche man früher als von den Flächen $P$ und $2\breve{P}\infty$ gebildet annahm. *Sénarmont* hat jedoch durch optische Untersuchung gezeigt, dass die sechsseitige Pyramide des Witherits als ein Sechsling*) aufzufassen ist, so dass sämmtliche Pyramidenflächen von den Flächen $\infty \bar{P} \infty$ gebildet werden. Wären die scheinbaren Pyramiden eine Combination von $P$ und $2\breve{P}\infty$, so müssten an dem Ende der Brachydiagonale positive, und nur auf den an den Enden der Makrodiagonale gelegenen Kanten negative Polarität auftreten. Die Beobachtung ergibt aber nur die Enden der Hauptaxe und die anliegenden Flächenstücke positiv, dagegen sämmtliche Randkanten nebst ihren Umgebungen negativ, was in voller Uebereinstimmung mit der von *Sénarmont* aufgestellten Zusammensetzung ist.

Bei dem Cerussit ist es mir nur gelungen, auf den Krystallen von Wolfach nicht unbeträchtliche elektrische Spannung wahrzunehmen. Diese den Witheriten gleichenden Krystalle zeigen nun positive Elektricität auf den Enden der Hauptaxe; die Mittelkanten und die anliegenden Stücke der Pyramidenflächen sind negativ. Auf einigen Eckpunkten der Basis und einem Theile der Polkanten wird schwache positive, auf anderen gar keine, oder schwache negative Spannung gefunden. Diese Vertheilung ist nur erklärlich, wenn wir diesen Cerussit ebenso wie den Witherit als einen Sechsling auffassen. In den Eckpunkten der Basis und in den Polkanten treten gewissermassen

---

*) In der Abhandlung weise ich nach, dass ein grosser von mir untersuchter Witheritkrystall aus sieben Individuen gebildet ist, weil sonst der auf einer Fläche vorhandene einspringende Winkel mit einer kammförmigen Naht nicht erklärlich wäre.

Durchschnitte der zur Brachydiagonale gehörigen Flächen an die Oberfläche, und bedingen daher an mehreren dieser Stellen positive Polarität.

## 5. Monoklines System.

*Euklas.* Die Krystalle des Euklases sind parallel mit dem klinodiagonalen Hauptschnitte vollkommen spaltbar; sie gleichen in dieser Beziehung also dem Gypse. Mit diesem letzteren Minerale stimmen sie nun auch in ihrem thermoelektrischen Verhalten überein. An den Enden der verticalen Axe und der Klinodiagonale liegen die positiven, an den Enden der Orthodiagonale die negativen Pole. Wird jedoch ein Krystall in der Mitte parallel dem vollkommensten Durchgange zersprengt, so zeigen die Durchgangsflächen, ebenso wie beim Gypse, positive Spannung. Wenn ein Ende der verticalen Axe verbrochen ist, so erscheint auf ihm, wenn die Bruchfläche nicht zu nahe am natürlichen Ende liegt, anstatt der positiven die negative Polarität.

*Titanit.* Gegenüber den im Vorhergehenden behandelten Krystallen sind die Titanite dadurch ausgezeichnet, dass sie in meist vollständig ausgebildeten Exemplaren vorkommen, und dass ausser einfachen Krystallen sich auch sehr häufig Zwillinge finden, bei denen die beiden Individuen entweder nur aneinander oder auch durcheinander gewachsen sind.

Die an einfachen Krystallen sehr gewöhnlich auftretende Combination besteht aus $0P$, $\infty P$, $\bar{P}\infty$ und $\frac{1}{2}\bar{P}\infty$. Meistens sind diese Krystalle nur dünne Tafeln, weil die Flächen $\frac{1}{2}\bar{P}\infty$ sehr ausgedehnt, die Flächen $\infty P$ aber sehr niedrig auftreten. An den Enden der Orthodiagonale finden sich öfter noch die Flächen $\frac{2}{3}\bar{P}2$ und $4\bar{P}4$; bisweilen wachsen die Flächen $4\bar{P}4$ derartig an Grösse, dass die Flächen $\infty P$ fast verschwinden, und der Krystall dann ein schiefliegendes von den Flächen $4\bar{P}4$ gebildetes Prisma darstellt, auf dessen klinodiagonalen Kanten die Flächen $0P$, $\frac{1}{2}\bar{P}\infty$ und $\bar{P}\infty$ liegen.

Die elektrische Vertheilung auf diesen Krystallen ist, wenn sie nach einer Erhitzung bis zu 100° C. erkalten, sehr regelmässig. An den Enden der verticalen Axe und der Orthodiagonale liegen die positiven, an den Enden der Klinodiagonale

die negativen Pole*). Es sind also die Flächen $0P$ positiv, und diese positive Polarität breitet sich je nach den Umständen mehr oder weniger auf die benachbarten Theile der Flächen $\frac{1}{2}\not{P}\infty$ und $\not{P}\infty$ aus; die übrigen Theile der Flächen $\frac{1}{2}\not{P}\infty$ und $\not{P}\infty$ zeigen negative Polarität. Sind die Krystalle sehr dünn und besitzen infolge der grossen Ausdehnung von $\frac{1}{2}\not{P}\infty$ eine rhombische Form, so tritt an den spitzen Enden der Orthodiagonale die positive Spannung nur schwach auf, wird auch wohl durch die auf den Flächen $\frac{1}{2}\not{P}\infty$ vorhandene negative verdeckt. Wenn aber durch das Auftreten der Flächen $4\not{P}4$ an den Enden der Orthodiagonale etwas längere Kanten entstehen, so zeigt sich daselbst starke positive Elektricität.

Ich habe in meinen Untersuchungen über das thermoelektrische Verhalten des Aragonits und des Orthoklases gezeigt, dass durch die Zwillingsbildung die thermoelektrische Vertheilung auf den Krystallen nicht geändert wird. Dies gilt auch im Allgemeinen von den Berührungs- und Durchwachsungszwillingen des Titanits; nur in dem Falle, wo die beiden den Zwilling bildenden Individuen ungleiche Dicke haben, treten bei den Berührungszwillingen eigenthümliche Störungen in der normalen Vertheilung ein.

Schon in meiner Habilitationsschrift (1840) habe ich erwähnt, dass bei den Titanitkrystallen ebenso wie bei den Boraciten in höheren Temperaturen die Pole ihre elektrische Beschaffenheit umkehren. Auf allen Krystallen, bei welchen durch die Flächen $4\not{P}4$ an den Enden der Orthodiagonale etwas längere Kanten gebildet werden, lässt sich die Umkehrung in den auf diesen Kanten gelegenen Polen stets beobachten, und die Temperatur, bei welcher dieser Wechsel in der Polarität eintritt, liegt nahe bei 112° C. Werden also die bezeichneten Titanitkrystalle bis 210° C. erhitzt, so zeigen die Enden der Orthodiagonale beim Beginn der Abkühlung negative Spannung, die ein Maximum erreicht, wieder abnimmt, und schliesslich in die positive übergeht. Während die Umkehrung in den Polen an

*) Bereits in meiner Habilitationsdissertation vom Jahre 1840 habe ich die positiven Pole an den Enden der verticalen Axe und die negativen an den Enden der Klinodiagonale angegeben. Die positiven Pole an den Enden der Orthodiagonale konnte ich bei dem damals angewandten Beobachtungsverfahren nicht wahrnehmen.

den Enden der Orthodiagonale stets deutlich hervortritt, lassen sich die entsprechenden Wechsel in den im klinodiagonalen Hauptschnitte liegenden Polen weniger gut beobachten; oft gelingt dies nur an dem einen oder dem anderen Pole, während die übrigen beim Beginne der Abkühlung unelektrisch erscheinen und später dann die gewöhnliche Polarität zeigen.

---

Druck von Breitkopf & Härtel in Leipzig.

# BERICHTE

ÜBER DIE

# VERHANDLUNGEN

DER KÖNIGLICH SÄCHSISCHEN

# GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN

ZU LEIPZIG.

## MATHEMATISCH-PHYSISCHE CLASSE.

VIERUNDDREISSIGSTER BAND.

1882.

MIT VIER HOLZSCHNITTEN.

LEIPZIG

BEI S. HIRZEL.

# INHALT.

Protector der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften

SEINE MAJESTÄT DER KÖNIG.

---

## Ehrenmitglied.

Seine Excellenz der Staatsminister des Cultus und öffentlichen Unterrichts, Herr *Carl Friedrich von Gerber*.

---

## Ordentliche einheimische Mitglieder der philologisch-historischen Classe.

Herr Geheimer Hofrath *Heinrich Leberecht Fleischer* in Leipzig, Secretär der philol.-histor. Classe.
- —— —— *Friedrich Zarncke* in Leipzig, stellvertretender Secretär der philol.-histor. Classe.
- —— —— *Georg Curtius* in Leipzig.
- Professor *Georg Ebers* in Leipzig.
- —— *Adolf Ebert* in Leipzig.
- —— *Alfred Fleckeisen* in Dresden.
- —— *Gustav Hartenstein* in Jena.
- Hofrath *Max Heinze* in Leipzig.

Herr Geheimer Hofrath und Universitäts-Oberbibliothekar *Christoph Ludolf Ehrenfried Krehl* in Leipzig.
- Geheimer Hofrath *Ludwig Lange* in Leipzig.
- Professor *August Leskien* in Leipzig.
- Professor *Carl von Noorden* in Leipzig.
- Geheimer Hofrath *Johannes Adolph Overbeck* in Leipzig.
- —— —— *Otto Ribbeck* in Leipzig.
- Geheimer Rath *Wilhelm Roscher* in Leipzig.
- Professor *Anton Springer* in Leipzig.
- Geheimer Hofrath *Johann Ernst Otto Stobbe* in Leipzig.
- Professor *Georg Voigt* in Leipzig.
- —— *Moritz Voigt* in Leipzig.

---

## Ordentliche auswärtige Mitglieder der philologisch-historischen Classe.

Herr Professor *Conrad Bursian* in München.
- —— *Johann Gustav Droysen* in Berlin.
- —— *Hermann Alfred von Gutschmid* in Tübingen.
- —— *Theodor Mommsen* in Berlin.
- Geheimer Regierungsrath *Hermann Sauppe* in Göttingen.
- Kirchenrath *Eberhard Schrader* in Berlin.
- Professor *Gustav Seyffarth* in New-York.

---

## Ordentliche einheimische Mitglieder der mathematisch-physischen Classe.

Herr Geheimer Hofrath *Wilhelm Gottlieb Hankel* in Leipzig, Secretär der mathem.-phys. Classe.
- Professor *Wilhelm Scheibner* in Leipzig, stellvertretender Secretär der mathem.-phys. Classe.
- Professor *Christian Wilhelm Braune* in Leipzig.

Herr Oberbergrath *Hermann Credner* in Leipzig.
- Geheimer Rath *Moritz Wilhelm Drobisch* in Leipzig.
- Professor *Gustav Theodor Fechner* in Leipzig.
- —— *Wilhelm His* in Leipzig.
- —— *Felix Klein* in Leipzig.
- —— *Johann August Ludwig Wilhelm Knop* in Leipzig.
- Geheimer Hofrath *Hermann Kolbe* in Leipzig.
- —— —— *Rudolph Leuckart* in Leipzig.
- —— —— *Carl Friedrich Wilhelm Ludwig* in Leipzig.
- Professor *Adolph Mayer* in Leipzig.
- —— *Carl Neumann* in Leipzig.
- Hofrath *August Schenk* in Leipzig.
- Geheimer Hofrath *Oskar Schlömilch* in Dresden.
- Hofrath *Gustav Wiedemann* in Leipzig.
- Professor *Wilhelm Wundt* in Leipzig.
- Professor *Ferdinand Zirkel* in Leipzig.

---

## Ordentliche auswärtige Mitglieder der mathematisch-physischen Classe.

Herr Professor *Heinrich Richard Baltzer* in Giessen.
- Geheimer Hofrath *Carl Gegenbaur* in Heidelberg.
- Professor *Adalbert Krüger* in Kiel.
- Regierungsrath *Samuel Friedrich Nathanael v. Stein* in Prag.
- Geheimer Hofrath *Wilhelm Weber* in Göttingen.

# Verzeichniss

der bei der Königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften im Jahre 1882 eingegangenen Schriften.

---

Von gelehrten Gesellschaften, Universitäten und öffentlichen Behörden herausgegebene und periodische Schriften.

Abhandlungen der Kgl. Akademie d. Wissensch. zu Berlin. Aus d. J. 1880. 1881. Berlin 1881. 82.

Monatsberichte der Kgl. Preuss. Akad. d. Wissensch. zu Berlin. 1881, Nov. Dec. Sitzungsberichte 1882, No. 1—38.

Politische Correspondenz Friedrichs d. Gr. Bd. 7. 8. Berlin 1881. 82.

Denkschriften der Kaiserl. Akad. d. Wissensch. Mathem.-naturwiss. Cl. Bd. 43. 44. Wien 1882.

Denkschriften der Kaiserl. Akad. d. Wissensch. Philos.-histor. Cl. Bd. 32. Wien 1882.

Sitzungsberichte der Kaiserl. Akad. d. Wissensch. Philos.-histor. Cl. Bd. 98 (1881), Heft 3. Bd. 99 (1881), Heft 1. 2. Wien 1881. 82.

Sitzungsberichte der Kaiserl. Akad. d. Wiss. Mathem.-naturwiss. Cl. Bd. 83 (1881), Abth. I, Heft 5. Abth. II, Heft 5. Abth. III, Heft 3—5. Bd. 84 (1881), Abth. I, Heft 1—5. Abth. II, Heft 1—5. Abth. III, Heft 1—5. Bd. 85 (1882), Abth. II, Heft 1. 2. Wien 1881. 82.

Anzeiger der Kaiserl. Akad. d. Wissensch. in Wien. Math.-phys. Cl. Jahrg. 1881, No. 26—28. Jahrg. 1882, No. 1—22.

Archiv für österreich. Geschichte. Herausg. v. der zur Pflege vaterländ. Geschichte aufgestellten Commission der Kaiserl. Akad. d. Wissensch. Bd. 62, 1. Hälfte. Bd. 63, 1. u. 2. Hälfte. Wien 1881. 32.

Verhandlungen der k. k. geologischen Reichsanstalt. Jahrgang 1881, No. 16—18. Jahrg. 1882, No. 1—11.

Jahrbuch d. k. k. geologischen Reichsanstalt. Jahrg. 1881, Bd. 31, No. 4. Jahrg. 1882, Bd. 32, No. 1—3. Wien 1881. 82.

Abhandlungen d. k. k. geologischen Reichsanstalt. Bd. 7, H. 6. Bd. 10. Bd. 12, H. 3. Wien 1882.

Mittheilungen der k. k. geographischen Gesellschaft in Wien. 1881. Bd. 24 (N. F. Bd. 14). Wien 1881.

Verhandlungen der k. k. zoologisch-botanischen Gesellschaft in Wien. Jahrg. 1881. Bd. 31. Wien 1882.

Abhandlungen der k. böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften. 6. Folge. Bd. 10, vom J. 1879 und 1880. Prag 1881.

Jahresbericht der k. böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften, ausgegeben am 10. Mai 1879. 3. Juni 1880. Prag d. J.

Sitzungsberichte der k. böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften in Prag. Jahrg. 1880. Prag 1881.

Astronomische, magnetische und meteorologische Beobachtungen an der k. k. Sternwarte zu Prag im J. 1881. Jahrg. 42. Hrsg. von C. Hornstein. Prag 1882.

Personalstand der k. k. Deutschen Karl-Ferdinands-Universität zu Prag zu Anfang d. Studienj. 1882/83. — Ordnung der Vorlesungen im Wintersem. 1882/83.

Neunzehnter Jahresbericht des Vereins für Geschichte der Deutschen in Böhmen. Für das Vereinsjahr 1880—81. Prag 1881.

Mittheilungen des Vereins für Geschichte der Deutschen in Böhmen. Jahrg. 20, No. 1—4. Prag 1881. 82.

Simon Hüttel's Chronik der Stadt Trautenau (1481—1601). Bearbeitet von L. Schlesinger. Im Auftrage des Vereins für Geschichte der Deutschen in Böhmen. Prag 1881.

Lotos. Jahrbuch für Naturwissenschaft. Im Auftrag des Vereines »Lotos« hrsg. von Ph. Knoll. N. F. Bd. 2 (der ganzen Reihe 30. Bd.). Prag 1882.

Beiträge zur Kunde steiermärkischer Geschichtsquellen. Hrsg. von dem historischen Vereine für Steiermark. Jahrg. 18. Graz 1882.

Mittheilungen des histor. Vereines für Steiermark. H. 30. Graz 1882.

Viestnik Hrvatskoga arkeologičkago Družtva. Godina 4, Br. 1—4. U Zagrebu 1882.

Personalstand u. Ordnung d. öffentl. Vorlesungen an der k. k. Franz-Josefs-Universität zu Czernowitz im Sommer-Sem. 1882, Winter-Sem. 1882/83.

Erdélyi Muzeum. Az Erd. Muzeum egylet tört. szakosztályának közlönye. Szerkesti Fináły Henr. IX. évfolyam (1882), sz. 1—8. Kolozsvárt d. J.

Abhandlungen der histor. Cl. der k. bayer. Akad. d. Wissensch. Bd. 16 (in d. Reihe d. Denkschr. d. LVII. Bd.), Abth. 1. München 1881.

Abhandlungen der philosoph.-philolog. Cl. der k. bayer. Akad. d. Wissensch. Bd. 16 (in d. Reihe d. Denkschriften d. LV. Bd.), Abth. 2. München 1882.

Bauer, Gust., Gedächtnissrede auf Otto Hesse, gehalten in der öffentl. Sitzung der k. bayer. Akad. d. Wissensch. zur Feier ihres 123. Stiftungstages am 28. März 1882. München 1882.

Sitzungsberichte der mathem.-physikal. Cl. der k. bayer. Akad. d. Wiss. zu München. Jahrg. 1882, H. 1—4. München 1882.

Sitzungsberichte der philos.-philol. u. histor. Cl. der k. bayer. Akad. d. Wissensch. zu München. Jahrg. 1881, Bd. 2, H. 3—5. Jahrg. 1882, Bd. 1, H. 1—3. Bd. 2. H. 1. München 1881. 82.

Dreiundzwanzigste Plenarversammlung der histor. Commission bei der k. bayer. Akad. d. Wissensch. Bericht des Secretariats. München 1882.

Catalogus codicum manuscr. Bibliothecae Regiae Monacensis. T. IV, P. 4 (Catalogus codicum lat., T. II, P. 4). Monachii 1881.

Meteorologische und magnetische Beobachtungen der k. Sternwarte bei München. Jahrg. 1881. München 1882.

Abhandlungen der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Bd. 27, aus d. J. 1881. Bd. 28, aus d. J. 1881. Göttingen 1881. 82.

Nachrichten von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften und der Georg-Augusts-Universität aus d. J. 1881. Göttingen 1881.

Jahresbericht des Vereins für Naturwissenschaften zu Braunschweig f. d. Geschäftsjahr 1880—81. Altenburg 1881.

Neues Lausitzisches Magazin. Im Auftrag d. Oberlausitz. Gesellsch. d. Wissensch. herausgeg. von Prof. Dr. Schönwälder. Bd. 57, H. 2. Görlitz 1882.

Zeitschrift des k. sächsischen statistischen Bureaus. Redig. v. V. Böhmert. Jahrg. 27 (1881), H. 1—4. Dresden 1882.

Publikationen der K. Universitäts-Sternwarte zu Leipzig. Heft 1. Redig. v. C. Bruhns. Hrsg. v. H. Bruns. Leipzig 1882.

Vierteljahrsschrift der astronom. Gesellschaft. Jahrg. 16, H. 4. Jahrg. 17, H. 1—4. Leipzig 1881. 82.

Sitzungsberichte der Naturforschenden Gesellschaft zu Leipzig. Jahrg. VIII (1881). Leipzig 1882.

Codex diplomaticus Saxoniae Regiae. Im Auftrag der kgl. Sächs. Staatsregierung herausg. von O. Posse und H. Ermisch. I. Haupttheil, Bd. 1 (Urkunden der Markgrafen von Meissen und Landgrafen von Thüringen 948—1099. Hsg. von O. Posse). Leipzig 1882.

Kgl. Sächsisches Polytechnikum zu Dresden. Ergänzung zum Programm f. d. Studienjahr, bezieh. Wintersemester 1881/82, enthalt. d. Verzeichniss d. Vorlesungen f. d. Sommersem. 1882. — Programm f. d. Studienjahr, bezieh. Wintersemester 1882/83.

Jahresbericht der Gesellschaft für Natur- u. Heilkunde in Dresden. Sitzungsperiode 1881—82. Dresden 1882.

Sitzungsberichte und Abhandlungen der naturwissenschaftl. Gesellschaft Isis in Dresden. Herausg. v. C. Bley. Jahrg. 1881, Juli—Dec. Jahrg. 1882, Jan.—Juni. Dresden 1882.

Jahresbericht der Fürsten- u. Landesschule Meissen vom Juli 1881 — Juli 1882. Meissen 1882.

Bericht über die im Jahr 1881 den Herzogl. Sammlungen des Schlosses Friedenstein zugegangenen Geschenke. Gotha 1882.

Pertsch, Wilh., Die arabischen Handschriften der Herzogl. Bibliothek zu Gotha. Auf Befehl S. H. des Herzogs Ernst II. von Sachsen-Coburg-Gotha verzeichnet. Bd. 4, H. 1. Gotha 1882.

Denkschrift betreffend die Thätigkeit der Kaiserl. Normal-Aichungs-Commission von ihrer Einsetzung im J. 1869 bis zum Frühjahr 1882. Berlin 1882.

Die Fortschritte der Physik im J. 1877. Dargestellt von der physikal. Gesellsch. in Berlin. Jahrg. 33, Abth. 1—3. Berlin 1881. 82.

Berichte der deutschen chemischen Gesellschaft zu Berlin. Jahrg. XIV, No. 19. 20. Jahrg. XV, No. 1—17. Berlin 1881. 82.

Dörpfeld, W., F. Gräber, R. Borrmann, K. Siebold, Über die Verwendung von Terrakotten am Geison und Dache griechischer Bauwerke. 41. Programm zum Winckelmannsfeste der Archaeologischen Gesellschaft zu Berlin. Berlin 1881.

Milchhöfer, Die Befreiung des Prometheus, ein Fund aus Pergamon. 42. Programm zum Winckelmannsfeste der Archaeologischen Gesellschaft zu Berlin. Berlin 1882.

Neunundfünfzigster Jahresbericht der Schlesischen Gesellschaft für vaterländische Cultur. Enthält den Generalbericht über die Arbeiten und Veränderungen der Gesellschaft im J. 1881. Breslau 1882.

Nova Acta Academiae Carolinae Leopoldinae Caesareae German. naturae curiosorum. T. 42. 43. Halis 1881. 82.

Leopoldina. Amtliches Organ der kais.-leopoldinisch-carolinisch-deutschen Akademie der Naturforscher. Heft XVII, No. 23. 24. Heft XVIII, No. 1—22. Halle 1882.

Ergebnisse der Beobachtungsstationen an den deutschen Küsten über die physikalischen Eigenschaften der Ostsee u. Nordsee u. die Fischerei. Jahrg. 1881, Heft 8—12. Berlin 1882.

Vierter Bericht der Commission zur wissenschaftlichen Untersuchung der deutschen Meere in Kiel, für die Jahre 1877—81. Jahrg. VII—XI, Abth. 1. Berlin 1882.

Schriften der physikal.-ökonomischen Gesellschaft zu Königsberg. Jahrg. 21 (1880), Abth. 2. Jahrg. 22 (1881), Abth. 1. 2. Königsberg 1881. 82.

Verhandlungen des Vereins für naturwissenschaftliche Unterhaltung zu Hamburg. 1877. Bd. 4. Hamburg 1879.

Jahresbericht des physikal. Vereins zu Frankfurt a. M. für das Rechnungsjahr 1880—1881. Frankfurt a. M. 1882.

Jahrbücher des Nassauischen Vereins für Naturkunde. Jahrg. 33. 34. Wiesbaden 1880. 81.

Jahrbücher des Vereins von Alterthumsfreunden im Rheinlande. H. 70—72. Bonn 1881. 82.

Sitzungsberichte der physikal.-medicinischen Societät in Erlangen. Heft 13 (Nov. 1880 — Aug. 1881). Erlangen 1881.

Anzeiger für Kunde der deutschen Vorzeit. Organ des Germanischen Museums. N. F. Jahrg. 28. Nürnberg 1881. — 27. Jahresbericht des Germanischen Nationalmuseums.

Alma Julia. Illustrirte Chronik ihrer dritten Säcularfeier. Hrsg. vom Akademischen Comité für Presse u. Drucksachen. Red. von Dr. A. Schäffer. Würzburg 1882 (mit einem Exemplar der zur 3. Säcularfeier geprägten Medaille).

Wegele, Franz X. v., Geschichte der Universität Wirzburg. Im Auftrage des K. Akademischen Senates verfasst. Th. 1. 2. Wirzburg 1882.

Sitzungsberichte der physikal.-medicin. Gesellschaft in Würzburg. Jahrg. 1881. Würzburg d. J.

Verhandlungen der physikal.-medicin. Gesellschaft in Würzburg. N. F. Bd. XVI. Würzburg 1881.

37—39. Jahresbericht der Pollichia, eines naturwissenschaftl. Vereins der Rheinpfalz. Dürkheim a. d. Haardt 1881.

Mehlis, C., Der Grabfund aus der Steinzeit von Kirchheim a. d. Eck in der Rheinpfalz. Beigabe zum 40. Jahresbericht der Pollichia. Dürkheim u. Kaiserslautern 1881.

Württembergische Vierteljahrshefte für Landesgeschichte. Herausg. von d. Kgl. Statist.-topogr. Bureau. Jahrg. 4 (1881), H. 1—4. Stuttgart 1881.

Verhandlungen des naturhistor.-medicin. Vereins zu Heidelberg. N. F. Bd. 3, H. 1. Heidelberg 1881.

Verhandlungen der Schweizerischen naturforschenden Gesellschaft in Aarau d. 7—10. Aug. 1881 (64. Jahresversammlung). Jahresbericht 1880/81. Aarau 1881.

Archives des sciences physiques et naturelles, Sept. 1881 : Compte-rendu des travaux présentés à la 64 session de la Société Helvétique des sciences naturelles réunie à Aarau les 8—10. août 1881. Genève 1881.

Neue Denkschriften der allgemeinen Schweiz. Gesellschaft f. die gesammten Naturwissenschaften. Bd. 28, Abth. 2. Basel 1882.

Beiträge zur vaterländischen Geschichte. Herausg. von der Historischen und Antiquarischen Gesellschaft in Basel. N. F. Bd. 1 (der ganzen Reihe 11. Bd.). Basel 1882.

Verhandlungen der naturforschenden Gesellschaft in Basel. Th. 7, H. 1. Basel 1882.

Mittheilungen der naturforschenden Gesellschaft in Bern aus d. J. 1881, H. 2. (No. 1018—29). Bern 1882.

Jahresbericht d. naturforschenden Gesellschaft Graubündens. Jahrg. 25. Vereinsjahr 1880/81. Chur 1882.

Mémoires de la Société de physique et d'histoire naturelle de Genève. T. XXVII, P. 2. Genève 1881.

Verhandelingen d. Kon. Akad. v. Wetenschappen. Afdeel. Natuurkunde. Deel XXI. Amsterdam 1881.

Verslagen en Mededeelingen der Kon. Akad. v. Wetensch. Afdeel. Letterkunde. II. Reeks, Deel 10. Amsterdam 1881. — Afdeel. Natuurkunde. II. Reeks, Deel 16. Amsterdam 1881.

Jaarboek van de Kon. Akad. v. Wetensch. gevestigd te Amsterdam, voor 1880. Amsterdam 1880.

Processen-verbaal van de gewone Vergaderingen d. Kon. Akad. v. Wetensch. te Amsterdam. Afdeel. Natuurkunde. Mei 1880—April 1881.

Programma certaminis poetici ab Academia Regia disciplinarum Neerlandica ex legato Hoeufftiano indicti in annum 1883.

Leeuwen, Joh. van, Ad Bacchum. Elegia praemio ornata in certamine poetico Hoeufftiano. Sequuntur duo carmina laudata. Amstelod. 1881.

Catalogus van de Boekerij d. Kon. Akad. v. Wetensch. Deel 3, St. 2. Amsterd. 1881.

Publications de la Commission géodésique Néerlandaise. I. Oudemans, J. A. C., Détermination, à Utrecht, de l'azimut d'Amersfoort. La Haye 1881.

Nederlandsch kruidkundig Archief. Verslagen en Mededeelingen der Nederlandsche botanische Vereeniging. Ser. II, Deel 3, St. 4. Nijmegen 1882.

Aanteekeningen van het verhandelde in de sectië-vergaderingen van het Provinc. Utrechtsche Genootsch. v. kunsten en wet., ter gelegenheid van de algem. vergadering gehouden d. 29. Juni 1880. d. 21. Juni 1881. Utrecht d. J.

Verslag van het verhandelde in de algem. vergaderingen van het Provinc. Utrechtsche Genootsch. v. kunsten en wet., gehouden d. 21. Juni 1881. Utrecht 1881.

Questions mises au concours par la Société des arts et des sciences établie à Utrecht, 1882.

Leeuwen, J. van, Commentatio de Ajacis Sophoclei authentia et integritate. Edid. Soc. artium disciplinarumque Rheno-Trajectina. Traj. ad Rh. 1881.

Gebhard, J. F., Het leven van Mr. Nic. Corn. Witsen. Deel I. II. m. Geslachtlijst. Prijsverhandeling uitgeg. door het Provinc. Utrechtsche Genootsch. v. kunsten en wet. Utrecht 1881. 82.

Van der Horn van den Bos, H. P. M., De nederlandsche Scheikundigen van het laatst der vorige eeuw. Prijsvrag uitgeschreven door het Provinc. Utrechtsche Genootsch. v. kunsten en wet., en met eervolle vermelding bekroond. Utrecht 1881.

Riemsdijk, Th. H. F., Geschiedenis van de kerspelkerk van St. Jacob te Utrecht. Uitgeg. met ondersteuning van het Provinc. Utrechtsch Genootsch. v. kunsten en wet. Leiden 1882.

Nederlandsch meteorologisch Jaarboek voor 1876 (Jaarg. XXVIII), Deel 2. 1878 (Jaarg. XXX), Deel 1. 1879 (Jaarg. XXXI), Deel 1. 1880 (Jaarg. XXXII), Deel 1. 1881 (Jaarg. XXXIII). Utrecht 1879—82.

Onderzoekingen gedaan in het Physiol. Laboratorium d. Utrechtsche Hoogeschool. Uitg. door F. C. Donders en Th. W. Engelmann. 3. Reeks. VII, Afl. 1. 2. Utrecht 1882.

Archives néerlandaises des sciences exactes et naturelles, publiées par la Société Hollandaise des sciences à Harlem. T. 16, Livr. 3—5. T. 17, Livr. 1. 2. Harlem 1881. 82.

Programma van de Hollandsche Maatschappij der wetensch. te Haarlem voor het jaar 1881. — Naamlijst van directeuren en leden van de Holl. Maatsch. d. wetensch. te Haarlem, 21. mei 1881.

Natuurkundige Verhandelingen van de Hollandsche Maatschappij der wetensch. te Haarlem. III. Verzameling. Deel 4, St. 2. Haarlem 1881.

Archives du Musée Teyler. Sér. II, P. 2. Harlem 1881.

Van der Ven, E., Origine et but de la Fondation Teyler et de son cabinet de physique, à l'occasion de l'exposition internationale d'électricité. Harlem (1881).

Verhandelingen rakende den natuurlijken en geopenbarden godsdienst, uitgeg. door Teylers Godgeleerd Genootschap. N. Ser. Deel 10, St. 1. 2. Haarlem 1882.

Handelingen en Mededeelingen van de Maatschappij der Nederlandsche Letterkunde te Leiden over het jaar 1881. Leiden 1881.

Levensberigten der afgestorvene medeleden van de Maatschappij der Nederlandsche Letterkunde te Leiden. Bijlage tot de Handelingen van 1881. Leiden 1881.

Alphabetische Lijst der leden van de Maatschappij der Nederlandsche Letterkunde te Leiden, opgemaakt in November 1881.

Annales de la Société entomologique de Belgique. T. 25. Bruxelles 1881.

Extrait des Comptes-rendus de la Société entomologique de Belgique. Séance du 6. nov., 4. déc. 1880; 8. janv., 5. févr., 5. mars, 7. mai 1881.

Bullettino dell' Instituto di corrispondenza archeologica per l'anno 1881, No. 12 (und Elenco de' participanti alla fine dell' anno 1881). 1882, No. 1—10. Roma 1882.

Atti della R. Accademia de' Lincei. Anno CCLXXVIII (1880—81). Ser. III. Memorie della classe di scienze fisiche, matem. e naturali, Vol. 9. 10. Roma 1881. Memorie della classe di scienze morali, storiche e filologiche, Vol. 7. 9. Roma 1881. — Transunti. Ser. III. Vol. 6, Fasc. 3—14. Roma 1881. 82.

Memorie del R. Istituto Lombardo di scienze e lettere. Classe di lettere e scienze morali e politiche. Vol. 14 (Ser. III, Vol. 5), Fasc. 2. Milano 1881.

Reale Istituto Lombardo di scienze e lettere. Rendiconti. Ser. II. Vol. 13. Milano 1880.

Atti della R. Accademia delle scienze di Torino. Vol. XVII, Disp. 1—7. Torino 1881. 82.

Bollettino meteorologico ed astronomico dell' Osservatorio della Reg. Università di Torino. Anno XVI (1881), Parte meteorologica. Torino 1882.

Processi verbali della Società Toscana di scienze naturali residente in Pisa. Vol. 3. Adunanza del 13. Nov. 1881, 8. Genn., 12. Marzo, 7. Maggio, 2. Luglio 1882.

Temi di premio proposti dal R. Istituto Veneto di scienze, lettere ed arti nella solenne adunanza del 15. Agosto 1882.

Memorie della R. Accademia di scienze, lettere ed arti in Modena. T. 20, P. 1. 2. Modena 1880. 81.

Philosophical Transactions of the R. Society of London. For the year 1881. Vol. 172, P. 2. 3. — For the year 1882. Vol. 173, P. 1. London 1881. 82.

Proceedings of the R. Society of London. Vol. XXXII, No. 214. 15. Vol. XXXIII, No. 216—20. London 1881. 82.

Catalogue of the scientific books in the library of the R. Society. Transactions, Journals, Observations and Reports, Surveys, Museums. London 1881.

Proceedings of the London Mathematical Society. Vol. 12, No. 178—183. 189—192. London 1881. 82.

Journal of the R. Microscopical Society, containing its Transactions and Proceedings. Ser. II. Vol. 2, P. 1—5. London 1882.

Memoirs of the R. Astronomical Society. Vol. 46 (1880/81). London 1881.

Catalogue of Oriental coins in the British Museum. Vol. 7. London 1882.

Proceedings of the R. Society of Edinburgh. Vol. XI, No. 108 (Session 1880—81). Edinburgh 1881.

Transactions of the R. Society of Edinburgh. Vol. XXX, P. 1. For the session 1880—81. Edinburgh 1881.

Proceedings of the R. Irish Academy. Ser. II. Vol. 2 (Polite literature and antiquities), No. 3. Dublin 1881. Vol. 3 (Science), No. 7. 8. Dublin 1881. 82.

The Transactions of the R. Irish Academy. Vol. 28 (Science), P. 6—10. Dublin 1881. 82.

The scientific Proceedings of the R. Dublin Society. N. Ser. Vol. 2, P. 7. Vol. 3, P. 1—4. Dublin 1880. 81.

The scientific Transactions of the R. Dublin Society. N. Ser. Vol. 1, No. 13. 14. Dublin 1880. 81.

Journal de l'École polytechnique, publ. p. le Conseil d'instruction de cet établissement. Cah. 49. T. 30. Paris 1881.

Bulletin de la Société mathématique de France. T. 1—9. 10, No. 1—6. Paris 1873—82.

Comité international des poids et mesures. Procès-verbaux des séances de 1881. Paris 1882.

Annales de la Société Linnéenne de Lyon. N. Sér. T. 28 (1881). Paris, Lyon 1882.

Mémoires de l'Académie des sciences, belles-lettres et arts de Lyon. Classe des lettres, T. 20. Classe des sciences, T. 25. Paris, Lyon 1881—82.

Académie des sciences, belles-lettres et arts de Lyon. Table des matières contenues dans les Mémoires publiés de 1845 à 1881, par Saint-Lager. Lyon 1882.

Discursos leidos ante la R. Academia de ciencias morales y políticas en la recepcion pública de Fermín de Lasala y Collado 1882. Vizconde de Campo-Grande 1882. Madrid 1882.

R. Academia de ciencias morales y políticas. Año de 1882. Madrid d. J.

Memorias premiadas por la R. Academia de ciencias morales y políticas: Ferran, J. M. de, Cartas a un arrepentido de la Internacional. I. Las huelgas de trabajadores, las associaciones de obreros y las cajas de ahorros. II. El comunismo, el derecho al trabajo, la libertad del trabajo (Concurso de 1875). Madrid 1882. Ventosa, R., Las huelgas de trabajadores, las associaciones etc. Ders., El comunismo, el derecho al trabajo etc. (Concurso de 1875). Madrid 1882. Molina, R., La instruccion primaria (Conc. de 1878). Madrid 1881. Monroy y Belmonte, R., La primera enseñanza obligatoria y gratuita (Conc. de 1878). Madrid 1882.

Añales del Instituto y Observatorio de marina de San Fernando, publ. por C. Pujazon. Seccion II. Observaciones meteorológicas. Año 1879. 81. San Fernando 1880. 82.

Oversigt over det Kong. Danske Videnskabernes Selskabs Forhandlinger i aaret 1881, No. 3. 1882, No. 1. 2.

Det Kong. Danske Videnskabernes Selskabs Skrifter. Naturvid. og mathemat. Afd. 6. Række. Bd. I, No. 5—8. II, No. 3. Kjøbenhavn 1881. 82.

Regesta diplomatica historiae Danicae. Cura Societatis Reg. scientiarum Danicae. T. I. II, P. 1. 2. Havniae 1847—70. Ser. II, T. I, P. 1. 2. Havniae 1880. 82.

Kong Frederik I. danske Registranter, udg. ved Kr. Erslev og W. Mollerup af Selskabet for udgivelse af kilder til dansk historie. Halvbind 1. 2. Kjøbenhavn 1878. 79.

Danske Kancellirregistranter 1535—50, udg. ved Kr. Erslev og W. Mollerup af Selskabet for udgivelse af kilder til dansk historie. Halvbind 1. 2. Kjøbenhavn 1881. 82.

Kongl. Vitterhets Historie och Antiquitets Akademiens Månadsblad. Årg. 1(1872)—10(1881). Stockholm 1872—82.

Antiquarisk Tidskrift för Sverige, utg. of Kongl. Vitterhets Historie och Antiquitets Akademien genom Bror Emil Hildebrand. Delen I—III, H. 1—4. IV, 1—4. V, 1—3. VI, 1. 2. 4. Stockholm 1864—81.

Hildebrand, Bror Emil, Sveriges och Svenska Konungahusets Minnespenningar Praktmynt och Belöningsmedaljer. Delen 1. 2. Stockholm 1874. 75.

Ders., Minnespenningar öfver enskilda Svenska män och quinnor. Stockholm 1860.

Ders., Svenska Sigiller från medeltiden. Häftet 1. 2. Stockholm 1862. 67.

Ders. u. Hans Hildebrand, Teckningar ur Svenska Statens historiska Museum. Häftet 1. 2. Stockholm 1873. 78.

Entomologisk Tidskrift, på föranstaltende af Entomologiska Föreningen i Stockholm utg. af Jac. Spångberg. Årg. II, Häft. 3. 4. III, 1—3. Stockholm 1881. 82.

Observations météorologiques faites par l'expédition de la Vega du Cap Nord à Yokohama par le détroit de Behring, réduites p. H. Hildebrand Hildebrandsson (Extrait des »Vega-Expeditionens vetenskapliga Iakttagelser«, Vol. 1). Stockholm 1882.

Nova Acta Reg. Societatis scientiarum Upsaliensis. Ser. III. Vol. X, Fasc. 1. Upsaliae 1881.

Bulletin mensuel météorologique de l'Observatoire de l'Université d'Upsal. Vol. 13 (1881). Upsal 1881. 82.

Publication der Norwegischen Commission der Europäischen Gradmessung. Geodätische Arbeiten. Heft 1—3. Christiania 1880. 82.

Vandstandsobservationer. Udgivet af den Norske Gradmaalingskommission. Hefte 1. Christiania 1882.

Den Norske Nordhavs-Expedition 1876—78. IV. 1. Historisk Beretning, 2. Apparaterne og deres brug, af C. Wille. V. 1. Mohn, H., Astronomiske Observationer. 2. Wille, C., Magnetiske Observationer. 3. Mohn, H., Geografi og naturhistorie. VI. Zoologi: Danielssen, D. C., og Joh. Koren, Holothuriodea. VII. Zoologi: Hansen, G. Armauer, Annelida. Christiania 1882.

Mémoires de l'Académie Impériale des sciences de St.-Pétersbourg. VII. Série. T. XXVIII, No. 8. 9. T. XXIX, No. 1—4. T. XXX, No. 1—8. St.-Pétersbourg 1881. 82.

Bulletin de l'Acad. Impér. des sciences de St.-Pétersbourg. T. XXVII, No. 4. XXVIII, No. 1. 2. St.-Pétersbourg 1881. 82.

Tableau général méthodique et alphabétique des matières contenues dans les publications de l'Académie Impériale des sciences de St.-Pétersbourg. Supplément I, contenant les publications en langues étrangères depuis 1871 jusqu' au 1. nov. 1881. St.-Pétersbourg 1882.

Compte-rendu de la Commission Impériale Archéologique pour l' année 1880. Avec un Atlas. St.-Pétersbourg 1882.

Acta horti Petropolitani. T. VII, Fasc. 2. St.-Petersburg 1881.

Annalen d. physikalischen Centralobservatoriums, herausg. von H. Wild. Jahrg. 1880, Th. 1. 2. Jahrg. 1881, Th. 1. St.-Petersburg 1881. 82.

Jahresbericht am 19. Mai 1882 dem Comité der Nicolai-Hauptsternwarte abgestattet vom Director der Sternwarte. Aus d. Russ. übersetzt. St.-Petersburg 1882.

Auwers, Arth., Neue Reduction der Bradley'schen Beobachtungen aus d. J. 1750—62. Bd. 2, die Reduction der einzelnen Beobachtungen am Passagen-Instrument u. am neuen Quadranten enthaltend. St.-Petersburg 1882.

Annales de l'Observatoire de Moscou. Vol. VII, Livr. 1. 2. Moscou 1882.

Bulletin de la Société Impér. des Naturalistes de Moscou. Année 1881, No. 2—4. 1882, No. 1. Moscou 1881. 82. — Table générale et systématique des matières contenues dans les premiers 56 volumes (années 1829—81), dressée p. E. Ballion. Moscou 1882.

Nouveaux Mémoires de la Société Impér. des Naturalistes de Moscou. T. XIV (= T. XX de la collection), Livr. 2. Moscou 1881.

Observations de Poulkova, p. p. O. Struve. Vol. XIII. Observations faites au cercle vertical. St.-Pétersbourg 1881.

Correspondenzblatt des Naturforscher-Vereins zu Riga. Jahrg. 24. Riga 1881.

Öfversigt af Finska Vetenskaps-Societetens Förhandlingar. XXIII (1880—81). Helsingfors 1881.

Observations météorologiques publ. p. la Société des sciences de Finlande. Vol. 7 (année 1879). Helsingfors 1882.

Bidrag till kännedom af Finlands natur och folk, utg. af Finska Vetenskaps-Societetet. Häftet 35. 36. Helsingfors 1881.

Katalog öfver Finska Vetenskaps-Societetens Bibliothek. År 1881. Helsingfors 1881.

Proceedings of the American Philosophical Society, held at Philadelphia, for promoting useful knowledge. Vol. XIX, No. 109. Philadelphia 1882.

Journal of the American Oriental Society. Vol. XI, No. 1. New Haven 1882.

Proceedings of the American Oriental Society at New Haven, Oct. 1881; at Boston, May 1882.

Proceedings of the 14th annual session of the American Philological Association held in Cambridge, Mass., July 1882. Cambridge 1882.

American Journal of Mathematics pure and applied. Publ. under the auspices of the Johns Hopkins University. Vol. IV, No. 2—4. Vol. V, No. 1. Baltimore 1881. 82.

Seventh annual Report of the President of the Johns Hopkins University. Baltimore 1882.

Johns Hopkins University Circulars. No. 13. 15. 17. 19. Baltimore 1882.

Memoirs of the American Academy of arts and sciences. Vol. XI (Centennial Volume), P. 1. Cambridge 1882.

Proceedings of the Boston Society of Natural History. Vol. XX, P. 4. Vol. XXI, P. 1. Boston 1881.

Bulletin of the Buffalo Society of Natural Sciences. Vol. IV, No. 2. Buffalo 1882.

Bulletin of the Museum of comparative Zoölogy, at Harvard College, Cambridge, Mass. Vol. VI, No. 12. Vol. IX, No. 1—8. Vol. X, No. 1. Cambridge 1881. 82.

Memoirs of the Museum of comparative Zoölogy, at Harvard College, Cambridge, Mass. Vol. VII, No. 2, P. 2. Cambridge 1882.

Statement of work done at the Harvard College Observatory during the years 1877—82. By Edw. C. Pickering. Cambridge 1882.

Pickering, Edw. C., A Plan for securing observations of the variable stars. Cambridge Mass. 1882.

Jahresbericht des naturhistorischen Vereins von Wisconsin für d. J. 1881/82. Milwaukee 1882.

Transactions of the Connecticut Academy of arts and sciences. Vol. IV, P. 2. Vol. V, P. 2. New Haven 1882.

Report for the year 1881/82 of H. A. Newton, Director, to the board of managers of the Observatory in Yale College; to which is appended the Report of the astronomer in charge of the horological and thermometric bureaus (New Haven 1882).

Annals of the New York Academy of science (late Lyceum of natural history). Vol. I, No. 14. Vol. II, No. 1—6. New York 1879—81.

Bulletin of the American Geographical Society. 1881, No. 2—5. 1882, No. 1. New York 1881. 82.

Journal of the American Geographical Society. Vol. XI (1879). XII (1880). New York.

Proceedings of the Academy of natural sciences of Philadelphia. 1881, P. 1—3. Philadelphia 1881.

Bulletin of the U. S. geological and geographical Survey of the Territories. Vol. VI, No. 3. Washington 1882.

Astronomical and meteorological Observations made during the year 1876 at the U. S. Naval Observatory, P. 1. 2 (Washington Astronomical and meteorological Observations Vol. 23); during the year 1877 (Washington Astron. and met. Observ. Vol. 24). Washington 1880. 81.

Report of the Superintendent of the U. S. Coast Survey, showing the progress of the work during the fiscal year ending with June 1878. Washington 1881.

Engineer Department, U. S. Army. Report upon U. S. Geographical Surveys west of the 100th meridian, in charge of Geo. M. Wheeler. Vol. 7. Archaeology. Washington 1879.

Report of the Commissioner of agriculture for the year 1880. Washington 1881.

United States of America. War Department. Professional Papers of the Signal Service. No. 1—7. Washington 1881. 82.

Annual Report of the Chief Signal-Officer to the Secretary of war for the year 1879. Washington 1880.

Annual Report of the Board of Regents of the Smithsonian Institution for the year 1880. Washington 1881.

Smithsonian Miscellaneous Collections. 469. List of foreign Correspondents of the Smithsonian Institution, corrected to January 1882. Washington 1882.

First annual Report of the Bureau of Ethnology to the Secretary of the Smithsonian Institution. 1879/80. By J. W. Powell. Washington 1881.

Poore, Ben. Perley, Congressional Directory, compiled for the use of Congress. Fortyseventh Congress (First Session). 2d ed. Washington 1882.

Instructions for observing the transit of Venus, Dec. 6, 1882, prepared by the commission authorized by Congress, and printed for the use of observing parties by authority of the hon. Secretary of the Navy. Washington 1882.

Bulletin astronomique et météorologique de l'Observatoire Impér. de Rio de Janeiro. 1881, No. 3—6. 1882, No. 1. 2. 4—7. 9. Rio de Janeiro 1881. 82.

Dobson, G. E., Monograph of the Asiatic Chiroptera and Catalogue of the species of bats in the collection of the Indian Museum, Calcutta. London 1876.

Nevill, Geoffrey, Catalogue of Mollusca in the Indian Museum, Calcutta. Fasciculus E. Calcutta 1877.

Nevill, Geoffrey, Hand List of Mollusca in the Indian Museum. P. I. Gastropoda. Pulmonata and Prosobranchia-Neurobranchia. Calcutta 1878.

Anderson, John, Catalogue of Mammalia in the Indian Museum, Calcutta. P. I. Primates, Prosimiae, Chiroptera, and Insectivora. Calcutta 1881.

Verhandelingen van het Bataviaasch Genootschap van kunsten en wetenschappen. Deel 41, Stuk 3. Deel 42, 1. Deel 43. Batavia 1881. 82.

Notulen van de algemeene en bestuurs-vergaderingen van het Bataviaasch Genootschap van kunsten en wetenschappen. Deel 19 (1881), No. 2—4. Batavia 1881. 82.

Observations made at the Magnetical and meteorological Observatory at Batavia. Publ. by order of the Government of Netherlands India. Vol. 4 (Meteorological Observations from Jan. 1876 to Dec. 31th 1878). Vol. 5, P. 1—6. Batavia 1881. 82.

Tijdschrift voor Indische taal-, land- en volkenkunde, uitgeg. door het Bataviaasch Genootsch. van kunsten en wetenschappen. Deel 27, Afl. 1—5. Batavia 1881. 82.

Realia. Register op de generale Resolutiën van het Kasteel Batavia. 1632—1805. Uitgeg. door het Bataviaasch Genootschap van kunsten en wetenschappen. Deel 1. Leiden 1882.

Holle, K. F., Tabel van oud- en nieuw-indische alphabetten. Bijdrage tot de palaeographie van Nederlandsch-Indië. Uitgeg. door het Bataviaasch Genootschap van kunsten en wetenschappen. Batavia, 's Hage 1882.

Transactions and Proceedings of the R. Society of Victoria. Vol. 18. Melbourne 1882.

---

## Einzelne Schriften.

Stanley, W. Ford, Experimental Researches into the properties and motions of fluids. With theoretical deductions therefrom. London 1881.

Ageno, Luigi, e Torqu. Beisso, Del sistema commissurale centrale dell' encefalo umano. Genova 1881.

Perels, Meine Krankheitsgeschichte. Aus d. Tagebuche eines Irren. Volksausgabe. 7. Aufl. Frankfurt a. M. 1882.

In memoriam Dominici Chelini. Collectanea mathematica, nunc primum edita cura et studio L. Cremona et E. Beltrami. Mediolani 1881.

Scheffler, Herm., Das Wesen der Elektrizität, des Galvanismus u. Magnetismus. 2. Suppl. zum 2. Th. der »Naturgesetze«. Leipzig 1882.

Lanfranconi, Enea, Rettung Ungarns vor Überschwemmungen. M. 2 Karten. Budapest 1882.

Ders., Über die Wasserstrassen Mittel-Europas u. die Wichtigkeit der Regulirung des Donaustroms, mit besond. Berücksichtigung der Strecke zwischen Theben-Göngö. Presburg 1880.

Loomis, Elias, Mémoires de météorologie dynamique, exposé des résultats de la discussion des cartes du temps des États-Unis ainsi que d'autres documents. Trad. p. H. Brochard (Actualités scientifiques p. p. l'abbé Moigno. II. Série, No. 50). Paris 1880.

Blasius, W., u. A. Nehrkorn, Beiträge z. Kenntniss der Vogelfauna von Borneo (nach den Sammlungen des Dr. Platen). (Sep.-A.) Braunschweig 1881.

Blasius, W., Neuer Beitrag z. Kenntniss der Vogelfauna von Borneo (nach den Sammlungen des Dr. Platen). (Sep.-A.) Braunschweig 1882.

Blasius, W., u. A. Nehrkorn, Dr. Platens ornithologische Sammlungen aus Amboina. (Sep.-A.) Wien 1882.

Blasius, W., Spermophilus rufescens Keys. et Blas. (der Orenburger Ziesel) fossil in Deutschland. (Sep.-A.) 1882.

Elb, O., Über Gebäudestatistik. Dresden 1882.

Berlanga, Em. Rod. de, Hispaniae anteromanae Syntagma. Malacae 1881.

Prušik, Fr., Přispěvky k nauce o tvoření k kmenův ve slovanštině a zvláště v češtině. v Praze 1878.

Ders., O comparativě v slovanštině (Sep.-A.). Raudnitz.

Wernicke, Herm., Der ewige Grund oder die ungeschaffene Kraft des Leeren. Philadelphia 1882.

Willems, P., Le Sénat de la république romaine. T. II. Les attributions du Sénat. Louvain 1883.

Zecchini, S. P., L'azione fatale dell' uomo sulla terra. Torino 1882.

Ders., Di due probabili errori di amanuense nel Pater noster, e proposta di correzione. Torino o. J.

Fiedler, W., Cyklographie oder Construction der Aufgaben über Kreise und Kugeln u. s. w. Leipzig 1882.

**O. Schlömilch,** *Ueber Reihenentwickelungen für gewisse hyperelliptische Integrale*)*.

Bekanntlich hat *Legendre* die vollständigen elliptischen Integrale $F^1(k)$ und $E^1(k)$ in Reihen entwickelt, die nach Potenzen des complementären Modulus $k'$ fortschreiten, also in dem Falle einen Vortheil gewähren, wo $k$ wenig kleiner als die Einheit ist. Die von *Legendre* gegebene Herleitung kommt darauf hinaus, die beiden Differentialgleichungen

$$(1-k^2)\frac{d^2F^1}{dk^2}+\frac{1-3k^2}{k}\cdot\frac{dF^1}{dk}-F^1=0,$$
$$(1-k^2)\frac{d^2E^1}{dk^2}+\frac{1-k^2}{k}\cdot\frac{dE^1}{dk}+E^1=0$$

durch unendliche Reihen mit unbestimmten Coefficienten zu integriren; sie ist daher schon an sich nicht ganz einwurfsfrei und würde sich überdies auf andere als elliptische Integrale nicht ohne Weiteres anwenden lassen. Vielleicht erscheint deshalb der Nachweis nicht ganz überflüssig, dass das allgemeinere Integral

$$\int_0^1\frac{dx}{(1-x^2)^\mu(1-k^2x^2)^{1-\mu}},\qquad 0<\mu<1,$$

mit geringem Rechnungsaufwande nach Potenzen von $k'$ entwickelt werden kann.

Wenn in dem Doppelintegrale

$$\int_0^1\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{\tan^{1-2\mu}\vartheta\,.\,dx\,d\vartheta}{(1-x^2)\cos^2\vartheta+(1-k^2x^2)\sin^2\vartheta}$$

das eine Mal unter Anwendung der bekannten Formel

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{\cos^{2p-1}\vartheta\sin^{2q-1}\vartheta}{(a\cos^2\vartheta+b\sin^2\vartheta)^{p+q}}\,d\vartheta=\frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{2\,\Gamma(p+q)}\cdot\frac{1}{a^p\,b^q}\qquad(1$$

nach $\vartheta$, das andere Mal nach $x$ integrirt wird, so entsteht die Gleichung

*) Vorgetragen in der Sitzung am 30. Januar 1882.

$$\frac{\pi}{\sin\mu\pi}\int_0^1 \frac{dx}{(1-x^2)^{\mu}(1-k^2x^2)^{1-\mu}}$$
$$=\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{\tan^{1-2\mu}\vartheta}{\sqrt{1-k'^2\sin^2\vartheta}}\, l\left(\frac{1+\sqrt{1-k'^2\sin^2\vartheta}}{1-\sqrt{1-k'^2\sin^2\vartheta}}\right)d\vartheta;$$

die rechte Seite kann in der Form

$$2\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{\tan^{1-2\mu}\vartheta}{\sqrt{1-k'^2\sin^2\vartheta}}\left\{l\left(\frac{2}{k'}\right)+l\left(\frac{1}{\sin\vartheta}\right)-l\left(\frac{2}{1+\sqrt{1-k'^2\sin^2\vartheta}}\right)\right\}d\vartheta$$

dargestellt werden, und somit ist

$$\frac{\pi}{\sin\mu\pi}\int_0^1\frac{dx}{(1-x^2)^{\mu}(1-k^2x^2)^{1-\mu}}=2(P+Q-R), \tag{2}$$

wo $P$, $Q$, $R$ selbstverständliche Abkürzungen bedeuten.

Der Werth von $P$ findet sich durch Entwickelung von $(1-k'^2\sin^2\vartheta)^{-\frac{1}{2}}$ und Integration der einzelnen Terme nach Nr. 1; er ist

$$P=l\left(\frac{2}{k'}\right)\cdot\frac{\pi}{2\sin\mu\pi}\sum\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots(2n)}(n-\mu)_n k'^{2n}. \tag{3}$$

Das Summenzeichen bezieht sich hier auf die Werthe $n=0, 1, 2, 3$, etc.; $(n-\mu)_n$ bezeichnet den $n$-ten Binomialcoefficienten für den Exponenten $n-\mu$.

Die zur analogen Entwickelung von $Q$ erforderliche Formel erhält man aus Nr. 1 für $a=b=1$ und durch partielle Differentiation nach $q$, nämlich

$$2\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\cos^{2p-1}\vartheta\sin^{2q-1}\vartheta\, l\sin\vartheta\, d\vartheta=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{2\Gamma(p+q)}\left\{\frac{\Gamma'(q)}{\Gamma(q)}-\frac{\Gamma'(p+q)}{\Gamma(p+q)}\right\}$$

oder nach einer bekannten Eigenschaft der Gammafunctionen

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\cos^{2p-1}\vartheta\sin^{2q-1}\vartheta\, l\left(\frac{1}{\sin\vartheta}\right)d\vartheta=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{4\Gamma(p+q)}\int_0^1\frac{1-z^p}{1-z}z^{q-1}dz.$$

Setzt man zur Abkürzung

$$t_n=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{z^{-\mu}-1}{1-z}z^n dz, \tag{4}$$

so gelangt man zu dem Werthe

$$Q=\frac{\pi}{2\sin\mu\pi}\sum\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots(2n)}(n-\mu)_n t_n k'^{2n}. \tag{5}$$

Um drittens $R$ zu entwickeln, sei vorerst bemerkt, dass bei echt gebrochenen $\varrho$ der Ausdruck

$$l\left(\frac{2}{1+\sqrt{1-\varrho}}\right)=\frac{1}{2}\int_0^{\varrho}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\varrho}}-1\right)\frac{d\varrho}{\varrho}$$

in die Potenzenreihe $\frac{1}{4}\varrho + \frac{3}{32}\varrho^2 +$ etc. verwandelt werden kann, dass also auch eine Gleichung von der Form

$$\frac{1}{\sqrt{1-\varrho}}\, l\left(\frac{2}{1+\sqrt{1-\varrho}}\right) = \alpha_1 \varrho + \alpha_2 \varrho^2 + \cdots$$

bestehen muss. Multiplicirt man mit $\sqrt{1-\varrho}$, differenzirt nach $\varrho$, multiplicirt mit $2\sqrt{1-\varrho}$, entwickelt linker Hand $\sqrt{1-\varrho}$ und vergleicht die beiderseitigen Coefficienten von $\varrho^{n-1}$, so erhält man die Recursionsformel

$$2n\alpha_n - (2n-1)\alpha_{n-1} = \frac{1.3.5\ldots(2n-3)}{2.4.6\ldots 2n},$$

welche durch Substitution von

$$\alpha_n = \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots(2n)}\beta_n$$

übergeht in

$$\beta_n - \beta_{n-1} = \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}.$$

Zur Abkürzung sei noch

$$s_{2n} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots - \frac{1}{2n}; \tag{6}$$

es ist dann $\beta_n = s_{2n}$; hieraus folgt $\alpha_n$ und

$$\frac{1}{\sqrt{1-\varrho}}\, l\left(\frac{2}{1+\sqrt{1-\varrho}}\right) = \sum \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots(2n)} s_{2n}\varrho^n, \tag{7}$$

wobei $s_0 = 0$ zu nehmen ist, wenn die Summirung mit $n = 0$ beginnen soll. Als Werth von $R$ findet sich nun

$$R = \frac{\pi}{2\sin\mu\pi}\sum \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots(2n)}(n-\mu)_n s_{2n} k'^{2n}, \tag{8}$$

und aus den Formeln 2, 3, 5, 8 zusammen

$$\int_0^1 \frac{dx}{(1-x^2)^\mu (1-k^2x^2)^{1-\mu}}$$
$$= \sum \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots(2n)}(n-\mu)_n \left[l\left(\frac{2}{k'}\right) - s_{2n} + t_n\right] k'^{2n}. \tag{9}$$

Im speciellen Falle $\mu = \frac{1}{2}$ wird $t_n = l2 - s_{2n}$ und

$$F^1(k) = \sum \left(\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots(2n)}\right)^2 \left[l\left(\frac{4}{k'}\right) - 2s_{2n}\right]k'^{2n},$$

was mit *Legendre*'s Angabe übereinstimmt.

Bei sehr kleinen $k'$ reducirt sich die Reihe in Nr. 9 auf ihren Anfangsterm; es ist also näherungsweis

$$\int_0^1 \frac{dx}{(1-x^2)^\mu(1-k^2x^2)^{1-\mu}} = l\left(\frac{2}{k'}\right) + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1-z^\mu}{1-z}\cdot\frac{dz}{z^\mu}$$

und z. B. für $\mu = \frac{3}{4}$ und $\mu = \frac{1}{4}$

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[4]{(1-x^2)^3(1-k^2x^2)}} = l\left(\frac{1}{k'}\right) + \tfrac{5}{2} l\,2 + \tfrac{1}{4}\pi,$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[4]{(1-x^2)(1-k^2x^2)^3}} = l\left(\frac{1}{k'}\right) + \tfrac{5}{2} l\,2 - \tfrac{1}{4}\pi.$$

Als beiläufige Folgerung möge noch die Relation

$$\int_0^1 \frac{dx}{(1-x^2)^{1-\mu}(1-k^2x^2)^{\mu}} - \int_0^1 \frac{dx}{(1-x^2)^{\mu}(1-k^2x^2)^{1-\mu}} = \tfrac{1}{2}\pi \cot \mu\pi$$

Erwähnung finden.

**O. Staude,** *Ueber die Construction des Ellipsoides mittels eines geschlossenen Fadens;* vorgelegt von *W. Scheibner* *).

Nach dem bekannten *Graves*'schen Theorem **) beschreibt ein beweglicher Punkt der Ebene, welcher einen um eine gegebene Ellipse geschlungenen geschlossenen Faden beständig spannt, eine der gegebenen confocale Ellipse. Die vorliegende Mittheilung beabsichtigt eine Verallgemeinerung dieses Theorems auf den Raum zu geben, indem sie folgenden Satz ableitet: Ein geschlossener Faden kann um zwei gegebene confocale Flächen, ein Ellipsoid und ein einschaliges Hyperboloid, in solcher Weise herumgeschlungen werden, dass ein beweglicher Punkt, der den Faden beständig spannt, ein den gegebenen Flächen confocales Ellipsoid beschreibt.

Aus diesem allgemeinen Satze erhält man verschiedene speciellere Constructionen des Ellipsoides, indem man entweder das gegebene Hyperboloid in die Focalhyperbel oder das gegebene Ellipsoid in die Focalellipse ausarten lässt, oder endlich beide Specialisirungen gleichzeitig vornimmt. Im letztgenannten Falle erhält man eine Construction des Ellipsoides aus seinen Focalcurven mittels eines geschlossenen Fadens; der geschlossene Faden kann dabei ersetzt werden durch einen in zwei Punkten befestigten Faden, welcher von einem beweglichen Punkte gespannt wird und in geeigneter Weise über die beiden Focalcurven hinübergleitet. Aus dieser Erzeugungsweise fliessen gleichzeitig neue Focaleigenschaften des Ellipsoides, welche genau analog sind dem Satze von der constanten Summe der

---

*) Vorgelegt und zum Druck übergeben in der Sitzung vom 6. März 1882.

**) Vgl. *Salmon-Fiedler*, Anal. Geom. d. Kegelschnitte, Art. 266.

Brennstrahlen für die Ellipse. Entsprechende Focaleigenschaften bestehen alsdann auch für die beiden Hyperboloide.

Die Grundlagen und Methoden der Beweisführung für die angekündigten Sätze sollen im Folgenden kurz exponirt werden.

§ 1.

## Ueber die Hilfsmittel der Beweisführung.

Das erste Hilfsmittel für die Ableitung der einleitungsweise erwähnten Sätze bilden die *elliptischen Coordinaten*, die Parameter derjenigen drei Flächen des confocalen Systems:

$$\frac{x^2}{\alpha - t} + \frac{y^2}{\beta - t} + \frac{z^2}{\gamma - t} = 1\,^{*)},$$

welche durch den Punkt $x$, $y$, $z$ des Raumes hindurchgehen; die drei Flächen sind jeweils ein Ellipsoid ($t = \lambda$), ein einschaliges ($t = \mu$) und ein zweischaliges Hyperboloid ($t = \nu$) und es ist:

$$\alpha > \nu > \beta > \mu > \gamma > \lambda > -\infty .$$

Die Parameter des gegebenen Ellipsoides und einschaligen Hyperboloides werden mit $\lambda_0$ und $\mu_0$ bezeichnet. Welche geometrischen Gebilde neben den gegebenen Flächen selbst besonders für die vorliegende Aufgabe in Betracht kommen, ist aus der Natur der letzteren unmittelbar ersichtlich. Ein geschlossener Faden, welcher um die beiden Flächen herumgeschlungen ist und durch einen Punkt des Raumes ausserhalb derselben gespannt wird, kann nach eingetretenem Gleichgewicht seiner geometrischen Gestalt nach nur aus drei verschiedenen Liniengattungen zusammengesetzt sein: erstens nämlich aus geradlinigen Stücken, zweitens aus Stücken geodätischer Linien auf dem Ellipsoid $\lambda_0$ oder Hyperboloid $\mu_0$, drittens aus Stücken der Durchdringungscurve. Da der Faden gespannt sein soll, so folgt weiter, dass die geradlinigen Fadenstücke, wo sie etwa in geodätische übergehen, die letzteren berühren, und die geodätischen Stücke, wo sie etwa in Stücke der Durchdringungscurve übergehen, ihrerseits wieder die Durchdringungscurve berühren. Nach einem Satze von *Chasles* **) sind nun alle geradlinigen Tangen-

*) Vgl. *Jacobi*, Vorlesungen über Dynamik, S. 208.

**) *Liouville*'s Journal, I. Serie, Band XI, S. 11.

ten einer geodätischen Linie, welche auf den Flächen $\lambda_0$ oder $\mu_0$ verläuft und die Durchdringungscurve beider Flächen berührt, gleichzeitig gemeinsame Tangenten dieser Flächen. Wenn sich daher der geschlossene Faden, wie es bei den im Folgenden zu charakterisirenden Lagen desselben in der That der Fall sein wird, nur längs solcher geodätischer Linien auf die Flächen $\lambda_0$ und $\mu_0$ auflegt, welche die Durchdringungscurve berühren, so gehören die geradlinigen Fadenstücke gemeinsamen Tangenten der beiden Flächen $\lambda_0$ und $\mu_0$ an.

Die Eigenschaften und gegenseitigen Beziehungen der drei namhaft gemachten Liniengattungen sind es, auf denen die Fadenconstruction des Ellipsoides beruht.

## § 2.

### Ueber die gemeinsamen Tangenten der beiden Flächen $\lambda_0$ und $\mu_0$ und die geodätischen Tangenten ihrer Durchdringungscurve.

In den eingeführten Bezeichnungen sind die Differentialgleichungen der geodätischen Tangenten der Durchdringungscurve auf dem Ellipsoid $\lambda_0$:

$$(1) \qquad (\mu - \lambda_0)\frac{d\mu}{M} \pm (\nu - \lambda_0)\frac{d\nu}{N} = 0$$

und auf dem Hyperboloid $\mu_0$:

$$(2) \qquad (\mu_0 - \lambda)\frac{d\lambda}{\Lambda} \pm (\nu - \mu_0)\frac{d\nu}{N} = 0\,,$$

und die Differentialgleichungen der gemeinsamen Tangenten der beiden Flächen:

$$(3) \qquad \begin{cases} \dfrac{d\lambda}{\Lambda} \pm \dfrac{d\mu}{M} \pm \dfrac{d\nu}{N} = 0 \\ \dfrac{\lambda\, d\lambda}{\Lambda} \pm \dfrac{\mu\, d\mu}{M} \pm \dfrac{\nu\, d\nu}{N} = 0 \text{ *)}\,, \end{cases}$$

wo die Vorzeichen entsprechender Glieder in den beiden Gleichungen (3) immer übereinstimmen müssen. In diesen Glei-

---

*) Es ist dies die Form der Differentialgleichungen des *Abel*'schen Theorems für den Fall der hyperelliptischen Differentiale $p = 2$, wie sie *Jacobi* giebt (Vorlesungen über Dynamik S. 234).

chungen 1—3 bedeuten $\Lambda$, $M$, $N$ die positiven Werthe der folgenden Quadratwurzeln:

$$\Lambda = \sqrt{(\alpha-\lambda)(\beta-\lambda)(\gamma-\lambda)(\mu_0-\lambda)(\lambda_0-\lambda)}$$
$$M = \sqrt{(\alpha-\mu)(\beta-\mu)(\mu-\gamma)(\mu_0-\mu)(\mu-\lambda_0)}$$
$$N = \sqrt{(\alpha-\nu)(\nu-\beta)(\nu-\gamma)(\nu-\mu_0)(\nu-\lambda_0)} .$$

Unter Benutzung dieser Differentialgleichungen kann man in der bekannten Formel für das Linienelement des Raumes in elliptischen Coordinaten die Variabeln separiren und gelangt so zu folgendem Satze: *Das Längenelement dreier verschiedener Liniengattungen, der geradlinigen Tangenten der beiden Flächen $\lambda_0$ und $\mu_0$, der geodätischen Tangenten der Durchdringungscurve auf den Flächen und der Durchdringungscurve selbst, kann durch dieselbe Formel:*

$$dS = \pm\frac{d\lambda}{\mathfrak{L}} \pm \frac{d\mu}{\mathfrak{M}} \pm \frac{d\nu}{\mathfrak{N}} \tag{4}$$

*gegeben werden*, in der:

$$\mathfrak{L} = \frac{2\Lambda}{(\lambda_0-\lambda)(\mu_0-\lambda)}, \qquad \mathfrak{M} = \frac{2M}{(\mu-\lambda_0)(\mu_0-\mu)},$$
$$\mathfrak{N} = \frac{2N}{(\nu-\lambda_0)(\nu-\mu_0)} .$$

Für die Durchdringungscurve ist nämlich $d\lambda = 0$ und $d\mu = 0$ und bleibt in (4) nur das letzte Glied stehen; für die geodätischen Linien ist $d\lambda = 0$ oder $d\mu = 0$ und bleiben in (4) nur zwei Glieder stehen; für die geradlinigen Tangenten der Flächen $\lambda_0$ und $\mu_0$ endlich geht in (4) im Allgemeinen kein Glied verloren. Um den *positiven* Werth des Längenelementes $dS$ zu erhalten, hat man die Vorzeichen in (4) so zu bestimmen, dass alle nicht verschwindenden Terme rechter Hand für sich positiv ausfallen. Die Differentiale in dem Ausdrucke für $dS$ sind hyperelliptische Differentiale 2ter Gattung*) vom Geschlecht $p = 2$.

Bei dem Gebrauche der Differentialgleichungen (1) bis (3) und namentlich bei Längenbestimmungen auf den geodätischen

*) Vgl. *Riemann*, *Abel*'sche Functionen, Ges. Werke S. 99.

Linien und den gemeinsamen Tangenten der Flächen $\lambda_0$ und $\mu_0$ hat man vor Allem auf die Vorzeichen der Quadratwurzeln in den vorkommenden Differentialen hyperelliptischer Integrale zu achten. Was z. B. die Differentialgleichungen (3) angeht, so lassen dieselben vier verschiedene Combinationen ihrer Vorzeichen zu:

$$\begin{cases}+++\\+++\end{cases}\quad\begin{cases}-++\\-++\end{cases}\quad\begin{cases}+-+\\+-+\end{cases}\quad\begin{cases}--+\\--+\end{cases}\tag{5}$$

und es gelten auf verschiedenen Abschnitten ein und derselben gemeinsamen Tangente der Flächen $\lambda_0$ und $\mu_0$ verschiedene dieser Combinationen. Wo nämlich die Tangente eine Ebene des Coordinatentetraeders ($\lambda = -\infty$, $\mu = \gamma$, $\nu = \beta$, $\nu = \alpha$ *) durchsetzt, und wo sie eine der Flächen $\lambda_0$ und $\mu_0$ berührt, geht jedesmal eines der drei Differentiale in jeder der beiden Gleichungen (3) durch 0 hindurch und erhält das entgegengesetzte Vorzeichen. Aehnliches gilt für die Differentialgleichungen (1) und (2) der geodätischen Linien auf $\lambda_0$ und $\mu_0$.

Die vier verschiedenen Vorzeichencombinationen (5) in den Differentialgleichungen (3), welche einerseits vier verschiedenen Abschnitten einer gemeinsamen Tangente der beiden Flächen $\lambda_0$ und $\mu_0$ zukommen, entsprechen anderseits den Richtungen der vier gemeinsamen Tangenten, die von jedem Punkte $\lambda$, $\mu$, $\nu$ des Raumes ausserhalb der beiden Flächen an diese gelegt werden können. Diese vier Tangenten ordnen sich **) mit Bezug auf die drei Normalen $N_\lambda$, $N_\mu$, $N_\nu$ der durch den Punkt gehenden Flächen $\lambda, \mu, \nu$ auf drei verschiedene Weisen in zwei Paare, so dass bei jeder der drei Anordnungen eine der drei Normalen gleichzeitig die beiden von je zwei Tangenten desselben Paares gebilten Winkel halbirt. So giebt es beispielsweise eine Anordnung der 4 Tangenten in 2 Paare »*in Bezug auf $\lambda$ conjugirter*« Tangenten, bei der die Normale $N_\lambda$ des Ellipsoides $\lambda$ die Winkel der beiden Paare halbirt. In den Gleichungen (3) entspricht den beiden ersten und den beiden letzten Vorzeichencombinationen (5) je ein Paar in Bezug auf $\lambda$ conjugirter Tangenten.

---

*) Vgl. meine Inauguraldissertation S. 32 und 33.

**) Vgl. *Mac Cullagh*, Proceedings of the R. Irish Academy, t. II, p. 504. *Liouville*, *Liouville*'s Journal, I. Série, t. XII, p. 423.

## § 3.

### Ueber die Ableitung des Satzes von der Fadenconstruction des Ellipsoides.

Die Combination des Ellipsoides $\lambda_0$ und des einschaligen Hyperboloides $\mu_0$ mag etwa in Gyps modellirt und irgendwo im Raume festgelegt gedacht werden. Die sichtbare Zone $(\mu_0 \mu_0)$ des Ellipsoides zwischen den beiden Zweigen der Durchdringungscurve trennt den sichtbaren Theil des Hyperboloides in zwei Hälften $H_1$ und $H_2$. Es soll nun ein geschlossener unausdehnbarer Faden, der vorerst um die Zone $(\mu_0 \mu_0)$ des Ellipsoides $\lambda_0$ herumgeschlungen ist, durch einen beweglichen Punkt $P = \lambda$, $\mu$, $\nu$ des Raumes beständig gespannt werden und bei der Bewegung des Punktes fortwährend den beiden Bedingungen entsprechen:

1. *einmal das Ellipsoid* $\lambda_0$ *und* 2. *je einmal jede der beiden Hälften des Hyperboloides* $\mu_0$ *zu berühren.* (6)

Dabei ist unter einer *einmaligen Berührung* des Fadens mit der Fläche die Aufeinanderfolge eines Ueberganges desselben von dem Raume ausserhalb der Fläche auf diese und eines Ueberganges von der Fläche in den Raum ausserhalb verstanden, gleichviel ob der Faden zwischen beiden Uebergängen nur in einem Punkte oder längs eines ganzen (aus Stücken geodätischer Linien und Stücken der Durchdringungscurve zusammengesetzten) Curvenzuges sich auf die Fläche aufgelegt hat. Es hat nämlich eine solche Berührung immer den Erfolg, dass in dem längs des Fadens in bestimmter Richtung benutzten Ausdrucke (4) für das Längenelement des Fadens das Vorzeichen desjenigen Gliedes wechselt, dessen Variable mit dem Parameter der berührten Fläche gleichbezeichnet ist, während längs der Berührung dieses Glied verschwindet.

Es sei vorläufig*) einmal als bewiesen angenommen, dass der geschlossene Faden bei gegebener Fadenlänge immer von einem nur durch diese Länge in seiner Bewegung beschränkten Punkte den *Bedingungen* (6) *entsprechend* gespannt werden kann und dass dabei die geodätischen Linien, längs deren sich der Faden auf die Flächen $\lambda_0$ oder $\mu_0$ auflegt, geodätische Tangen-

---

*) Vgl. § 4.

ten der Durchdringungscurve sind. Alsdann setzt sich der Faden aus keinen andern, als den in § 1 namhaft gemachten Liniengattungen zusammen und das Längenelement des Fadens hat in der That überall den Werth (4). Es ist folglich die Länge des Fadens:

$$S = \int_{\lambda}^{\lambda} \pm \frac{d\lambda}{\mathfrak{L}} + \int_{\mu}^{\mu} \pm \frac{d\mu}{\mathfrak{M}} + \int_{\nu}^{\nu} \pm \frac{d\nu}{\mathfrak{N}} . \qquad (7)$$

Jedes der drei Integrale ist vom Punkte $\lambda\mu\nu$ aus in bestimmter Richtung längs des Fadens bis wieder zum Punkte $\lambda\mu\nu$ zurückzuführen. Untersucht man nun die drei Integrationswege, welche durch die Gleichgewichtslage des geschlossenen Fadens für die drei Variabeln $\lambda, \mu, \nu$ bestimmt sind, so findet man, dass für die zwei letzten Integrale in (7) der Fadenweg gerade einen doppelten Periodenweg, dagegen für das erste Integral einen Weg vorstellt, an dessen Ende zwar $\lambda$ mit seinem Anfangswerthe, die Quadratwurzel $\mathfrak{L}$ aber mit verändertem Vorzeichen eintrifft. Bei genauerer Durchführung dieser Betrachtungen findet man für die Länge des Fadens den nur von der $\lambda$-Coordinate des Punktes $\lambda$, $\mu$, $\nu$ abhängigen Werth:

$$S = 2\int_{\lambda}^{\lambda_0} \frac{d\lambda}{\mathfrak{L}} + 4\int_{\gamma}^{\mu_0} \frac{d\mu}{\mathfrak{M}} + 4\int_{\beta}^{\alpha} \frac{d\nu}{\mathfrak{N}} . \qquad (8)$$

Zugleich folgt aus der Betrachtung der Vorzeichenwechsel, welche bei Durchlaufung des Fadenweges in den Differentialgleichungen (1) bis (3) der verschiedenen Fadenstrecken stattfinden, dass das geradlinige Anfangs- und Endstück des Fadens im Punkte $\lambda$, $\mu$, $\nu$ ein Paar in Bezug auf $\lambda$ conjugirter Tangenten von $\lambda_0$ und $\mu_0$ bilden. Man erhält demnach folgenden Satz:

*Wenn ein geschlossener Faden, der um die Combination zweier confocaler Flächen, eines Ellipsoides und eines einschaligen Hyperboloides, herumgeschlungen ist, durch einen beweglichen Punkt der Art gespannt wird, dass er beständig jede der beiden Hälften des Hyperboloides berührt, so beschreibt der Punkt ein den gegebenen Flächen confocales Ellipsoid und die Halbirungslinie des Winkels der in ihm zusammenstossenden Fadenstücke ist die Normale des Ellipsoides.* Natürlich wird nur der Theil des construir-

ten Ellipsoides erhalten, welcher ausserhalb der gegebenen Flächen zu liegen kommt.

§ 4.

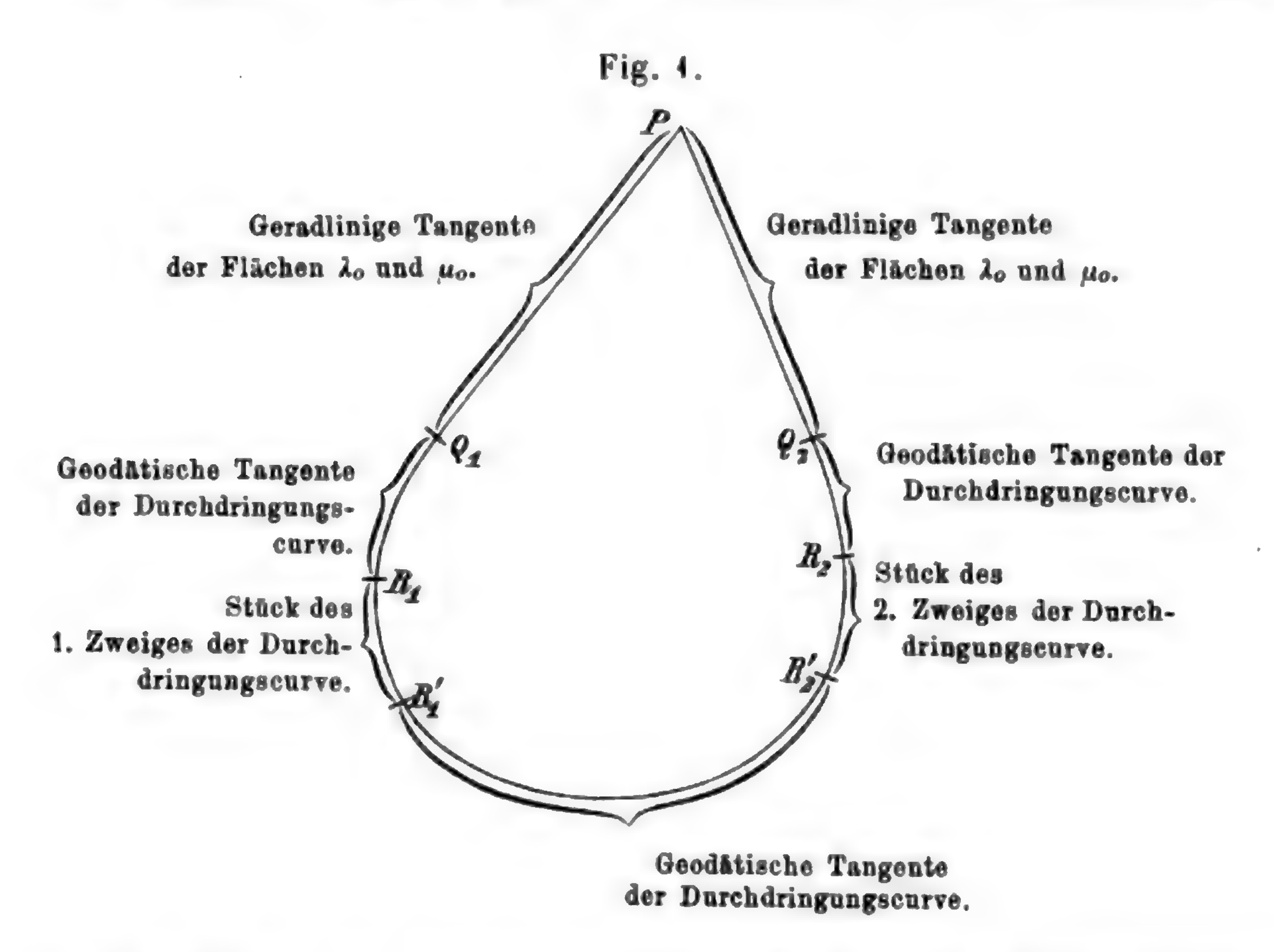
**Ueber den Existenzbeweis der verlangten Gleichgewichtslagen des geschlossenen Fadens.**

Dass für jeden Punkt der zu construirenden Ellipsoidzone eine den Bedingungen des im vorigen § gegebenen Satzes entsprechende Gleichgewichtslage des gespannten Fadens existirt, bedarf eines besonderen Beweises, der zugleich zu der Bemerkung führt, dass das bei der Construction verwendete einschalige Hyperboloid $\mu_0$ durchaus nicht ohne Weiteres durch ein zweischaliges Hyperboloid ersetzt werden kann. Die Grundzüge dieses Beweises seien nur kurz angedeutet. Wenn man von einem beliebigen Punkte $P = \lambda, \mu, \nu$ aus zwei in Bezug auf $\lambda$ conjugirte Tangenten an die Flächen $\lambda_0$ und $\mu_0$ legt, so berühren dieselben entweder beide zuerst $\lambda_0$ oder die eine zuerst $\lambda_0$ und die andere zuerst $\mu_0$.

*Im ersten Falle* setzen sich beide Tangenten von ihren Berührungspunkten $Q_1$ und $Q_2$ mit $\lambda_0$ geodätisch auf $\lambda_0$ fort, bis sie je einen Zweig der Durchdringungscurve in $R_1$ und $R_2$ berühren (vgl. Fig. 1). Es lässt sich nun nachweisen, dass der über einen Theil der Zone $(\mu_0 \mu_0)$ des Ellipsoides ausgespannte Linienzug $R_1 Q_1 P Q_2 R_2$ noch nicht die Hälfte der Zone überspannt, wie auch $P$ ausserhalb der Flächen $\lambda_0$ und $\mu_0$ gelegen sein mag. Die Theilung der Zone $(\mu_0 \mu_0)$ in zwei Hälften wird man dabei durch Stücke von Krümmungscurven $\nu =$ const. bewirkt denken. Insbesondere folgt aus dem angeführten Satze für den Fall, dass $P$ auf der Fläche $\lambda_0$ selbst gelegen ist: Eine geodätische Tangente der Durchdringungscurve der Flächen $\lambda_0$ und $\mu_0$ auf $\lambda_0$ spannt von ihrem Berührungspunkte mit dem einen Zweige der Durchdringungscurve bis zu dem nächstfolgenden Berührungspunkte mit dem andern im Allgemeinen noch keine halbe Zone. Demnach kann man die Zone $(\mu_0 \mu_0)$, wie auch $P = \lambda, \mu, \nu$ liegen mag, immer so halbirt denken, dass die Endpunkte des Linienzuges $R_1 Q_1 P Q_2 R_2$, der über $P$ hinweg beide Zweige der Durchdringungscurve verbindet, innerhalb einer Halbzone und noch nicht an den Grenzen derselben liegen, und kann anderseits in der andern Halbzone einen geodäti-

schen Bogen $R_2'R_1'$ construiren, der in $R_2'$ und $R_1'$ je einen Zweig der Durchdringungscurve berührt und ganz innerhalb dieser Halbzone liegt, ohne die Grenzen zu erreichen. Verbindet man alsdann $R_1$ und $R_1'$, $R_2$ und $R_2'$ durch Stücke der Durchdringungscurve (vgl. Fig. 1), so hat man in dem Gesammtwege

Fig. 1.

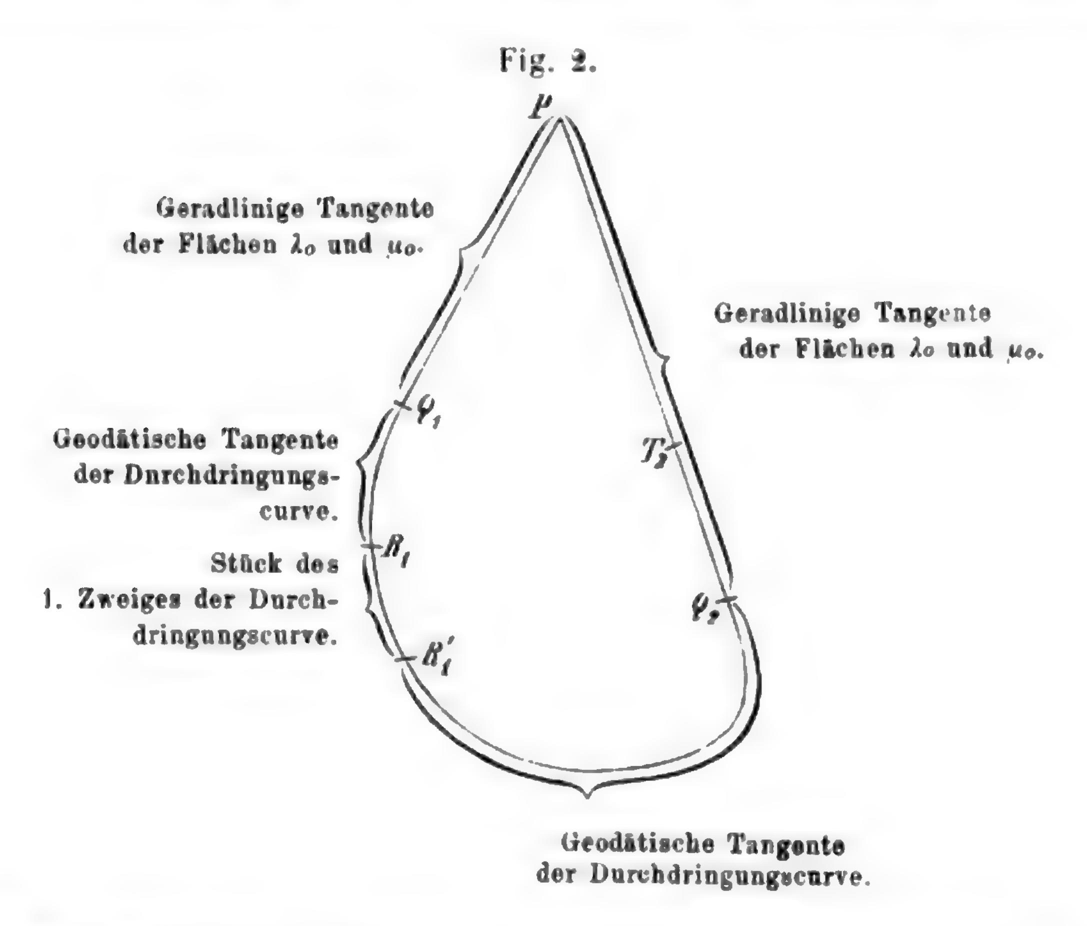



$P\,Q_1\,R_1\,R_1'\,R_2'\,R_2\,Q_2\,P$ die Gleichgewichtslage eines geschlossenen Fadens, der den Anforderungen (6) des Satzes in § 3 entspricht. Denn er berührt $\lambda_0$ einmal von $Q_1$ bis $Q_2$ und jede Hälfte des Hyperboloides einmal bezüglich von $R_1$ bis $R_1'$, und von $R_2'$ bis $R_2$, wo er in die Durchdringungscurve fällt.

*Im zweiten Falle*, wo von den beiden Tangenten an $\lambda_0$ und $\mu_0$ die eine erst $\lambda_0$ (in $Q_1$), die andere erst $\mu_0$ (in $T_2$) berührt (vgl. Fig. 2), kann in ähnlicher Weise die Existenz der geforderten Gleichgewichtslage eines geschlossenen Fadens erwiesen werden. Nur hat alsdann der Faden nicht nothwendig mit *beiden* Zweigen der Durchdringungscurve ein Stück gemein, sondern setzt sich, von dem Berührungspunkte ($T_2$) mit dem Hyperboloid $\mu_0$ geradlinig über einen Zweig der Durchdringungscurve hinweggespannt, bis zur Berührung ($Q_2$) mit dem Ellipsoid fort, um von hier geodätisch verlaufend denselben Zweig der Durchdringung (in $R_1'$) zu erreichen, in den $P\,Q_1\,R_1$ einläuft.

Wie es nun für jeden Punkt $\lambda$, $\mu$, $\nu$ eine zugehörige, den Bedingungen (6) entsprechende Gleichgewichtslage des geschlossenen Fadens giebt, so subsumiren sich umgekehrt alle den Bedingungen (6) überhaupt entsprechenden Gleichgewichtslagen, von unwesentlichen Abweichungen abgesehen, unter die beiden in diesem § charakterisirten Lagen. Die letzteren sind nämlich nicht in allen ihren Theilen völlig bestimmt; so kann z. B. im ersten Falle (Fig. 1) das Stück $R_1' R_2'$ innerhalb gewisser

Fig. 2.




leicht ersichtlicher Grenzen verschoben werden, während die Punkte $R_1$ und $R_2$ fest bleiben.

Die in § 3 gemachten vorläufigen Annahmen sind hiernach als erwiesen zu betrachten.

## § 5.

### Ueber einige Specialfälle.

Für $\mu_0 = \gamma$, $\lambda_0 = \lambda_0$ erhält man aus dem allgemeinen Satze des § 3 das *Graves*'sche Theorem für die Hauptebene $z = 0$. In (8) verschwindet der zweite Term und die beiden übrig bleibenden Integrale werden elliptisch.

Die Annahme $\lambda = \lambda_0$ lässt den folgenden Satz hervorgehen: Wenn man die Zone $(\mu_0 \mu_0)$ des Ellipsoides $\lambda_0$ irgendwie in zwei Halbzonen theilt (im Sinne des § 4), wenn man alsdann in der einen der beiden Hälften durch eine geodätische Tangente $R_1 R_2$ der Krümmungscurve $\mu_0$ den ersten Zweig der letzteren mit dem zweiten, in der andern Hälfte ebenso den zweiten mit dem ersten durch eine geodätische Tangente $R_2' R_1'$ verbindet (vgl. Fig. 1) und dann die Lücken zwischen den Berührungspunkten $R_2$ und $R_2'$ auf dem zweiten und $R_1'$ und $R_1$ auf dem ersten Zweige durch Stücke der Krümmungscurve ausfüllt, so ist die Gesammtlänge des geschlossenen Weges $R_1 R_2 R_2' R_1' R_1$ constant gleich

$$4 \int_{\gamma}^{\mu_0} \frac{d\mu}{\mathfrak{M}} + 4 \int_{\beta}^{\alpha} \frac{d\nu}{\mathfrak{N}} \, .$$

Es ist dies eine Verallgemeinerung des bekannten Satzes über die Längen derjenigen geodätischen Linien auf dem Ellipsoid, welche durch die Kreispunkte gehen*).

Für $\lambda_0 = \lambda_0$, $\mu_0 = \beta$ ergiebt sich aus dem allgemeinen Satze des § 3:

Wenn ein um ein gegebenes Ellipsoid geschlungener geschlossener Faden durch einen beweglichen Punkt des Raumes der Art gespannt wird, dass er beständig zwei diametral gegenüberliegende Quadranten der Focalhyperbel beide berührt, so beschreibt der bewegliche Punkt ein dem gegebenen Ellipsoid confocales Ellipsoid. Diese Constructionsweise liefert das zu construirende Ellipsoid vollständig.

Um die Construction mechanisch zu realisiren, fügt man etwa in das Gypsmodell eines Ellipsoides in zwei diametral gegenüberliegenden Kreispunkten die entsprechenden Quadranten der Focalhyperbel ein, die man aus einem Doppeldrahte bildet (vgl. Fig. 3), so dass der betreffende Theil der Focalhyperbel durch den Spalt zwischen den beiden dicht nebeneinander herlaufenden Drähten dargestellt wird. Nun hat man nur den Faden, bevor man ihn schliesst, durch den Spalt eines jeden der beiden Quadranten der Focalhyperbel hindurchzuführen. Den

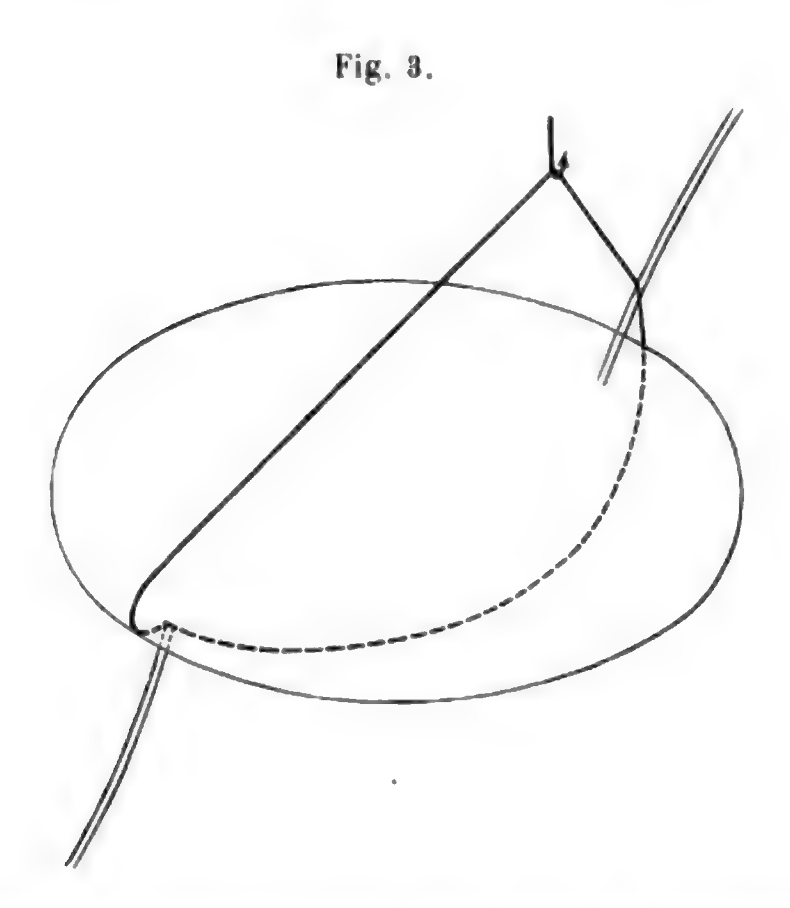
---

*) Vgl. *M. Roberts*, *Liouville*'s Journal, I. Serie, Band XI, S. 3. *Salmon-Fiedler*, Anal. Geom. d. Raumes II, Art. 147.

geschlossenen Faden spannt man dann etwa mittels eines Häkchens, das beliebig bewegt wird.

Weitere Constructionen folgen aus § 3 mit den Annahmen $\lambda_0 = \gamma$, $\mu_0 = \mu_0$ und $\lambda_0 = \gamma$, $\mu_0 = \beta$, eine Construction des Ellipsoides aus einem einschaligen Hyperboloid und dessen Focalellipse, und eine Construction aus Focalellipse und Focalhyperbel.

Fig. 3.



Ich übergehe diese Constructionen, um im Folgenden eine selbständige Darstellung der Focaleigenschaften der centrischen Flächen 2ten Grades zu geben, welche aus jenen Constructionen abgeleilet werden können.

## § 6.

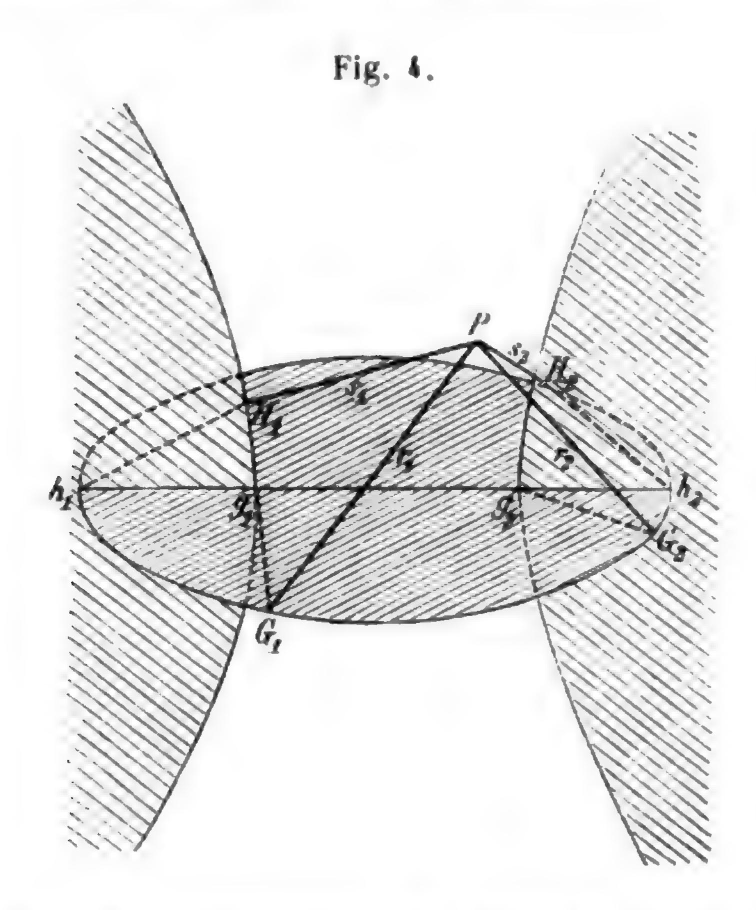
### Ueber die Theorie der gebrochenen Focaldistanzen.

Es sei $G$ die Focalellipse des confocalen Systems, $g_1$ und $g_2$ ihre Brennpunkte, $H$ die Focalhyperbel, $h_1$ und $h_2$ ihre Brennpunkte (Fig. 4). Es mag mit Bezug auf die Figur eine obere und eine untere Seite der Ebene der Focalellipse und eine vordere und hintere Seite der Ebene der Focalhyperbel unterschieden

werden. In der Figur sind von den Ebenen $y = 0$ und $z = 0$ die auf den concaven Seiten der Focalkegelschnitte befindlichen Stücke durch Schraffirung gekennzeichnet und die durch dieselben verdeckten Linien punktirt gehalten.

Sei nun $P = \lambda, \mu, \nu$ ein übrigens beliebiger Punkt in dem Raumviertel oberhalb der Ebene der Focalellipse und vor der Ebene der Focalhyperbel. Bei der Symmetrie der Figur wird durch diese Annahme über die Lage von $P$ die Allgemeinheit der folgenden Betrachtungen nicht beschränkt.

Fig. 4.




Von den vier Focallinien des Punktes $P$, d. h. den durch ihn gehenden gemeinsamen Tangenten der beiden Focalkegelschnitte, schneiden zwei zuerst die Focalellipse (in $G_1$ und $G_2$) und zwei zuerst die Focalhyperbel (in $H_1$ und $H_2$), falls man sie von $P$ aus im Sinne der wachsenden $\lambda$ verfolgt. Die Strecken $PG_1$ und $PG_2$ setzen sich nun von $G_1$ und $G_2$ auf der untern Seite der Ebene der Focalellipse bezüglich bis $g_1$ und $g_2$ dergestalt fort, dass die gebrochenen Linien $PG_1g_1$ und $PG_2g_2$ die kürzesten über die Focalellipse gemessenen Entfernungen des Punktes $P$ von den Brennpunkten $g_1$ und $g_2$ der Focalellipse oder die stabilen Gleichgewichtslagen zweier Fäden sind, die resp. in $g_1$ und $g_2$ befestigt und über die Focalellipse, auf der sie ohne Rei-

bung gleiten können, nach $P$ hin gespannt sind. Es stehen nämlich die Halbirungslinien der Winkel $PG_1g_1$ und $PG_2g_2$ bezüglich auf den Tangenten der Focalellipse in $G_1$ und $G_2$ normal. Ich bezeichne *diese beiden über die Focalellipse gemessenen kürzesten Entfernungen des Punktes P von den Brennpunkten der Focalellipse* ihrer Lage und Länge nach *mit* $r_1$ *und* $r_2$.

Die beiden Strecken $PH_1$ und $PH_2$ werden von $H_1$ und $H_2$ bezüglich nach den Brennpuncten $h_1$ und $h_2$ der Focalhyperbel hin fortgesetzt und zwar auf der hintern Seite der Ebene der Hyperbel. Die so gebildeten gebrochenen Linien $PH_1h_1$ und $PH_2h_2$ sind die kürzesten über die Focalhyperbel gemessenen Entfernungen des Punktes $P$ von den Brennpunkten $h_1$ und $h_2$ der Focalhyperbel oder die stabilen Gleichgewichtslagen zweier Fäden, die resp. in $h_1$ und $h_2$ befestigt und über die Focalhyperbel, auf der sie ohne Reibung gleiten, nach $P$ hin gespannt sind. Ich bezeichne *diese beiden über die Focalhyperbel gemessenen kürzesten Entfernungen des Punktes P von den Brennpunkten der Focalhyperbel* ihrer Länge und Lage nach *mit* $s_1$ *und* $s_2$.

Es sind nun im Sinne des § 2:

$PG_1$ und $PH_2$, $PG_2$ und $PH_1$ } conjugirt in Bezug auf die Fläche $\lambda$,

$PG_1$ und $PH_1$, $PG_2$ und $PH_2$ } conjugirt in Bezug auf die Fläche $\mu$,

$PG_1$ und $PG_2$, $PH_1$ und $PH_2$ } conjugirt in Bezug auf die Fläche $\nu$,

d. h. die vier Focallinien $PG_1$, $PG_2$, $PH_1$, $PH_2$, resp. deren Rückwärtsverlängerungen über $P$ hinaus, die für den Augenblick mit $PG_1'$, $PG_2'$, $PH_1'$, $PH_2'$ bezeichnet seien, ordnen sich in Bezug auf die Normalen $N_\lambda$, $N_\mu$, $N_\nu$ der drei Flächen $\lambda$, $\mu$, $\nu$ im Punkte $P$ in der Weise an, dass die Winkel:

$G_1PH_2$ und $G_2PH_1$ von $N_\lambda$,
$G_1PH_1'$ und $G_2PH_2'$ von $N_\mu$,
$G_1PG_2'$ und $H_1PH_2'$ von $N_\nu$

halbirt werden.

Um die Focallinien nur in ihrem Verlaufe von $P$ bis $G$ oder bis $H$ im Sinne des positiven $d\lambda$ betrachten zu müssen, verstehe ich unter dem »Winkel zweier Focaldistanzen« ($r_1$, $r_2$, $s_1$, $s_2$) immer den Winkel zwischen den Strecken $PG$ und $PH$ derselben; dagegen bezeichne ich die Winkel zwischen einer Strecke

$PG$ oder $PH$ einerseits und $PG'$ oder $PH'$ anderseits ihrer Grösse und Lage nach als die »Supplemente der Winkel der betreffenden Focaldistanzen«.

Was nun die Längen der »gebrochenen Focaldistanzen« $r_1$, $r_2$, $s_1$, $s_2$ betrifft, so findet man für dieselben, wenn der Punkt $P$, wie in Fig. 4, rechts von der Ebene $\nu = \alpha$ liegt:

$$\begin{aligned} r_1 &= \sqrt{\alpha - \lambda} - \sqrt{\alpha - \mu} + \sqrt{\alpha - \nu} + \sqrt{\alpha - \gamma} \\ r_2 &= \sqrt{\alpha - \lambda} - \sqrt{\alpha - \mu} - \sqrt{\alpha - \nu} + \sqrt{\alpha - \gamma} \\ s_1 &= \sqrt{\alpha - \lambda} + \sqrt{\alpha - \mu} + \sqrt{\alpha - \nu} - \sqrt{\alpha - \beta} \\ s_2 &= \sqrt{\alpha - \lambda} + \sqrt{\alpha - \mu} - \sqrt{\alpha - \nu} - \sqrt{\alpha - \beta}\,. \end{aligned}$$

Läge $P$ links von der Ebene $\nu = \alpha$, hätte man hier überall das Vorzeichen von $\sqrt{\alpha - \nu}$ umzukehren. Aus diesen Formeln folgt nun weiter:

$$\left.\begin{matrix} r_1 + s_2 \\ r_2 + s_1 \end{matrix}\right\} = 2\sqrt{\alpha - \lambda} + \sqrt{\alpha - \gamma} - \sqrt{\alpha - \beta}$$

$$\left.\begin{matrix} |r_1 - s_1| \\ |r_2 - s_2| \end{matrix}\right\} = 2\sqrt{\alpha - \mu} - \sqrt{\alpha - \gamma} - \sqrt{\alpha - \beta}$$

$$\left.\begin{matrix} |r_1 - r_2| \\ |s_1 - s_2| \end{matrix}\right\} = 2\sqrt{\alpha - \nu}\,,$$

wo $|r - s|$ den absoluten Werth von $r - s$ bedeutet und alle Quadratwurzeln *positiv* verstanden sind.

Ich nenne $\sqrt{\alpha - \gamma}$ die grosse, $\sqrt{\alpha - \beta}$ die kleine Excentricität der confocalen Flächen $\lambda$, $\mu$, $\nu$; ich nenne ferner $r_1$, $r_2$ und $s_1$, $s_2$ *Paare gleichartiger* und $r_1$, $s_1$ und $r_2$, $s_2$ *Paare gleichseitiger gebrochener Focaldistanzen* des Punktes $\lambda$, $\mu$, $\nu$ (vgl. Fig. 4). Alsdann geben die vorstehenden Formeln folgende Sätze:

*Für jeden Punkt des Ellipsoides ist die Summe zweier ungleichseitiger ungleichartiger gebrochener Focaldistanzen constant, nämlich gleich der Länge der grossen Axe des Ellipsoides, vermehrt um die Differenz seiner Excentricitäten.*

Zugleich ist die Halbirungslinie des Winkels zweier solcher Focaldistanzen die Normale des Ellipsoides.

*Für jeden Punkt des einschaligen Hyperboloides ist die Differenz zweier gleichseitiger ungleichartiger gebrochener Focaldistanzen constant, nämlich gleich der Länge der grossen reellen Axe*

*des einschaligen Hyperboloides, vermindert um die Summe seiner Excentricitäten.*

Zugleich ist die Halbirungslinie des Supplementwinkels zweier solcher Focaldistanzen die Normale des einschaligen Hyperboloides.

*Für jeden Punkt des zweischaligen Hyperboloides ist die Differenz zweier ungleichseitiger gleichartiger gebrochener Focaldistanzen constant, nämlich gleich der Länge der reellen Axe des zweischaligen Hyperboloides.*

Zugleich ist die Halbirungslinie des Supplementwinkels zweier solcher Focaldistanzen die Normale des zweischaligen Hyperboloides.

Man leitet die gewöhnlichen Focaleigenschaften der centrischen Kegelschnitte ohne Schwierigkeit aus diesen Sätzen ab, indem man sie auf geeignete Hauptschnitte der Flächen in Anwendung bringt.

Leipzig, im Februar 1882.

**W. Knop,** *Methode zur quantitativen Trennung des Kalis und Natrons*).*

In neuerer Zeit ist die Anwendung der Fluorwasserstoffsäure in den chemischen Laboratorien dadurch sehr erleichtert worden, dass man dieselbe in zweckmässigen Guttaperchaflaschen von den chemischen Fabriken beziehen kann.

Ich habe im Laufe dieses Winters infolge dessen neue Versuche angestellt, die beiden Alkalien in Form von Fluorkieselmetallen von ihren gewöhnlichsten Begleitern in Silicaten zu scheiden. Diese Versuche haben schliesslich zur Ausarbeitung einer Methode der Alkalibestimmung geführt, die nicht mehr auf die Analyse von Silicaten beschränkt ist, sondern eine viel allgemeinere Anwendung in Zukunft finden kann.

Ich hatte bereits früher zu einer solchen Trennung des Kalis und Natrons von den Bestandtheilen der Pflanzenaschen, also auch zur Trennung von der Phosphorsäure, Salze der Kieselfluorwasserstoffsäure mit organischen Basen dargestellt und analysirt und namentlich das Fluorkieselanilin zu diesem Zweck empfohlen (Chemisches Centralblatt 1858. S. 388) und eine specielle Methode zur Anwendung dieser Verbindung in der Analyse auf Alkalien gemeinschaftlich mit W. Wolf nachgeliefert (Chemisches Centralblatt 1861. S. 897). Diese Methode hat seit der Zeit indessen keine weitere Verbreitung gefunden; man erleidet dabei einen geringen Verlust an Alkali, darum aber steht sie den anderen wohl kaum nach, denn wo man die Alkalien von Phosphorsäure und anderen Basen trennen muss, haben auch diese ihre Fehler. Die Bereitung der kieselflusssauren Salze aber ist nicht ohne Umstände und das Arbeiten mit Fluorkieselgas lästig und ungesund.

---

*) Vorgelegt in der Sitzung am 23. April 1882.

Ich habe neuerdings das Verhalten der kieselflusssauren Salze zu Säuren, namentlich zur Salzsäure, näher verfolgt und gefunden, dass die Fluorkieselalkalien dieser Säure ganz besonderen Widerstand leisten.

Wendet man zur Auflösung eines kieselsäurereichen Minerals eine Mischung von einem Drittel rauchender Salzsäure und zwei Dritteln Fluorwasserstoffsäure an, so löst sich allerdings während des Abdampfens einmal Alles zu einer klaren Flüssigkeit, allein bei weiterem Eindampfen entweicht die Salzsäure und es stellen sich neben den Chloriden von Aluminium, Eisen, Calcium und Magnesium die Verbindungen des Fluorkiesels mit den Alkalimetallen wieder her. Selbst wenn man die geringe Menge Fluorkieselkalium und Fluorkieselnatrium, welche man durch geeignete Behandlung von 0,15 Chlorkalium und ebensoviel Chlornatrium mit Kieselfluorwasserstoffsäure erhält, mit 10 g Salmiak mischt und die Mischung glüht, wird das Salzgemenge nur unvollkommen in Chlorverbindungen umgewandelt.

Ich habe nun weiter gefunden, dass man der besonderen Darstellung der Kieselfluorwasserstoffsäure ganz überhoben ist, sobald ein Silicat eine seinem Gehalt an Alkalimetallen gleiche Menge Silicium oder mehr davon enthält, und dass man in den anderen Fällen, wo der Kieselgehalt geringer ist, oder ganz fehlt, durch Zusatz von dem erforderlichen Quantum Kieselsäure zu den in 10 bis 20 ccm Wasser und einigen Cubikcentimetern rauchender Salzsäure gelösten Alkaliverbindungen, nach dem Uebergiessen und Abdunsten mit dem erforderlichen Quantum rauchender Fluorwasserstoffsäure, die Alkalimetalle vollständig in Fluorkieselverbindungen umwandelt.

Man verwendet hierzu die Kieselsäure, welche bei quantitativen Analysen von Silicaten erhalten wird, oder pulvert einige Decigramme klaren Bergkrystall. Die erforderliche Menge findet man leicht aus der procentischen Zusammensetzung des Kieselfluornatriums, welches entsprechend der Formel $Si\,Na_2\,Fl_6$ gegen 15,91 Silicium 24,60 Natrium enthält. Das analog zusammengesetzte Kieselfluorkalium enthält procentisch weniger Fluorkiesel.

Ich habe ferner gefunden, dass die Fluorkieselalkalien in einer mit Salzsäure stark angesäuerten Mischung von Aether und absolutem Alkohol ganz unlöslich sind und endlich, dass der krystallinische Niederschlag, in dem sie nach dem Zusatz

dieser Mischung auf dem Boden des Gefässes sich absetzen, in Verbindungen von Fluorkieselkalium und Fluorkieselnatrium mit geringen Mengen aller anderen Metalle, welche den Hauptmengen nach als Chloride in der salzsauren Mischung enthalten sind, besteht.

Dieses Verhalten lässt sich nun mit grossem Vortheil bei der Analyse der Silicate auf Alkalien benutzen, welche reichlich Eisenoxyd und Thonerde enthalten und daher bei dem Volum, das diese beim Niederschlagen mit Ammoniak annehmen und behalten, grosse Mengen Waschflüssigkeit, ferner das spätere Glühen zur Entfernung der Ammoniaksalze fordern, welche sich hierbei, sowie bei der Ausfällung des Kalks in der Flüssigkeit ansammeln, in der schliesslich noch die Alkalien bestimmt werden müssen. Selbstverständlich muss der Analyse auf die Alkalien die Bestimmung der Kieselsäure, der Sesquioxyde, des Kalks und der Talkerde, in dem durch Schmelzen mit kohlensaurem Natron aufgeschlossenen Mineral vorausgehen.

Ich habe bis jetzt einige Analysen von dem rothen Gneis aus der Gegend von Zöblitz und einigen seiner Verwitterungsproducte ausgeführt, die sehr gut ausgefallen sind.

Die Scheidung der Alkalimetalle wird auf diesem Wege ausserordentlich einfach, weil man alle anderen Begleiter derselben der Hauptmenge nach mit der ätherischen Lauge abdecantirt. Dazu haben die Fluorkieselalkalien die nicht zu unterschätzende Eigenschaft, dass sie sich gewöhnlich zu einer gallertartigen Membran auf dem Boden des Becherglases zusammenziehen, so dass man die ätherische Mutterlauge oft bis zum letzten Tropfen, immer bis auf wenige Cubikcentimeter abgiessen kann.

Das Verfahren will ich in Folgendem näher beschreiben, und zwar für den Fall, wo man es auf kieselsäurefreie Substanzen anzuwenden beabsichtigt; für Silicate ergiebt es sich daraus von selbst.

Ich wog ab: 0,15 reines Chlorkalium und
0,15 reines Chlornatrium,

löste diese Mengen im Platintiegel in wenigen Cubikcentimetern Wasser und mischte darauf 0,2 g Kieselsäure und anderthalb Decigramm Eisenchlorid, Chlorcalcium und Chlormagnesium hinzu.

Die vorstehenden Mengen Chlorkalium und Chlornatrium müssen nach der späteren Umwandlung in schwefelsaure Salze der Rechnung nach geben:

| | | | Alkalien | | Schwefelsäure |
|---|---|---|---|---|---|
| 0,15 Chlorkalium | $=$ 0,17530 $SK_2O_4$ | $=$ | 0,09478 $K_2O$ | $+$ | 0,08052 $SO_3$ |
| 0,15 Chlornatrium | $=$ 0,18224 $SNa_2O_4$ | $=$ | 0,07946 $Na_2O$ | $+$ | 0,10278 $SO_3$ |
| Sulfate: | 0,35754 | | 0,17424 | | 0,18330 |

Zu der Salzmischung wurde dann das erforderliche Quantum Fluorwasserstoffsäure hinzugesetzt und darauf alle Flüssigkeit abgedunstet. Der trockene Rückstand wurde mit zwei bis drei Cubikcentimetern rauchender Salzsäure übergossen, worauf er sich leicht vom Tiegel loslöst. Man bringt ihn mit Hülfe der Alkoholspritzflasche in ein Becherglas, verwendet zum Auswaschen des Tiegels 25, höchstens 50 ccm absoluten Alkohol und lässt die saure Flüssigkeit einige Zeit auf den Niederschlag einwirken, fügt schliesslich 100 ccm Aether hinzu und lässt 12 Stunden stehen.

Nun giesst man die ätherische Mutterlauge von dem Niederschlage ab. Ich habe diesen Abguss nachträglich noch jedesmal mit ungefähr einem halben Decigramm Fluorkieselanilin versetzt, nachdem dieses in etwas absolutem Alkohol unter Zusatz von rauchender Salzsäure bei Siedehitze aufgelöst worden war und tagelang stehen gelassen, um zu sehen, ob sich daraus noch ferner Fluorkieselalkalien absetzten. In keinem einzigen Falle hat sich später noch ein Niederschlag gezeigt. Ich habe ferner einmal die Laugen von zwei solchen Operationen zusammengegossen und abgedampft, den Rückstand in wenigen Tropfen rauchender Salzsäure und einigen Cubikcentimetern absoluten Alkohols gelöst und nochmals reichlich mit Aether versetzt. Auch hierbei erschien keine Spur von dem krystallinischen Niederschlage der Fluorkieselalkalien mehr, es schieden sich nur leichte Flocken von amorpher Kieselsäure noch aus.

Die gefällten Fluorkieselalkalien bringt man mit Hülfe der Alkoholspritzflasche auf das Filter. Es kann Anderen Zeit sparen, wenn ich bemerke, dass man hierbei die Federfahne nur anfangs einmal benutzt, wenn sich an den Gefässwänden Krystalle fester angesetzt haben; später aber vermeidet man die Anwendung derselben sowie des Glasstabes, weil man mit diesen Instrumenten den Niederschlag immer von neuem wieder auf der Innenfläche des Glases zum Anhaften bringt, während derselbe

sehr leicht nachgiebt, wenn man das Becherglas geneigt über das Filter hält und jedesmal immer nur einige Cubikcentimeter Alkohol hinter den Niederschlag treibt und denselben von rückwärts her in das Filter spült.

Man wäscht das Filter nur oberflächlich mit absolutem Alkohol, d. h. nur so lange aus, bis die Reste der ätherischen Lauge abgelaufen sind. Reinigen kann man denselben durch ferneres Auswaschen nicht, denn er enthält von allen jenen Beimengungen einige Centigramme in chemischer Verbindung.

Man trocknet das Filter, nimmt den Niederschlag davon ab, verbrennt zuerst das Filter für sich ganz vollständig in der Platinschale, bringt den Niederschlag dazu und mischt denselben mit concentrirter Schwefelsäure, lässt ihn einige Zeit stehen, bis das Fluorkieselgas zumeist entwichen ist, und glüht nachher so weit und bei so niedriger Temperatur, dass die Alkalien als sauerschwefelsaure Salze zurückbleiben und auf die ausgeschiedene Kieselsäure nicht zurückwirken können.

Den Rückstand in der Schale übergiesst man nun mit 10 bis 20 ccm Aetzammoniak und dunstet zur Trockne oder wenigstens so weit ab, bis der Rückstand teigartig geworden ist. Die Masse hat durch Ammoniakverlust jetzt wieder eine saure Reaction angenommen, man mischt einige Tropfen starkes Aetzammoniak dazu, jedenfalls soviel, dass die Masse durch und durch alkalisch wird und lässt sie eine Stunde stehen, um Eisenoxyd und Thonerde möglichst vollständig sich ausscheiden zu lassen. Versäumt man dieses, so bleiben einige Centigramme Eisenoxyd- und Thonerdealaun bei der nachfolgenden Behandlung unzersetzt in Lösung.

Hiernach übergiesst man die breiförmige Masse mit ungefähr 20 ccm Lösung von einfach kohlensaurem Ammoniak und lässt sie damit 12 Stunden in der bedeckten Platinschale stehen.

Die Mengen Eisenoxyd, Thonerde, Kalk und Talkerde, die man bei diesem Verfahren zu scheiden hat, sind stets so gering, dass man die Flüssigkeit durch sehr kleine Filter ablaufen lassen kann. Der Niederschlag darf bekanntlich nicht mit Wasser gewaschen werden. Man muss dazu dieselbe Lösung von einfachkohlensaurem Ammoniak anwenden, mit welchem diese Beimengungen ausgefällt werden. Man erhält sie (nach Rose's Handb. d. analyt. Chemie. II. Aufl. Bd. 2. S. 41) durch Mischen von 180 ccm Aetzammoniak von 0,92 spec. Gew. und 230 g

anderthalbkohlensaurem Ammoniak mit so viel Wasser, dass die ganze Lösung ein Liter ausmacht. Braucht man bei dem Auswaschen mit dieser Flüssigkeit die Vorsicht, dass man den Aufguss auf das Filter immer erst vollständig abfliessen lässt, bevor man es von Neuem damit anfüllt, so erfordert das Auswaschen der Platinschale und des Filters eine nur geringe Menge derselben.

Man setzt nun das Filtrat zuerst einige Zeit einer gelinden Wärme aus, wegen des Entweichens von Kohlensäure, dunstet zur Trockne und erhitzt den Rückstand vor dem Glühen noch einige Zeit im Luftbade über 100 Grade.

Auch in diesem Zustande kann man die sauerschwefelsauren Alkalien wegen der geringen Beimengung von schwefelsaurem Ammoniak nicht ohne Gefahr vor Verlust glühen. Man beugt aber dem Spritzen, das bei dessen Zersetzung eintritt, mit vollständigem Erfolge vor durch Anwendung eines Kunstgriffes, der im Laufe dieses Winters von dem jungen Geologen Jos. Hazard bei seinen Mineralanalysen zuerst ausprobirt worden ist und darin besteht, dass man eine dem Quantum schwefelsauren Ammoniaks entsprechende Menge saures weinsaures Ammoniak während des Eindunstens der Lösung, die diesen Rückstand giebt, hinzusetzt und mit austrocknet. Glüht man nun Anfangs sehr schwach, so bildet sich aus der Weinsäure eine poröse Kohle, welche das schmelzende schwefelsaure Ammoniak aufsaugt und indem sie die Schwefelsäure nachher bei stärkerem Glühen zu schwefliger Säure reducirt, die Umwandlung der sauerschwefelsauren Alkalien in neutrale Salze ausserordentlich erleichtert und dabei selbst vollständig mit verbrennt.

Man glüht den Rückstand bis er völlig weiss ist und wägt ihn zum ersten Male. Hiernach löst man ihn noch einmal in heissem Wasser, setzt zwei bis drei Tropfen Lösung von einfach kohlensaurem Ammoniak hinzu und lässt stehen, um zu sehen, ob sich jetzt noch einige Milligramme Eisenoxyd und Thonerde absetzen. Ist dieses der Fall, so trocknet man noch einmal ein. Dabei setzen sich diese nachträglichen Ausscheidungen gewöhnlich so fest an die Wand der Platinschale an, dass man beim Uebergiessen des Rückstandes mit 10 bis 20 ccm siedenden Wassers eine klare Lösung erhält, die man in eine zweite Platinschale decantirt, in welcher man nun zum Schluss die Lösung eintrocknet und nochmals stark glüht, um

die letzten Gewichtsbestimmungen so genau als möglich zu erhalten.

Bei diesem zweiten Eintrocknen habe ich immer, wenn die Salze anfangen auszukrystallisiren und jedenfalls alles vorher zugesetzte Ammoniak wieder entwichen ist, von Neuem einige Tropfen Schwefelsäure hinzugesetzt, obschon das Glühen bis zum constanten Gewicht dadurch eine etwas längere Dauer bekommt. Dafür aber verknistert der angesäuerte Rückstand auch nicht, während dieses der Fall ist, wenn man den Rückstand von der Lösung der neutralschwefelsauren Salze der höheren Temperatur aussetzt.

Die Resultate, welche ich nach diesem Verfahren jetzt bei der Analyse von Gneis und einigen Verwitterungsproducten desselben erhalten habe, lassen gar nichts zu wünschen übrig, und die Ergebnisse wiederholter Prüfungen, in der Weise, wie sie so eben beschrieben wurde, haben in der That auch Werthe geliefert, die sehr nahe an die berechnete Menge = 0,35754 schwefelsaurer Alkalien hinanreichen. Ich erhielt:

| | |
|---|---|
| 0,3561 | 0,3569 |
| 0,3566 | 0,3571 |

statt derselben wieder. Man kann aber bei diesem Verfahren die Genauigkeit viel weiter treiben, indem man zur Analyse die doppelte und dreifache Menge Substanz anwendet, weil man dabei die Quantitäten der abzuscheidenden Beimengungen von Sesquioxyden, Kalk- und Talkerde nicht wesentlich erhöht.

Es wird jedenfalls die Mühe lohnen, nun auch nochmals zu untersuchen, ob sich die Alkalien nach diesem Verfahren auch bei Gegenwart von Phosphorsäure und Borsäure genau bestimmen lassen. Man wird hierbei die mit Salzsäure angesäuerten Phosphate und Borate unter Zusatz von Wasser mit Kieselsäure mischen und nun mit dem erforderlichen Quantum Fluorwasserstoffsäure eindunsten, aber nicht zur Trockne, sondern bis auf einen Rest von ca. 15 ccm, und da bis dahin alle überschüssige Fluorwasserstoffsäure verflüchtigt ist, den wässerigen, aber noch salzsauren Rückstand mit ungefähr 60 ccm absoluten Alkohols und 150 ccm Aether zu versetzen haben, um das Fluorkieselnatrium und Fluorkieselkalium auszufällen.

Wie die vorstehenden Zahlen zeigen, ist dieser Gang der Analyse sehr genau bis zu dem Punkte, wo man die neutral-

schwefelsauren Salze der beiden Alkalien gewonnen hat, und muss man sich hier entscheiden, ob man dieselben durch Behandlung mit essigsaurem Baryt in kohlensaure Salze umwandeln will, indem man nach dem Ausfällen der Schwefelsäure eindunstet und den Rückstand glüht, um den überschüssigen essigsauren Baryt zu zersetzen und nachher das kohlensaure Alkali mit Chlorwasserstoffsäure zu sättigen und das Kalium direct als Chlorplatinkalium aus der Lösung zu fällen u. s. w., oder ob man die indirecte Methode zur Bestimmung des Kalis und Natrons anwenden will.

Diese letztere ist viel einfacher und passender für diesen Gang der Analyse, weil man das Gewicht des Gemenges von schwefelsaurem Kali und schwefelsaurem Natron dabei jedenfalls schon zur Controle der späteren Resultate aufnimmt und darnach für diesen Fall nur noch die Bestimmung der Schwefelsäure auszuführen hat.

Ich habe deshalb die constanten Factoren, welche sich mit Hülfe der Richter'schen Gleichungen zur Bestimmung der unbekannten Mengen Kali und Natron ableiten, mit Zugrundelegung der Atomgewichte von Stass berechnet und die Formeln so zusammengezogen, dass sie eine sehr einfache Gestalt bekommen.

Die Formeln, welche die meisten unserer Handbücher der analytischen Chemie zu einer solchen Berechnung aufgenommen haben, sind in der Weise abgeleitet, dass man bei ihrer Anwendung die Mengen schwefelsaures Kali und schwefelsaures Natron bekommt, aus welchen der Glührückstand besteht. Ich kann dafür keinen triftigen Grund finden, weil man ja fast immer das Alkali selbst zu suchen hat und gar kein Hinderniss vorliegt, die beiden Unbekannten $x$ und $y$ gleich von vornherein mit der Bedeutung, dass die eine das Kali, die andere das Natron ausdrückt, in die Gleichungen einsetzt, mit deren Hülfe man die zum praktischen Gebrauch bestimmten Formeln ableitet. Da ich glaube, dass man in Zukunft die indirecte Methode der Alkalibestimmungen häufiger als bisher anwenden wird, so habe ich die constanten Factoren, welche man bei Auflösung der Gleichungen für $x$ und $y$ erhält, mit Zugrundelegung der von Stass corrigirten Atomgewichte noch einmal und zwar bis auf fünf Decimalstellen berechnet, und geprüft, ob diese Factoren zur Berechnung der Unbekannten eine hinreichende Genauigkeit haben, wenn sie mit der fünften Decimale abgebrochen werden.

Setzt man:

| | | | |
|---|---|---|---|
| $Na =$ | 22,98 | $Na_2O =$ | 61,92 |
| $K =$ | 39,04 | $K_2O =$ | 94,04 |
| $Ba =$ | 136,80 | $SBaO_4 =$ | 232,62 |
| $O =$ | 15,96 | $SO_3 =$ | 79,86 |

und nennt $P$ das erhaltene Gewicht der schwefelsauren Salze, $x$ die darin enthaltene Menge Kali, $y$ die zu suchende Menge Natron und $S$ die mittels Chlorbarium bestimmte Quantität Schwefelsäure, welche an $x + y$ gebunden war, so dass also:

$$1) \quad P = x + y + S$$

ist, dann erhält man durch geeignete Behandlung der Richterschen Gleichungen:

$$2) \quad y = S \,.\, 4{,}19782 - P \,.\, 1{,}92777.$$

In diesen beiden Gleichungen sind $S$ und $P$ Grössen, welche nie $= 0$ sein können, während $y = 0$ wird für den Fall, dass in dem erhaltenen Gewicht schwefelsauren Salzes kar kein Natron enthalten ist, dasselbe also in reinem schwefelsaurem Kali besteht und umgekehrt $x = 0$ wird, wenn man es mit reinem schwefelsaurem Natron zu thun hat.

Man kann daher die vorstehende zweite Gleichung leicht auf die Brauchbarkeit der darin enthaltenen beiden constanten Factoren prüfen, indem man $P = 86{,}95$ dem (halbirten) Atomgewicht des schwefelsauren Kalis, $S = 39{,}93$ dem (halbirten) Atomgewicht der Schwefelsäure setzt.

Bei Auflösung der zweiten Gleichung muss dann $y = 0$ werden, oder es muss:

$$S \,.\, 4{,}19782 = P \,.\, 1{,}92777$$

sein. Berechnet man nun in diesem Sinne $y$ mit Hülfe der Gleichung

$$y = 39{,}93 \,.\, 4{,}19782 - 86{,}95 \,.\, 1{,}92777,$$

so erhält man für beide Producte bis zur letzten Ziffer rechts übereinstimmend:

$$y = 167{,}62 - 167{,}62 \text{ also vollständig genug} = 0.$$

Berechnet man als eine zweite Prüfung die Menge Kali und Natron, welche ein Gemisch von 0,15 g Chlorkalium und ebensoviel Chlornatrium enthält, direct nach den Atomgewichtstabellen, welche, wie oben angegeben, fordern:

$$x = 0{,}09478 \text{ Kali und}$$
$$y = 0{,}07946 \text{ Natron,}$$

und setzt voraus, dass nach dem Umwandeln dieser Salze in 0,3575 g schwefelsaurer Salze die darin enthaltene Menge Schwefelsäure richtig = 0,18330 gefunden worden sei, so giebt die Gleichung:

$$y = 0{,}1833 \; . \; 4{,}19782 - 0{,}3575 \; . \; 1{,}92777$$

für $y$ den Werth 0,07954 statt 0,07946, also nur eine Differenz von 0,00008 als Beweis, dass die berechneten und mit der fünften Decimale abgebrochenen beiden Factoren in der Gleichung für $y$ genau genug sind. Es kann daher diese Formel unbedenklich in praktischen Gebrauch gezogen werden.

Die Zuverlässigkeit dieser Methode hängt einmal von der Richtigkeit dieser Factoren, ein andermal aber auch von der vollständigen Unlöslichkeit der Fluorkieselalkalien in der Mischung von absolutem Alkohol und Aether und ausserdem noch von der Bestimmung der Schwefelsäure ab. Wenige Milligramme Verlust an dem Niederschlage vom schwefelsauren Baryt verschieben bei geringen Mengen Alkali das Verhältniss vom Kali zum Natron ansehnlich, wenn man dieselben nach obiger Formel berechnet.

Was den zweiten Punkt anbetrifft, so habe ich mehrmals den folgenden Versuch wiederholt, der noch etwas Bemerkenswerthes in dem Verhalten des Kalis und Natrons zum Fluorkieselanilin beiläufig mit zu Tage gefördert hat.

Ich wog ein einziges Milligramm Chlornatrium ab, löste in drei bis vier Tropfen Wasser, fügte vier bis fünf Cubikcentimeter absoluten Alkohol hinzu, in welchem ich vorher unter Zusatz von zwei Tropfen Salzsäure 0,05 g Fluorkieselanilin gelöst hatte, und goss diese Lösung zu der ersteren. Es entstand sofort eine Trübung und nach einigen Stunden lag auf dem Boden des Gefässes eine flockige Schicht von Kieselfluornatrium, dessen Menge keinen Zweifel darüber liess, dass die ganze in einem Milligramm Chlornatrium enthaltene Natronmenge ausgefällt sein musste.

Als ich denselben Versuch mit einem und auch mit zwei Milligrammen Kieselfluorkalium wiederholte, fiel kein Niederschlag, oder nur eine Spur davon, auch dann, wenn ich die salzsaure, mit Fluorkieselanilin versetzte Flüssigkeit zur Trockne

dunstete und den Rückstand mit schwach angesäuertem absoluten Alkohol übergoss und Aether hinzumischte.

Die Affinität des Anilins zur Kieselfluorwasserstoffsäure ist allerdings so gross, dass, wenn man absoluten Alkohol stark mit Salzsäure versetzt und darin reichlich Kieselfluoranilin bei Siedehitze auflöst, aus dieser Lösung, welche salzsaures Anilin und freigemachte Kieselfluorwasserstoffsäure enthält, beim Erkalten die Salzsäure wieder frei wird, während das regenerirte kieselfluorwasserstoffsaure Anilin in glänzenden breiten Blättern auskrystallisirt. Geringe Mengen von Kali vermögen grösseren Quantitäten des Anilinsalzes also nicht die Kieselfluorwasserstoffsäure zu entziehen, und hierin liegt offenbar der Grund, dass man bei Anwendung des Kieselfluoranilins zum Ausfällen des Kalis, wie ich oben angegeben habe, einen geringen Verlust erleidet. Das Natron hat zur Kieselfluorwasserstoffsäure eine viel grössere Affinität als das Kali.

Vermeidet man dieses Anilinsalz und behandelt ein Milligramm Chlorkalium nach der neuen Methode, so fällt auch aus diesem Salz das Kali ebenso vollkommen, wie aus der gleichen Quantität Chlornatrium das Natron als Fluorkieselverbindung heraus.

Ich löste ein Milligramm Chlorkalium und ein Centigramm Chlorcalcium in zwei Cubikcentimetern Wasser auf, mischte dazu zwei Centigramme amorphe Kieselsäure und einige Cubikcentimeter Fluorwasserstoffsäure und dunstete zur Trockne. Hiernach übergoss ich den kaltgewordenen Rückstand mit zwei Cubikcentimetern schwach mit Salzsäure angesäuerten absoluten Alkohol. Das Chlorcalcium löste sich unter der Hand zu einer wasserklaren Flüssigkeit, aber unten lag fest an der Schale deutlich sichtbar eine Schicht Fluorkieselkalium, welche nachher mit vier bis fünf Cubikcentimeter Aether ausgewaschen und in ein Becherglas gebracht, eine so starke Trübung und später einen verhältnissmässig so starken Bodensatz lieferte, dass man nun ebenso bestimmt wie vom Natron aussagen kann, dass die Fluorkieselalkalien in der Mischung von Aether und absolutem Alkohol bis auf einen nicht anzugebenden Bruchtheil von einem Miligramm oder absolut unlöslich sind.

Was den dritten Punkt, die genaue Bestimmung der Schwefelsäure durch Baryt, anbetrifft, so weiss man, dass der gefällte schwefelsaure Baryt zuweilen die Eigenschaft behält, mit dem

Waschwasser durch das Filter zu gehen, auch wenn man beim Ausfällen der Schwefelsäure ganz vorschriftsmässig verfuhr. Ich kann dagegen folgendes ganz sichere Hülfsmittel angeben. Man fällt, wie üblich, die Schwefelsäure bei Siedehitze, macht den Niederschlag durch Kochen der Flüssigkeit krystallinisch, lässt Zeit zu völligem Absetzen, und decantirt die klare Flüssigkeit so weit als möglich. Hiernach rührt man den Niederschlag mit dem Glasstabe vollständig auf und lässt dazu, ohne zu erhitzen, unter stetem Umrühren vier bis fünf Tropfen, je nach der Menge Flüssigkeit, einer Lösung von 10 g Benzoeharz in 200 ccm Alkohol fallen. Das sich ausscheidende Harz vereint die feinen Partikeln des gefällten schwefelsauren Baryts so sehr, dass man den ganzen Niederschlag ohne Weiteres auf das Filter bringen und nachher mit siedendem Wasser in ganz kurzer Zeit vollständig auswaschen kann, wobei keine Spur vom Niederschlage mit durch das Filter geht. Die geringe Menge Harz, welche er enthält, verbrennt beim Glühen desselben, ohne eine Reduction zu bewirken, und es ist leicht, den geglühten Niederschlag mit einigen Tropfen verdünnter Schwefelsäure anzufeuchten, scharf zu trocknen und nochmals abzuglühen, um einen Gewichtsverlust von daher oder von der Einwirkung der Filterkohle auszugleichen. Ich habe diese Prüfung wiederholt angestellt und niemals eine Gewichtsveränderung nach diesem zweiten Glühen wahrgenommen. Zur Bestimmung der Filterasche war eine Anzahl der Filter vorher auch mit Schwefelsäure verbrannt.

Hat man phosphorsäurefreie und kalkarme Silicate zu analysiren, so wird das Verfahren noch viel einfacher, weil man in diesem Falle nicht nöthig hat, die Fluorkieselalkalien mit angesäuertem Aetheralkohol auszuziehen. Man löst das Mineral in Fluorwasserstoffsäure, dunstet zur Trockne, übergiesst und erhitzt den Rückstand mit concentrirter Schwefelsäure, bis die Alkalien in sauerschwefelsaure Salze umgewandelt worden sind und übersättigt mit Aetzammoniak. Man bringt wieder zur Trockne, übergiesst den Rückstand mit der Lösung von einfach kohlensaurem Ammoniak, und verfährt zur Gewinnung der reinen neutralschwefelsauren Alkalien gerade so wie oben angegeben worden ist.

**W. Knop,** *Zur Analyse der Silicate**).

Hat man complicirte Silicate, etwa einen Gneis oder Granit quantitativ zu analysiren, so ist es gerathen, in einem Quantum des Minerals: Kieselsäure, die Sesquioxyde und Erden für sich und die Alkalien in einem anderen Quantum desselben zu bestimmen. Bezüglich der Analyse auf diese letzteren Basen verweise ich auf die in unseren Berichten über die Sitzung vom 23. April d. J. gemachten Mittheilungen.

Der Gang der quantitativen Analyse auf die übrigen Bestandtheile ist bekannt. Man scheidet unter Einhaltung erfahrungsmässig festgestellter Vorsichtsmassregeln dieselben in folgender Ordnung aus dem mit kohlensaurem Natron aufgeschlossenen Mineral: zuerst die Kieselsäure, darauf Eisenoxyd und Thonerde zusammen, aus dem Filtrat eine geringe Menge Mangan und in dem Filtrat von diesem die Kalkerde und zuletzt die Talkerde. Von geringen Beimengungen, z. B. von Phosphorsäure, die fast jedes natürliche Silicat, das eine Gebirgsmasse ausmacht, enthält, ebenso von dem Vorkommen von Fluor, Titansäure, Zinnoxyd u. a., sieht man dabei ab. Wo die Bestimmung eines dieser Begleiter gefordert wird, muss eine besondere Analyse darauf mit viel grösseren Mengen des Minerals nachträglich ausgeführt werden.

Bei dem üblichen Gange der Silicatanalyse löst man das mit kohlensaurem Natron aufgeschlossene Mineral in verdünnter Salzsäure und dunstet darauf zur Abscheidung der Kieselsäure zur Trockne.

Ich habe bereits 1872 (Bonitirung der Ackererde 2. Aufl. S. 118) vorgeschlagen, zur Zersetzung der Schmelze und Abscheidung der Kieselsäure statt der Salzsäure Salmiaklösung anzuwenden, weil man dabei die Flüssigkeit in offener Schale eindunsten kann, ohne einen Verlust durch Spritzen derselben zu erleiden, die Methode aber erst seit einiger Zeit weiter ausgearbeitet. In der Form, in der ich sie hier gebe, soll sie die

*) Vorgetragen und zum Druck übergeben in der Sitzung am 24. Juli 1882.

ältere übliche nicht entbehrlich machen. Da man aber bei Analysen von Silicaten, deren Resultate nicht zu einer bestimmten chemischen Formel führen, doch immer mindestens zwei Analysen macht, so empfiehlt es sich, die folgende Methode bei der zweiten Analyse zur Controle der ersten in Anwendung zu bringen.

Man schmilzt zuerst zwei Gramme des feingeriebenen Minerals mit zehn Grammen kohlens. Natron zusammen. Nach vollständigem Erkalten des Tiegels bringt man die Schmelze, welche stets von selbst ringsum vom Tiegel abspringt, in eine Schale von mindestens zwei Decimeter Durchmesser und übergiesst sie darin mit 200 Cub.-Centim. Wasser. In den Tiegel bringt man etwas Wasser, erhitzt dieses einmal bis zum Sieden, worauf sich alle Schmelze, welche sich höher im Tiegel durch Spritzen der Masse angesetzt hat, leicht loslöst, und giesst alles Waschwasser aus dem Tiegel mit in die Schale. Man lässt die Schale nun volle achtundvierzig Stunden bei gewöhnlicher Temperatur stehen. Die Schmelze quillt in reinem Wasser von selbst auf. Man rührt alle sechs bis acht Stunden einigemal mit dem Glasstabe um, bis der harte Kern derselben wieder bloss liegt und fügt nun erst die zur Zersetzung erforderliche Menge Salmiaklösung hinzu und dunstet damit zur Trockne*).

Hiernach übergiesst man den Inhalt der Schale mit destillirtem Wasser und lässt während einer Viertelstunde gelinde sieden.

---

*) Das Aufweichen erfolgt schneller, wenn man die Schale an einen mässig warmen Ort stellt. Unter keiner Bedingung darf man die Salmiaklösung früher hinzusetzen, als der Kern der Schmelze vollkommen aufgeweicht ist. Schmelzen mit grösseren Mengen kohlensaurem Natron, mit fünfzehn und zwanzig Grammen, giebt allerdings eine leichter lösliche Masse, man hat dafür aber auch wieder so viel mehr derselben zu lösen, so dass dabei kein Vortheil herauskommt. Am besten ist es, die Lösung in längerer Zeit bei gewöhnlicher Temperatur zu bewerkstelligen.

Die Salmiaklösung muss man selbst bereiten. Aller käufliche sogenannte reine Salmiak enthält in zehn Grammen bis an zwei Milligramme Kalk und Talkerde. Das erforderliche Quantum findet man, indem man einmal zehn Gramme kohlensaures Natron in Wasser löst, mit Lakmus färbt und nun conc. Salzsäure hinzusetzt, bis die Lösung sich röthet. Man wird hierzu in der Regel an dreissig Cub.-Centim. Salzsäure verbrauchen. Man misst darauf die doppelte Menge, also sechzig Cub.-Centim., Salzsäure ab und sättigt dieselbe vollständig mit Ammoniak, ein geringer Ueberschuss von letzterem schadet nicht, und mischt diese Lösung zu dem Inhalt der Schale.

Es gehen hierbei Manganchlorür, phosphorsaures Manganoxydul, der Kalk und die Talkerde in Lösung. Man filtrirt dieselbe ab und behält auf dem Filter ein Gemenge von freier in Wasser und Säuren unlöslich gewordener Kieselsäure mit den unzersetzt gebliebenen Silicaten der Sesquioxyde.

Aus dem Filtrate scheidet man zuerst das Manganoxydul und phosphorsaure Manganoxydul. Ist letzteres vorhanden, so geht die Lösung nur so lange klar durch das Filter, als sie concentrirt abfliesst. Später, wenn dieselbe durch weiteres Waschwasser verdünnt wird, scheidet sich das phosphorsaure Manganoxydul im Filtrate als eine milchweissliche Trübung aus, und macht hierdurch die Gegenwart von Spuren Phosphorsäure im Minerale kenntlich. Man wäscht, unbekümmert um diese Trübung, den Rückstand auf dem Filter vollständig aus, bis die ablaufende Flüssigkeit, mit Salpetersäure angesäuert und mit Silberlösung versetzt, keine Reaction auf Salzsäure mehr erkennen lässt und dunstet darauf alles Filtrat bis auf 150 C.C. in einer geräumigen Schale wieder ein. Die Abscheidung dieser geringen Mengen von Mangan macht bei diesem Verfahren dieselben Umstände wie bei dem alten bisher üblichen.

Man fällt nun das Mangan durch Schwefelammonium, das vorher völlig mit Schwefel gesättigt worden, oder besser, man oxydirt es durch Zusatz von Chlorwasser zu der mit Ammoniak etwas alkalisch gemachten Lösung, worauf es nach 4—6stündigem Stehen der Lösung in einem Wasserbade von 50—60° Cels. sich vollständig abscheidet, wenn man Sorge dafür trägt, die Flüssigkeit durch zeitweiligen Zusatz von Ammoniak stets alkalisch zu erhalten. Ist dieselbe während dieser Zeit einmal durch Ammoniakverlust sauer geworden, so löst sich von dem Manganoxydniederschlage etwas wieder auf und man muss von Neuem wieder Chlorwasser hinzusetzen und digeriren.

Hat sich der Niederschlag von Manganoxyd und phosphorsaurem Manganoxyd auf dem Boden der Schale in Flocken abgesondert, so ist die Flüssigkeit vollkommen klar und alle Kalkerde und Talkerde in Lösung.

Man filtrirt nun diese Lösung durch ein Filter, das die Grösse hat, später die ganze Kieselsäure aufnehmen zu können, die sich bis jetzt noch mit den Silicaten der Sesquioxyde auf dem ersten Filter befindet, wäscht es aus, dunstet das Filtrat mindestens auf 200 C. C. ein und fällt daraus in bekannter

Weise den Kalk mittels Oxalsäure und die Talkerde durch Phosphorsäure.

Hiernach schreitet man zur Bestimmung der Kieselsäure und der Sesquioxyde auf dem ersten Filter. Man breitet dasselbe auf der Glasplatte aus, schiebt den Inhalt mittels des Glasstabes in eine Schale, spritzt das Filter ab, presst es aus, trocknet und verbrennt es und spült die Asche mit Wasser mit in die Schale. Hiernach fügt man die hinreichende Menge Salzsäure hinzu und dunstet zur Trockne. Den Rückstand säuert man mit Salzsäure nicht zu schwach an, und filtrirt darauf die Kieselsäure durch dasselbe Filter, auf welchem man die Manganoxydausscheidungen gesammelt hat, welche letztere von der sauren Flüssigkeit nun wieder gelöst und nachher mit ausgewaschen werden. Auf dem Filter bleibt darnach die Kieselsäure rein zurück. Das Filtrat übersättigt man zuerst schwach mit Ammoniak, fügt darauf unter stetem Umrühren 100 C. C. frisch gesättigtes Chlorwasser hinzu, mischt einige Zeit und übersättigt stark mit Ammoniak und lässt zwölf Stunden stehen, um dann den Niederschlag von manganhaltigem Eisenoxyd und von der Thonerde abzufiltriren, der auch die vorhandenen geringen Mengen Phosphorsäure mit enthält. Das Eisen bestimmt man am besten in einer neu aufgeschlossenen Quantität durch Titriren mit Chamäleonlösung.

Bei dem Uebelstande, dass man bei Anwendung dieses zweiten Verfahrens die zuerst erhaltene Schmelze zwei Tage lang muss aufweichen lassen, der übrigens unmerklich wird, wenn man während dieser Zeit die Alkalibestimmung ausführt, hat die neue Methode einige Vorzüge vor der alten, üblichen. Man braucht beim Zersetzen der Schmelze durch Salmiak keinerlei Vorrichtung, um einen Verlust durch Spritzen der Flüssigkeit zu verhüten, wenn man dieselbe bei 80—90° C. abdunstet, und da man Kalk und Talkerde vor der Ausfällung der Sesquioxyde entfernt hat, so erhält man diese letzteren, wenn man ihre Lösung mit Ammoniak versetzt hat und zwölf Stunden lang stehen lässt, frei von Talkerde und von kohlensaurem Kalk. Ich muss zum Schluss allerdings noch bemerken, dass ich bisher nur solche Silicate unter den Händen hatte, welche einen geringen Gehalt an Kalk und Talkerde besassen und dass die neue Methode daher bei anderen Silicaten noch durch die ältere controlirt werden muss.

Es ist häufig erwünscht in Silicaten die Gegenwart des Fluors nachzuweisen, so z. B. in den Fällen, wo man in Dünnschliffen Rutil, Topas und Flussspath erkannt zu haben glaubt. Qualitativ findet man das Fluor leicht, wenn man das fein geriebene Silicat in eine kleine tubulirte Retorte bringt, reichlich mit conc. Schwefelsäure übergiesst und einen trocknen Luftstrom hindurchleitet, während man die Mischung in der Retorte auf 50 bis 60° C. erwärmt, und das entwickelte Fluorkieselgas in ein Reagensglas leitet, das man zu einem Drittel mit Aetzammoniaklösung gefüllt hat. Die Schwefelsäure veranlasst, wohl in Folge eines Rückhaltes von salpetriger Säure, dabei für sich allein zwar schon das Entstehen grauer Nebel über dem Spiegel der Flüssigkeit, auch dann, wenn man statt einer wässerigen Ammoniaklösung, Alkohol oder eine Mischung von Aether und Alkohol, die man vorher mit Ammoniakgas gesättigt hat, anwendet. Sobald aber Fluorkiesel mit übergeht, werden die Nebel intensiv weiss und bei etwas grösseren Mengen eines fluorhaltigen, so z. B. von fünf Centigrammen Kryolith, erscheint dann nach mehreren Stunden ein Absatz von Fluorkieselammonium, wenn man ammoniakalischen Aetheralkohol vorgelegt hat.

Das sicherste Verfahren aber, um über die Quantität solcher in Silicate eingesprengter fluorhaltiger Minerale ein Urtheil zu gewinnen, ist folgendes.

Man entwickelt wie vorhin durch Erwärmen des gepulverten Minerals in einer Retorte mit conc. Schwefelsäure Fluorkieselgas bei 50—60° Cels. und leitet das entwickelte Gas mittels eines Stromes trockner Luft aus der Retorte in einen engen Glascylinder von zwei Decimeter Höhe, der zu einem Viertel mit einer Lösung von einigen Decigrammen Anilin in 30 Cub.-Centim. einer Mischung von gleichen Theilen Alkohol und Aether angefüllt worden ist. Das Anilin muss man kurz vorher destillirt haben und farblos anwenden. Der Luftstrom muss so regulirt werden, dass pro Secunde eine einzige Luftblase durch die Anilinlösung hindurchgeht. Unterhält man den Luftstrom in solcher Weise volle zwei Stunden lang, so beobachtet man, wenn Fluor zugegen ist, gewöhnlich schon vor Ablauf der ersten Stunde die Ausbildung eines weissen Absatzes im unteren Ende des Gasleitungsrohres, soweit dieses in die Anilinlösung eintaucht, und bei Mengen Fluor, welche fünf Centigrammen Kryolith ent-

wickeln, eine starke Trübung durch ausgeschiedenes Fluorkieselanilin.

Ein Centigramm Kryolith, der 54 p.Ct. Fluor enthält, giebt diesen Beschlag auch noch. Derselbe lässt sich mit der Federfahne leicht loslösen und durch Eintauchen in die Flüssigkeit, indem man diese einigemal durch Ansaugen des Gasleitungsrohres aufsteigen lässt, ausspülen. Setzt man hiernach etwa drei Tropfen einer mässig concentrirten Lösung von Aetznatron in absolutem Alkohol hinzu, so verliert die krystallinisch flimmernde Trübung dieses Ansehen und es legt sich binnen einer Viertelstunde eine Wolke von ausgeschiedenem Fluorkieselnatrium auf den Boden des Cylinders, von der Dicke, dass man den fünften Theil davon noch vollkommen würde erkennen können. Ich glaube daher, dass man ein Milligramm Fluor auf diesem Wege noch mit Sicherheit nachweisen kann.

Dass man erst eine Anilinlösung und nicht gleich eine Lösung von Aetznatron in Aetheralkohol anwendet, hat den Grund, die Ausscheidung von kohlensaurem Natron zu verhüten, das sich möglicher Weise bilden könnte, wenn man einen mittels Schwefelsäure getrockneten Luftstrom so lange Zeit durch die Lösung leitete. Vielleicht lässt sich annähernd das Fluor quantitativ auf die Weise bestimmen, dass man diesen Niederschlag auf einem Filter von bekanntem Aschengehalt sammelt, trocknet und sammt Filter mit Schwefelsäure erhitzt und zuletzt glüht, um aus dem erhaltenen Gewicht schwefelsauren Natrons das Fluor zu berechnen.

**F. Engel**, *Ueber lineare partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung*; vorgelegt von A. Mayer*).

Die folgende Note bezweckt nur eine einfache Methode zu entwickeln zur Auffindung der allgemeinen Lösung gewisser Differentialgleichungen von der Form:

$$\text{I)}\quad \alpha \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + 2\beta \frac{\partial^2 t}{\partial x \partial y} + \gamma \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \delta \frac{\partial t}{\partial x} + \varepsilon \frac{\partial t}{\partial y} = \varkappa t + \zeta,$$

wobei $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$, $\varepsilon$, $\zeta$, $\varkappa$ gegebene Functionen von $x$, $y$ allein sind. Dabei wird sich von selbst die Reduction der Form I) auf einige einfachere Typen darbieten; doch ist dies zunächst noch Nebenzweck.

§ 1.

Das System linearer partieller Differentialgleichungen erster Ordnung:

$$1)\left\{\begin{aligned} &\lambda \frac{\partial u}{\partial x} + \mu \frac{\partial u}{\partial y} = \varkappa t + \zeta, \\ &\nu \frac{\partial t}{\partial x} + \varrho \frac{\partial t}{\partial y} = u \end{aligned}\right.$$

ist, wie die Elimination von $u$ zeigt, äquivalent der lin. part. Diffgl. 2. O.:

$$2)\left\{\begin{aligned} &\lambda \nu \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + (\lambda \varrho + \mu \nu) \frac{\partial^2 t}{\partial x \partial y} + \mu \varrho \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} \\ &+ \left(\lambda \frac{\partial \nu}{\partial x} + \mu \frac{\partial \nu}{\partial y}\right) \frac{\partial t}{\partial x} + \left(\lambda \frac{\partial \varrho}{\partial x} + \mu \frac{\partial \varrho}{\partial y}\right) \frac{\partial t}{\partial y} \end{aligned}\right\} = \varkappa t + \zeta.$$

Soll nun umgekehrt die Gleichung I) auf ein System 1) zurückführbar sein, so muss dieselbe die Form 2) besitzen, d. h. es muss möglich sein durch Bestimmung der vier Grössen $\lambda$, $\mu$, $\nu$, $\varrho$ den fünf Gleichungen:

$$3)\left\{\begin{aligned} &\alpha = \lambda \nu,\ 2\beta = \lambda \varrho + \mu \nu, \quad \gamma = \mu \varrho, \\ &\delta = \lambda \frac{\partial \nu}{\partial x} + \mu \frac{\partial \nu}{\partial y}, \quad \varepsilon = \lambda \frac{\partial \varrho}{\partial x} + \mu \frac{\partial \varrho}{\partial y} \end{aligned}\right.$$

identisch zu genügen.

---

*) Zum Druck übergeben in der Sitzung am 24. Juli 1882.

Um nun die Bedingung für die Verträglichkeit der Gleichungen 3) zugleich mit den eventuellen Auflösungen nach $\lambda$, $\mu$, $\nu$, $\varrho$ zu finden, drücken wir zunächst $\lambda$, $\mu$ durch $\nu$, $\varrho$ aus, was auf algebraischem Wege ausführbar ist; dabei bleiben uns für $\nu$, $\varrho$ noch drei Gleichungen übrig, deren Auflösbarkeit über die Auflösbarkeit der Gleichungen 3) entscheidet.

Sind $\alpha$ und $\gamma$ nicht beide Null, so kann man die Bezeichnung der Variablen $x$ und $y$ so wählen, dass $\alpha$ nicht Null ist, wobei dann auch $\nu$ verschieden von Null wird. Nach Erledigung des Falles $\alpha \neq 0$ wird dann später nur noch der Fall $\alpha = \gamma = 0$ für sich zu betrachten sein.

Aus 3) folgt:

$\lambda \varrho + \mu \nu = 2 \beta,$

$\lambda \varrho - \mu \nu = \pm 2 \sqrt{\beta^2 - \alpha \gamma} = 2 \Delta,$ wie wir abkürzend schreiben wollen; also:

$$\lambda \varrho = \beta + \Delta, \quad \mu \nu = \beta - \Delta \text{ und:}$$

$$\lambda = \frac{\alpha}{\nu}, \quad \mu = \frac{\beta - \Delta}{\nu}, \quad \frac{\varrho}{\nu} = \frac{\beta + \Delta}{\alpha}.$$

Die Werthe von $\lambda$, $\mu$ in den letzten beiden Gleichungen 3) eingesetzt giebt:

$$\nu \delta = \alpha \frac{\partial \nu}{\partial x} + (\beta - \Delta) \frac{\partial \nu}{\partial y},$$

$$\nu \varepsilon = \alpha \frac{\partial \varrho}{\partial x} + (\beta - \Delta) \frac{\partial \varrho}{\partial y}.$$

Widersprechen diese Gl. der dritten Relation zwischen $\nu$ und $\varrho$ nicht, d. h. ergeben sie $\frac{\varrho}{\nu} = \frac{\beta + \Delta}{\alpha}$, so ist das System 3) wirklich auflösbar und wir können sofort die Werthe von $\lambda$, $\mu$, $\nu$, $\varrho$ angeben.

Bildet man: $-\nu \delta \cdot \frac{\varrho}{\nu^2} + \nu \varepsilon \cdot \frac{1}{\nu}$, so kommt:

$$\varepsilon - \delta \cdot \frac{\varrho}{\nu} = \alpha \frac{\partial}{\partial x} \frac{\varrho}{\nu} + (\beta - \Delta) \frac{\partial}{\partial y} \frac{\varrho}{\nu}$$

und dieser Differentialgleichung muss $\frac{\varrho}{\nu} = \frac{\beta + \Delta}{\alpha}$ genügen. — Setzen wir noch:

4) $K = \varepsilon - \frac{\beta + \Delta}{\alpha} \delta - \alpha \frac{\partial}{\partial x} \frac{\beta + \Delta}{\alpha} - (\beta - \Delta) \frac{\partial}{\partial y} \frac{\beta + \Delta}{\alpha},$

so wird die Bedingung für die Auflösbarkeit von 3): $K \equiv 0$ für eines der beiden Zeichen von $\Delta$.

Ist nun wirklich $K \equiv 0$, so ergeben sich folgende Werthe der $\lambda$, $\mu$, $\nu$, $\varrho$ als Auflösungen von 3):

$$5)\quad \begin{cases} \delta\nu = \alpha\frac{\partial\nu}{\partial x} + (\beta - \Delta)\frac{\partial\nu}{\partial y}, & \varrho = \frac{\beta + \Delta}{\alpha}\nu \\ \lambda = \frac{\alpha}{\nu}, & \mu = \frac{\beta - \Delta}{\nu}, \end{cases}$$

wo der Grösse $\Delta$ dasjenige Zeichen beizulegen ist, für welches die Relation $K \equiv 0$ erfüllt ist.

In Worten lautet dieses Ergebniss: »Ist unter der Voraussetzung $\alpha \neq 0$ die durch 4) definirte Grösse $K$ für eines der beiden Zeichen von $\Delta \equiv 0$, so ist die Gleichung I) einem System von der Form 1) aequivalent, dessen Coefficienten $\lambda$, $\mu$, $\nu$, $\varrho$ sich aus den Gleichungen 5) ergeben.«

$\nu$ bestimmt sich durch Integration der gewöhnlichen Differentialgleichung 1. Ordnung zwischen $x$ u. $y$: $\alpha dy - (\beta - \Delta)dx = 0$ und durch eine Quadratur.

Noch bleibt der specielle Fall $\alpha = \gamma = 0$ zu betrachten, in welchem die Gleichungen 3) die Gestalt annehmen:

$$3a)\quad \begin{cases} \lambda\nu = 0, \quad \mu\varrho = 0, \quad \delta = \lambda\frac{\partial\nu}{\partial x} + \mu\frac{\partial\nu}{\partial y}, \\ 2\beta = \lambda\varrho + \mu\nu, \quad \varepsilon = \lambda\frac{\partial\varrho}{\partial x} + \mu\frac{\partial\varrho}{\partial y}. \end{cases}$$

Wir wollen nun annehmen, dass, wenn eine der beiden Grössen $\delta$ und $\varepsilon$ nicht $= 0$ ist, dies $\delta$ sei, so dass also $\nu$ wieder nicht verschwinden darf. Dann bleibt nur noch die Möglichkeit $\lambda = \varrho = 0$, um den ersten Gleichungen 3a) zu genügen, das zieht aber $\varepsilon = 0$ nach sich, so dass also die Bedingung für die Auflösbarkeit der Gleichungen 3a) wird:

$$4a)\quad \varepsilon = 0.$$

Die Auflösungen selbst aber werden:

$$5a)\quad \lambda = \varrho = 0, \quad \delta\nu = 2\beta\frac{\partial\nu}{\partial y}, \quad \mu = \frac{2\beta}{\nu}$$

und zwar gelten diese Ausdrücke auch dann, wenn $\delta = \varepsilon = 0$.

Damit sind offenbar alle Fälle, in denen eine Differentialgleichung I) einem Systeme 1) äquivalent sein kann, erschöpft.

## § 2.

Ist nun 4) respective 4a) nicht erfüllt, ist also I) nicht an und für sich schon einem System 1) aequivalent, so ist es doch

noch möglich (mit einer Ausnahme allerdings) die Gleichung I) so zu transformiren, dass nach der Transformation die Gleichung 4) respective 4a) identisch besteht. Dies lässt sich aber nicht durch Einführung neuer Variablen $\xi$, $\eta$ an Stelle von $x$, $y$ erreichen; denn sind die $\xi$, $\eta$ wirklich unabhängige Functionen der $x$, $y$, was ja nöthig ist, so kann das neue $K$, welches die Transformation ergiebt, ebensowenig verschwinden wie das alte.

Wir müssen vielmehr für $t$ eine neue Unbekannte $w$ einführen, welche eine Function von $x$, $y$, $t$ ist und zwar muss diese Umformung die Gestalt haben $t = \tau w + v$, wo $\tau$ und $v$ noch unbestimmte Functionen von $x$, $y$ allein sind, denn nur in diesem Falle bleibt die Gleichung I) bei der Transformation linear.

$v$ können wir hier sofort $= 0$ setzen und so geht die Gleichung I) durch die Substitution $t = w\tau$ über in:

$$\text{I}')\quad \alpha' \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2\beta' \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \gamma' \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \delta' \frac{\partial w}{\partial x} + \varepsilon' \frac{\partial w}{\partial y} = \varkappa' w + \zeta'$$

und zwar ist:

$$6)\quad \begin{cases} \alpha' = \alpha\tau,\ \beta' = \beta\tau,\ \gamma' = \gamma\tau,\ \varDelta' = \sqrt{\beta'^2 - \alpha'\gamma'} = \varDelta\tau, \\ \delta' = 2\alpha \frac{\partial \tau}{\partial x} + 2\beta \frac{\partial \tau}{\partial y} + \delta\tau, \\ \varepsilon' = 2\beta \frac{\partial \tau}{\partial x} + 2\gamma \frac{\partial \tau}{\partial y} + \varepsilon\tau, \\ \varkappa' = \varkappa\tau - \alpha \frac{\partial^2 \tau}{\partial x^2} - 2\beta \frac{\partial^2 \tau}{\partial x \partial y} - \gamma \frac{\partial^2 \tau}{\partial y^2} - \delta \frac{\partial \tau}{\partial x} - \varepsilon \frac{\partial \tau}{\partial y}, \\ \zeta' = \zeta. \end{cases}$$

Soll nun die neue Gleichung I') — wir nehmen zunächst wieder $\alpha \neq 0$ an — einem Systeme 4) äquivalent sein, so muss für eines der beiden Zeichen von $\varDelta'$ die Gleichung bestehen:

$$K' = \varepsilon' - \frac{\beta' + \varDelta'}{\alpha'}\delta' - \alpha' \frac{\partial}{\partial x}\frac{\beta' + \varDelta'}{\alpha'} - (\beta' - \varDelta')\frac{\partial}{\partial y}\frac{\beta' + \varDelta'}{\alpha'} \equiv 0.$$

Die Werthe 6) hierin eingesetzt geben:

$$K' = -2\varDelta\left\{\frac{\partial \tau}{\partial x} + \frac{\beta + \varDelta}{\alpha}\frac{\partial \tau}{\partial y}\right\} + \tau K;$$

man erhält also für $\tau$ die Differentialgleichung:

$$7)\quad \frac{\partial \tau}{\partial x} + \frac{\beta + \varDelta}{\alpha}\frac{\partial \tau}{\partial y} = + \frac{\tau}{2\varDelta} K.$$

Für jede Lösung $\tau$ dieser Gleichung 7) wird I') einem Systeme 4) äquivalent, ausgenommen wenn $\varDelta = 0$.

Ist $\Delta = 0$, so wird $K' = \tau K$, also ist dann die transformirte Differentialgleichung I') zugleich mit I) einem System 1) äquivalent oder nicht.

Ist in I) speciell $\alpha = \gamma = 0$, aber $\delta$ und $\varepsilon$ beide $\neq 0$, also 4a) nicht erfüllt, so erhält man das Gleichungssystem:

$$6a)\quad \begin{cases} \alpha' = \gamma' = 0, \quad \beta' = \beta\,\tau, \\ \delta' = 2\beta\dfrac{\partial\tau}{\partial y} + \delta\,\tau, \quad \varepsilon' = 2\beta\dfrac{\partial\tau}{\partial x} + \varepsilon\,\tau, \\ \varkappa' = \varkappa\,\tau - 2\beta\dfrac{\partial^2\tau}{\partial x\partial y} - \delta\dfrac{\partial\tau}{\partial x} - \varepsilon\dfrac{\partial\tau}{\partial y}. \end{cases}$$

Soll nun die neue Gleichung I') einem System 1) äquivalent sein, so muss $\varepsilon'$ verschwinden, also $\tau$ eine Lösung sein der Gleichung:

$$7a)\quad 2\beta\frac{\partial\tau}{\partial x} + \varepsilon\,\tau = 0\,.$$

Diese Resultate lassen sich so aussprechen:

»Jede Gleichung I) in der $\Delta \neq 0$ ist, lässt sich durch Integration einer gewöhnlichen Differentialgleichung zwischen $x$, $y$ und eine Quadratur auf eine Form bringen, in der sie einem Systeme 1) äquivalent ist.«

Die Aufstellung des Systems 1) selbst erfordert noch die Bestimmung von $\nu$ aus der Gleichung:

$$\delta'\,\nu = \alpha'\frac{\partial\nu}{\partial x} + (\beta' - \Delta')\frac{\partial\nu}{\partial y},$$

wobei hier immer dasselbe Zeichen von $\Delta'$ und $\Delta$ zu wählen ist, welches vorher in 7) genommen war, und umgekehrt.

Die Gleichung für $\nu$ nimmt nun nach 6) die Gestalt an:

$\dfrac{\delta'\nu}{\tau} = \alpha\dfrac{\partial\nu}{\partial x} + (\beta - \Delta)\dfrac{\partial\nu}{\partial y}$, wo für $\tau$ die Lösung von 7) zu setzen ist.

Die Ermittelung von $\tau$ und $\nu$ erfordert also sicher die Integration der beiden Differentialgleichungen $\alpha\,dy - (\beta \pm \Delta)\,dx = 0$ und ausserdem noch zwei Quadraturen. Das ist aber der ungünstigste Fall; ist $\alpha = \gamma = 0$, so hat man nur Quadraturen auszuführen, um $\tau$ und $\nu$ und damit das System 1) zu bestimmen.

»Die vollständige Zurückführung einer Gleichung I), in der $\Delta \neq 0$ ist, auf ein System 1) erfordert im ungünstigsten Falle die Integration zweier gewöhnlicher Differentialgleichungen 1. Ordnung und zwei Quadraturen.«

Die beiden Gleichungen $\alpha\, dy - (\beta \pm \varDelta)\; dx = 0$ lassen sich in die eine zusammenziehen:

$$\alpha\, dy^2 - 2\,\beta\, dx\; dy + \gamma\, dx^2 = 0\,,$$

denn der Factor $\alpha$, den wir ja verschieden von Null annahmen, kann weggelassen werden. $\alpha\, dy^2 - 2\beta\, dx\, dy + \gamma\; dx^2 = 0$ ist aber die Gleichung der Charakteristiken der Gleichung I) und diese Charakteristiken spielen in allen Theorien der linearen partiellen Differentialgleichungen 2. Ordnung besonders seit *Ampère* eine grosse Rolle. Wir werden es mehr mit den linearen partiellen Differentialgleichungen 1. Ordnung von der Form 7) zu thun haben.

## § 3.

Das System 1) lässt sich immer allgemein integriren, wenn $\varkappa = 0$ ist, denn in diesem Falle bestimmt sich ja $u$ durch eine lineare partielle Differentialgleichung 1. Ordnung und $t$ desgleichen, wenn einmal $u$ bekannt ist.

Es liegt daher die Frage nahe, wann sich eine Gleichung I) so umformen lässt, dass sie einem Systeme 1) äquivalent wird, bezüglich bleibt, dabei aber die unbekannte Function selbst nicht mehr enthält.

Es sei wieder $\alpha \neq 0$ und $\varDelta \neq 0$. Die neue Differentialgleichung soll einem System 1) äquivalent sein, also muss die anzuwendende Substitution die Form haben: $t = \tau\, w$, wo $\tau$ eine Lösung von 7) ist. Verlangt man ausserdem noch, dass die neue Gleichung I') $w$ nicht enthalte, so muss $\varkappa' = 0$ werden, d. h. es muss $\tau$ ausserdem noch eine Lösung der folgenden Gleichung sein:

$$8)\quad \alpha\frac{\partial^2\tau}{\partial x^2} + 2\,\beta\,\frac{\partial^2\tau}{\partial x\,\partial y} + \gamma\,\frac{\partial^2\tau}{\partial y^2} + \delta\,\frac{\partial\tau}{\partial x} + \varepsilon\,\frac{\partial\tau}{\partial y} = \varkappa\,\tau.$$

Jede Lösung $\tau$ von 7) genügt nun identisch den folgenden Differentialgleichungen:

$$7)\quad \frac{\partial\tau}{\partial x} + \frac{\beta+\varDelta}{\alpha}\frac{\partial\tau}{\partial y} = \tau\,\frac{K}{2\varDelta}\,,$$

$$\frac{\partial^2\tau}{\partial x^2} + \frac{\beta+\varDelta}{\alpha}\,\frac{\partial^2\tau}{\partial x\;\partial y} + \frac{\partial\tau}{\partial y}\,\frac{\partial}{\partial x}\,\frac{\beta+\varDelta}{\alpha} = \tau\,\frac{\partial}{\partial x}\,\frac{K}{2\varDelta} + \frac{K}{2\varDelta}\,\frac{\partial\tau}{\partial x}\,,$$

$$\frac{\partial^2\tau}{\partial x\partial y} + \frac{\beta+\varDelta}{\alpha}\,\frac{\partial^2\tau}{\partial y^2} + \frac{\partial\tau}{\partial y}\,\frac{\partial}{\partial y}\,\frac{\beta+\varDelta}{\alpha} = \tau\,\frac{\partial}{\partial y}\,\frac{K}{2\varDelta} + \frac{K}{2\varDelta}\,\frac{\partial\tau}{\partial y}\,.$$

Diese drei Gleichungen multipliciren wir respective mit

$\delta, \alpha, \beta - \varDelta$, addiren alles und unter Benutzung der Gleichung 4), der Definitionsgleichung von $K$, bekommen wir:

$$\alpha \frac{\partial^2 \tau}{\partial x^2} + 2\beta \frac{\partial^2 \tau}{\partial x \partial y} + \gamma \frac{\partial^2 \tau}{\partial y^2} + \delta \frac{\partial \tau}{\partial x} + \varepsilon \frac{\partial \tau}{\partial y} - K \frac{\partial \tau}{\partial y} =$$

$$= + \frac{K}{2\varDelta} \left\{ \alpha \frac{\partial \tau}{\partial x} + (\beta - \varDelta) \frac{\partial \tau}{\partial y} \right\}$$

$$+ \tau \left\{ \alpha \frac{\partial}{\partial x} \frac{K}{2\varDelta} + (\beta - \varDelta) \frac{\partial}{\partial y} \frac{K}{2\varDelta} + \delta \frac{K}{2\varDelta} \right\}.$$

Diese Gleichung reducirt sich noch bedeutend, weil $\tau$ der Gleichung 7) genügt, und wir finden, dass $\tau$ mit 7) zugleich eine Lösung ist der Differentialgleichung:

$$9) \quad \alpha \frac{\partial^2 \tau}{\partial x^2} + 2\beta \frac{\partial^2 \tau}{\partial x \partial y} + \gamma \frac{\partial^2 \tau}{\partial y^2} + \delta \frac{\partial \tau}{\partial x} + \varepsilon \frac{\partial \tau}{\partial y} =$$

$$= \tau \left\{ \alpha \frac{\partial}{\partial x} \frac{K}{2\varDelta} + (\beta - \varDelta) \frac{\partial}{\partial y} \frac{K}{2\varDelta} + \delta \frac{K}{2\varDelta} + \alpha \left( \frac{K}{2\varDelta} \right)^2 \right\}.$$

Die Vergleichung mit 8) zeigt sofort, dass $\tau$ nur dann eine Lösung von 8) sein kann, wenn für eines der beiden Zeichen von $\varDelta$ identisch stattfindet die Gleichung:

$$10) \quad \varkappa = \left\{ \alpha \frac{\partial}{\partial x} \frac{K}{2\varDelta} + (\beta - \varDelta) \frac{\partial}{\partial y} \frac{K}{2\varDelta} + \delta \frac{K}{2\varDelta} + \alpha \left( \frac{K}{2\varDelta} \right)^2 \right\}.$$

»Ist $\alpha \neq 0$, $\varDelta \neq 0$ und 10) identisch erfüllt, so bringt jede Lösung $\tau$ von 7) die Gleichung I) auf die Form I') und es wird $\varkappa' = 0$, I') aber einem System 1) äquivalent.«

Ist hingegen 10) nicht identisch erfüllt, so ist es mit unsern Mitteln nicht möglich, I) auf eine Form I') zu bringen, die einem System 1) äquivalent wird und für die $\varkappa'$ verschwindet.

Hier wollen wir noch des Falles $\varDelta = 0$ gedenken. Wenden wir auf eine Gleichung I), in der $\varDelta = 0$ ist, die Substitution $t = \tau w$ an, so ist die erhaltene Gleichung I') immer zugleich mit I) einem Systeme 1) äquivalent oder nicht. Wenn daher nur $\tau$ eine Lösung der Gleichung 8) ist, wird $\varkappa$ immer $= 0$, also I') von $w$ frei werden.

»Ist $\varDelta = 0$, so braucht man nur eine Lösung $\tau$ der verkürzten Gleichung I), nämlich der Gleichung 8) zu kennen, um durch die Substitution $t = \tau w$ eine Differentialgleichung I') zu erhalten, in der $\varkappa' = 0$ ist, also $w$ selbst nicht vorkommt.

§ 4.

Wir untersuchten vorhin, wann eine Lösung $\tau$ von 7 zugleich die Gleichung 8), welche für $\zeta = 0$ aus I) entsteht, befriedigt; um nunmehr das $\zeta$ der Gleichung I) mit zu berücksichtigen, ersetzen wir 7) durch die allgemeinere Form:

$$11) \qquad \frac{\partial \tau}{\partial x} + \frac{\beta + \Delta}{\alpha} \frac{\partial \tau}{\partial y} = \tau \frac{K}{2\Delta} + \sigma ,$$

wo $\sigma$ eine uns ganz zur Verfügung stehende Function von $x, y$ ist. Wir fragen dann, unter welchen Bedingungen genügt eine Lösung von 11) zugleich der Gleichung I), und so werden wir eine Methode gewinnen, eine ganze Classe von Differentialgleichungen der Form I) allgemein zu integriren.

Eine ganz ähnliche Rechnung wie die bei der Ableitung von 9) aus 7) durchgeführte zeigt, dass jede Lösung $\tau$ von 11 zugleich auch der Differentialgleichung genügt:

$$12) \quad \alpha \frac{\partial^2 \tau}{\partial x^2} + 2\beta \frac{\partial^2 \tau}{\partial x \partial y} + \gamma \frac{\partial^2 \tau}{\partial y^2} + \delta \frac{\partial \tau}{\partial x} + \varepsilon \frac{\partial \tau}{\partial y} =$$

$$= \left[ \begin{array}{l} + \tau \left\{ \alpha \frac{\partial}{\partial x} \frac{K}{2\Delta} + (\beta - \Delta) \frac{\partial}{\partial y} \frac{K}{2\Delta} + \delta \frac{K}{2\Delta} + \alpha \left( \frac{K}{2\Delta} \right)^2 \right\} \\ + \delta \sigma + \alpha \frac{\partial \sigma}{\partial x} + (\beta - \Delta) \frac{\partial \sigma}{\partial y} + \alpha \frac{K}{2\Delta} \sigma \end{array} \right].$$

Die Gleichung 12) geht aber in I) über, wenn 10) erfüllt ist und ausserdem $\sigma$ der Gleichung genügt:

$$13) \qquad \alpha \frac{\partial \sigma}{\partial x} + (\beta - \Delta) \frac{\partial \sigma}{\partial y} + \sigma \left( \delta + \alpha \frac{K}{2\Delta} \right) = \zeta .$$

In 11) und 13) ist natürlich das Zeichen von $\Delta$ zu wählen, für welches 10) identisch besteht. Wir haben also:

»Ist $\alpha \neq 0$ $\Delta \neq 0$, und 10) erfüllt, so ist jede Lösung $\tau$ der Gleichung 11), darin für $\sigma$ eine Lösung von 13) gesetzt, auch eine Lösung von I).«

Aber noch mehr: unter Voraussetzung 10) ist die Gleichung I) weiter nichts als das Resultat der Elimination von $\sigma$ aus 11) und 13), und so ergiebt sich:

»Die Gleichung I) ist unter der Voraussetzung 10) aequivalent dem System linearer partieller Differentialgleichungen 1. Ordnung 11) und 13), darin nur $t$ für $\tau$ gesetzt.«

Die allgemeine Lösung $\tau$ des Systems 11) 13), ist daher auch allgemeine Lösung von I). Nun bestimmt aber die Gleichung 13

die Function $\sigma$, dieser Werth in 11) eingesetzt giebt eine lineare partielle Differentialgleichung 1. Ordnung für $\tau$, die auch lösbar ist. Die vollständige Integration des Systems 11) 13) erfordert daher die Integration der beiden Differentialgleichungen der Charakteristiken von I) und sonst nur noch Quadraturen. Auf I) übertragen, giebt das:

»Ist $\alpha \neq 0$, $\varDelta \neq 0$ und 10) erfüllt, so lässt sich die Gleichung I) allgemein integriren und zwar sind dazu nöthig die Integration zweier gewöhnlicher Differentialgleichungen und blosse Quadraturen.«

Erwähnt sei hier noch, dass die allgemeine Lösung von I) sich sofort hinschreiben lässt in dem Falle $\varkappa = 0$, $\zeta = 0$ und $K \equiv 0$ für beide Zeichen von $\varDelta$.

Hier ist $\sigma = 0$ eine Lösung der Gleichung 13) und da 10) für jedes der beiden Zeichen von $\varDelta$ erfüllt wird, so ist jede Lösung der beiden Gleichungen:

11′) $$\frac{\partial \tau}{\partial x} + \frac{\beta \pm \varDelta}{\alpha} \frac{\partial \tau}{\partial y} = 0$$

eine Lösung von I). Man braucht daher nur die beiden Differentialgleichungen $\alpha\, dy - (\beta \pm \varDelta)\, dx = 0$ zu integriren; zwei willkürliche Functionen ihrer respectiven Integrale geben addirt die allgemeine Lösung von I).

Beispiel. (I) $x^2 \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + x \frac{\partial t}{\partial x} = 0.$

$$\alpha = x^2, \quad \beta = 0, \quad \gamma = 1, \quad \delta = x, \quad \varepsilon = \varkappa = \zeta = 0,$$

$$\varDelta = \pm i x, \quad K = \mp i - x^2 \frac{\partial}{\partial x}\left(\pm \frac{i}{x}\right) \equiv 0,$$

also besteht 10) für beide Zeichen von $\varDelta$.

Die Gleichungen 11′) werden: $\frac{\partial t}{\partial x} \pm \frac{i}{x} \frac{\partial t}{\partial y} = 0$.

$$\frac{dx}{x} = \pm i dy, \quad x e^{\mp i y} = \text{const.}$$

$t = \varphi\left(x e^{iy}\right) + \psi\left(x e^{-iy}\right)$ ist daher die allgemeine Lösung von I).

Der Fall $\alpha = \gamma = 0$ lässt eine ganz analoge Behandlung zu, wie der allgemeine $\alpha \neq 0$, doch wollen wir die Rechnung hier nicht durchführen, denn das Resultat ist wesentlich dasselbe. Es ergiebt sich demnach:

Für alle Gleichungen I), welche $\Delta \neq 0$ haben und 10) befriedigen, ist die Zurückführung auf ein System 1) unnöthig, da für sie ein System 11) 13) existirt, welches sofort aufgestellt werden kann und die allgemeine Integration von I) ermöglicht.

§ 5.

Man kann nun umgekehrt ein System 11) 13) mit unbestimmten Coefficienten analog dem System 1) aufstellen und die Gleichung I) untersuchen, welcher ein solches System 11) 13) äquivalent ist. Darauf wollen wir aber jetzt nicht eingehen, sondern um die Reduction solcher Differentialgleichungen I) durchzuführen, welche 10) nicht erfüllen, kehren wir zu dem System 1) zurück, auf welches jede Gleichung I) zurückgeführt werden konnte, ausgenommen den unter allen Gleichungen I) überhaupt sehr exceptionellen Fall:

$$\Delta = 0, \quad \text{aber } K \neq 0.$$

Diesen Fall schliessen wir aus und können daher voraussetzen, dass die Gleichung I) schon die Form hat, in welcher sie einem System 1) äquivalent ist, dass also $K \equiv 0$ ist für eines der beiden Zeichen von $\Delta$. Unter dieser Voraussetzung erhalten wir für I) immer ein System von der Form:

$$1)\begin{cases} \lambda \frac{\partial u}{\partial x} + \mu \frac{\partial u}{\partial y} = \varkappa\, t + \zeta, \\ \nu \ \frac{\partial t}{\partial x} + \ \varrho \ \frac{\partial t}{\partial y} = u\,. \end{cases}$$

Hieraus aber erhält man unter Benutzung der Gleichungen 5):

$$14)\quad\begin{cases} \alpha \frac{\partial u}{\partial x} + (\beta - \Delta) \frac{\partial u}{\partial y} = \nu\,(\varkappa\, t + \zeta) \\ \alpha \frac{\partial t}{\partial x} + (\beta + \Delta) \frac{\partial t}{\partial y} = \frac{\alpha}{\nu}\, u, \end{cases}$$

wobei $\nu$ bestimmt ist durch:

$$\delta\, \nu = \alpha \frac{\partial \nu}{\partial x} + (\beta - \Delta) \frac{\partial \nu}{\partial y}\,.$$

Jetzt vereinfachen wir das System 14) und damit zugleich die zugehörige Differentialgleichung 2. Ordnung für $t$ durch Einführung neuer unabhängiger Variablen $\xi$, $\eta$ an Stelle von $x, y$, wo die $\xi$, $\eta$ natürlich unabhängige Functionen von $x$, $y$ sein müssen. Hierdurch gehen die Gleichungen 14) über in:

$$
15)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial \xi}\left(\alpha \dfrac{\partial \xi}{\partial x} + (\beta - \varDelta)\dfrac{\partial \xi}{\partial y}\right) + \dfrac{\partial u}{\partial \eta}\left\{\alpha \dfrac{\partial \eta}{\partial x} + (\beta - \varDelta)\dfrac{\partial \eta}{\partial y}\right\} = \nu(\varkappa t + \zeta), \\ \dfrac{\partial t}{\partial \xi}\left(\alpha \dfrac{\partial \xi}{\partial x} + (\beta + \varDelta)\dfrac{\partial \xi}{\partial y}\right) + \dfrac{\partial t}{\partial \eta}\left\{\alpha \dfrac{\partial \eta}{\partial x} + (\beta + \varDelta)\dfrac{\partial \eta}{\partial y}\right\} = \dfrac{\alpha}{\nu}\, u\,. \end{cases}
$$

Bei den Gleichungen 15) sind zwei Fälle zu unterscheiden:

I. Fall. $\varDelta \neq 0$. Wir können dann $\xi$, $\eta$ so bestimmen, dass in 15) $\frac{\partial u}{\partial \xi}$ und $\frac{\partial t}{\partial \eta}$ wegfallen, wenn wir nämlich $\xi$, $\eta$ definiren durch die Gleichungen:

$$
16)\quad \begin{cases} \alpha \dfrac{\partial \xi}{\partial x} + (\beta - \varDelta)\dfrac{\partial \xi}{\partial y} = 0\,, \\ \alpha \dfrac{\partial \eta}{\partial x} + (\beta + \varDelta)\dfrac{\partial \eta}{\partial y} = 0\,. \end{cases}
$$

Dabei erhält das System 15) die Form:

$$
-2\frac{\partial u}{\partial \eta}\varDelta\frac{\partial \eta}{\partial y} = (\varkappa t + \zeta)\,\nu
$$

$$
2\frac{\partial t}{\partial \xi}\varDelta\frac{\partial \xi}{\partial y} = \frac{\alpha}{\nu}\,u\,.
$$

In der Differentialgleichung für $t$, welche sich hieraus ergiebt, kommen nur $\frac{\partial^2 t}{\partial \xi\,\partial \eta}$, $\frac{\partial t}{\partial \xi}$ noch vor, d. h.

»Jede Differentialgleichung I), in der $\varDelta \neq 0$ ist, kann auf die Form gebracht werden:

$$
17)\quad 2\beta'\frac{\partial^2 t}{\partial \xi\,\partial \eta} + \delta'\frac{\partial t}{\partial \xi} = \varkappa' t + \zeta
$$

und zwar erfordert diese Reduction ausser der Integration der beiden Differentialgleichungen der Charakteristiken von I) nur noch Quadraturen.«

II. Fall. $\varDelta = 0$.

In diesem Falle verschwinden $\frac{\partial u}{\partial \eta}$ und $\frac{\partial t}{\partial \eta}$ aus den Gleichungen 15), wenn man $\eta$ definirt durch: $\alpha\frac{\partial \eta}{\partial x} + \beta\frac{\partial \eta}{\partial y} = 0.$

Man kann daher noch eine Bedingung hinzufügen, etwa dass die zweite Gleichung 15) die Form annehmen soll: $\frac{\partial u}{\partial \xi} = t$, und erhält so die Bedingungen:

$$
18)\quad \begin{cases} \nu\left(\alpha\dfrac{\partial \xi}{\partial x} + \beta\dfrac{\partial \xi}{\partial y}\right) = \alpha, \\ \alpha\dfrac{\partial \eta}{\partial x} + \beta\dfrac{\partial \eta}{\partial y} = 0. \end{cases}
$$

Das System 15) nimmt daher die Form an:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial \xi} = \frac{\nu^2}{\alpha} (\varkappa t + \zeta), \\ \frac{\partial t}{\partial \xi} = u \end{cases}$$

und die zugehörige Differentialgleichung für $t$ wird:

$$\alpha \frac{\partial^2 t}{\partial \xi^2} = \nu^2 (\varkappa t + \zeta). \text{ Also:}$$

»Jede Gleichung I), für welche $\Delta = 0$ und $K \equiv 0$ ist, lässt sich durch Integration einer gewöhnlichen Differentialgleichung 1. Ordnung und durch Quadraturen auf die Form bringen:

19) $$\alpha' \frac{\partial^2 t}{\partial \xi^2} = \varkappa t + \zeta \alpha.$$

19) ist aber eine lineare gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung zwischen $t$ und $\xi$, so dass also in diesem Falle die Integration der Gleichung I) auf gewöhnliche Differentialgleichungen führt.

17) und 19) sind die Normalformen, auf welche wir alle Gleichungen I), in denen nicht zugleich $\Delta = 0$ und $K \neq 0$ ist, bringen können.

Anmerkung. Dass Systeme von ähnlicher Form, wie unser System 1) durch eine partielle Differentialgleichung 2. Ordnung ersetzt werden können, hat schon *P. du Bois-Reymond* »Beiträge zur Interpretation der partiellen Differentialgleichungen mit drei Variablen«, Leipzig 1864, p. 11, bemerkt, ohne jedoch umgekehrt die Differentialgleichungen 2. Ordnung wirklich auf solche Systeme zurückzuführen. Die Reduction ferner aller Gleichungen von der Form I) auf eine Form, in der $\alpha = \gamma = 0$, oder $\beta = \gamma = 0$ ist, je nachdem $\Delta \neq 0$ oder $= 0$ ist, hat bereits *Ampère* durchgeführt und auch *du Bois-Reymond* giebt im § 95 pag. 203 seiner Beiträge diese Reduction an. Aber dass man, wenn $\Delta \neq 0$ ist, auch $\varepsilon$ immer noch zum Verschwinden bringen kann (siehe Gleichung 17), scheint noch nicht bemerkt zu sein. Hingegen zeigt *Lie* in seiner »Integration durch bestimmte Integrale (Archiv for Mathematik etc.)« dass im Falle $\Delta = 0$ alle Gleichungen I) auf eine von den beiden Formen gebracht werden können:

$$\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial t}{\partial y} = \varkappa t + \zeta \quad \text{oder} \quad \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} = \varkappa t + \zeta.$$

Letzteres Resultat haben wir in Gleichung 19) auf einem anderen Wege gewonnen.

**M. W. Drobisch,** *Bericht über die bei der diesjährigen Revision der Leipziger Universitäts-Wittwen- und Waisencasse angewandten Rechnungsmethoden* *).

Als im Jahre 1848 bei uns zur Vorbereitung einer Universitäts-Wittwen- und Waisencasse eine Commission niedergesetzt wurde, die aus den Professoren Wilhelm Weber, Möbius und mir bestand, wurden derselben durch Vermittelung Weber's die Grundzüge der Methode bekannt, nach welcher Gauss im Jahre 1845 den Stand der Göttinger Professoren-Wittwencasse untersucht hatte. Diese Methode stellt sich die Aufgabe, durch Rechnung die Grösse der Obliegenheiten der Casse zu bestimmen: 1) gegen die vorhandenen Wittwen und Waisen; 2) gegen die von den gegenwärtigen Ehepaaren zu erwartenden Wittwen und Waisen; 3) gegen die zur Zeit nicht verheiratheten Mitglieder, sofern sie sich noch verehelichen und Wittwen und Waisen hinterlassen können; endlich 4) gegen die der Casse künftig beitretenden Mitglieder hinsichtlich ihrer Wittwen und Waisen. Es bleibt dann nur noch zu untersuchen übrig, ob die Mittel der Casse zureichend sind, um allen diesen Anforderungen an sie Genüge zu leisten. Da das Statut unserer im Jahre 1851 begründeten Wittwen- und Waisencasse festsetzte, dass alle zehn Jahre eine Prüfung des Standes der Casse vorzunehmen sei, so ist dies in den Jahren 1861, 1871 und 1881 durch zu diesem Zweck niedergesetzte Commissionen geschehen, und haben sich an denselben der Reihe nach die Collegen Möbius und Scheibner, Scheibner und Bruhns, Scheibner und Adolph Mayer gemeinschaftlich mit mir betheiligt. Bei allen drei Revisionen wurde die Gauss'sche Untersuchungsweise festgehalten, die uns aber in extenso erst im Jahre 1873 durch die im 4. Bande von Gauss' Werken veröffentlichte Abhandlung: »Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf die Bestimmung der Bilanz der Wittwencassen« bekannt wurde. Da jedoch die Gauss'schen

*) Vorgelegt und zum Druck übergeben am 14. November 1882.

Berechnungsarten zum Theil sich auf vieljährige bei der Göttinger Professoren-Wittwencasse gemachte Erfahrungen gründeten, deren Ergebnisse auf unsere Verhältnisse nicht übertragbar waren, so musste es versucht werden, in einigen Punkten andere Wege einzuschlagen, und wurde es mir überlassen, dieselben zu ermitteln und in Vorschlag zu bringen. Was sich mir nun zuletzt als das Angemessenste dargestellt hat und in den nachfolgenden Paragraphen motivirt ist, hat sich zwar der Zustimmung der Herren Collegen Scheibner und Mayer zu erfreuen gehabt, doch sind dieselben mit der gegenwärtigen Veröffentlichung dieses Versuchs völlig einverstanden, da hierdurch der Kritik Gelegenheit gegeben wird, sich darüber auszusprechen, und, wie das Urtheil auch ausfallen möge, dieses der nächsten Revision nur zu statten kommen kann. Vielleicht werden dadurch auch Mittheilungen über die Grundsätze veranlasst, nach welchen an anderen Universitäten als Göttingen und Leipzig der Stand der Professoren-Wittwen- und Waisencassen geprüft wird. — Noch sei bemerkt, dass, um über das ganze bei unserer letzten Revision angewandte Verfahren Rechenschaft abzulegen, in den ersten vier Paragraphen auch einige allgemein bekannte Formeln aufgenommen und abgeleitet worden sind. Erst nach Abschluss der Revision sind noch die Paragraphen 14, 15 und 18 hinzugekommen.

## § 1.

Bei allen Anwendungen der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf menschliche Lebensverhältnisse wird grundsätzlich angenommen, dass jedes männliche oder weibliche Individuum bis zum höchsten seinem Geschlecht erreichbaren Alter, welches die dabei zu Grunde gelegte Sterblichkeitstafel angiebt, zu leben hoffen darf, jedoch mit einer bei jedem höheren Lebensjahre sich vermindernden Wahrscheinlichkeit. Hierauf beruht zunächst die Bestimmung der Grösse des Capitals, das eine Wittwencasse besitzen muss, um einer im Alter von $f$ Jahren stehenden Wittwe bis an ihr Lebensende alljährlich die Pension $p$ zahlen zu können.

Bezeichnet nämlich $l_f$ die durch die Sterblichkeitstafel gegebene Zahl der im Alter $f$ lebenden Frauen, und $l_{f+n}$ die Zahl derselben, die nach $n$ Jahren, also im Alter $f + n$, noch am Leben sind, so ist

$$\frac{l_{f+n}}{l_f}$$

die Wahrscheinlichkeit, dass eine $f$ Jahre alte Frau nach $n$ Jahren noch leben wird. Ist sie nun eine Wittwe, welche die Pension $p$ zu beziehen hat, so ist der wahrscheinliche Werth der nach $n$ Jahren fälligen Rate derselben

$$\frac{l_{f+n}}{l_f}\,p.$$

Bezeichnet ferner $r$ den Zinsfuss, zu welchem die Wittwencasse ihre Capitalien mit Zins auf Zins nutzt, so ist, wenn man $\frac{1}{r} = \varrho$ setzt, der auf die Gegenwart discontirte Werth der vorstehenden Pensionsrate

$$\frac{l_{f+n}}{l_f}\,p\,\varrho^n,$$

d. i. das Capital, welches die Casse gegenwärtig besitzen muss, um diese Rate nach $n$ Jahren zahlen zu können. Setzt man nun in diesem Ausdruck successiv $n = 1, 2, 3, \ldots z$, wo dann $f + z$ das höchste, Frauen erreichbare Alter (nach Brune's Sterblichkeitstafel 99 Jahre) ist, und zieht die Summe, so ist

$$\frac{p}{l_f}\left(l_{f+1}\,\varrho + l_{f+2}\,\varrho^2 + l_{f+3}\,\varrho^3 + \cdots + l_{f+z}\,\varrho^z\right) = p\,R_f \quad \ldots\ldots (1)$$

das Capital, das die Casse besitzen muss, um der Wittwe bis an ihr Lebensende die jährliche Pension $p$ zahlen zu können. Der numerische Werth von $R_f$ ist der gegenwärtige der Leibrente 1 einer $f$ Jahre alten Frau. Wir haben denselben für jede der vorhandenen Wittwen der von Hattendorff seiner deutschen Bearbeitung von David Jones' Schrift: »Leibrenten und Lebensversicherungen« (Hannover 1859) beigegebenen, nach Brune's Sterblichkeitstafel berechneten Tafel der Leibrenten (S. 234) entnommen. Da das Alter der vorhandenen Wittwen bis auf Zehntel des Jahres genau bestimmt wurde, so ergab sich der Werth der Leibrente durch eine einfache Interpolation.

Da die der Sterblichkeitstafel entnommenen Zahlen $l_f$ und $l_{f+n}$ nur angeben, wieviele aus einer sehr grossen Zahl von Frauen durchschnittlich im Alter $f$ und $f + n$ leben, so hat die Berechnung des Zahlenwerthes von $p\,R_f$ für die einzelne Wittwe keine irgendwie zuverlässige Bedeutung. Denn es kann nicht angenommen werden, dass die Lebensfähigkeit einer jeden gerade die durchschnittliche der Frauen ihres

Alters sei. Nur bei einer sehr grossen Zahl von Wittwen wird die nach ihrem Alter berechnete Summe

$$\Sigma\, p\, R_f$$

der Summe, die auf die Pensionen sämmtlicher Wittwen zusammengenommen wirklich verwendet worden ist (welche selbstverständlich erst nach ihrem Absterben sich ermitteln lässt), nahe gleich sein.

Hieraus folgt von selbst, dass bei einer Wittwencasse wie die unsrige, wo die Zahl der vorhandenen Wittwen immer nur eine sehr mässige sein wird (sie betrug 32 am Ende des Jahres 1881), die Vorausberechnung des für die Pensionen der Wittwen erforderlichen Capitals nicht eine sehr genaue Bestätigung durch die nachfolgende Erfahrung erwarten darf. Dasselbe gilt von den weiteren Berechnungen des Capitalbedarfs der Casse für die künftig zu erwartenden Wittwen und Waisen. Denn überall kann bei uns und allen ähnlichen Anstalten »dem Gesetz der grossen Zahlen« nur unvollkommen Gnüge gethan werden.

§ 2.

Sind Waisen vorhanden, so sei $\pi$ die Pension, welche eine $\alpha$ Jahre alte Waise bis zur erlangten Mündigkeit, d. i. bis zum vollendeten $\mu$ten (bei uns 21sten) Lebensjahre alljährlich zu beziehen hat. Dann ist dieselbe eine nach $\mu - \alpha$ Jahren aufhörende Leibrente. Bezöge die Waise dieselbe bis an ihr Lebensende, so wäre ihr gegenwärtiger Werth

$$\pi\, R_\alpha.$$

Offenbar aber muss davon abgezogen werden der auf die Gegenwart discontirte Werth, den die Leibrente $\pi$ zu der Zeit, zu welcher die Waise mündig geworden ist, also nach $\mu - \alpha$ Jahren hat. Da dann die Waise $\mu$ Jahre alt ist, so ist dieser Werth, wenn $r$ der Zinsfuss,

$$\frac{\pi\, R_\mu}{r^{\mu - \alpha}}.$$

Da es aber nicht gewiss, sondern nur im Grade $\frac{l_\mu}{l_\alpha}$ wahrscheinlich ist, dass die Waise das Jahr ihrer Mündigkeit vollenden wird, so ist der gegenwärtige Werth der nach $\mu - \alpha$ Jahren anhebenden Leibrente $\pi$ nur

$$\frac{\pi\, l_\mu\, R_\mu}{l_\alpha\, r^{\mu-\alpha}},$$

folglich der gegenwärtige Werth der ganzen Waisenpension, und somit der Capitalbedarf der Casse für eine solche Waise

$$\pi\left(R_\alpha - \frac{l_\mu\, R_\mu}{l_\alpha\, r^{\mu-\alpha}}\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Die Zahlenwerthe von $R_\alpha$, $R_\mu$, $l_\alpha$ und $l_\mu$ findet man, nach Deparcieux's Sterblichkeitstafel berechnet, bei Hattendorf a. a. O. S. 284.

§ 3.

Für ein Ehepaar, in welchem der Mann $m$, die Frau $f$ Jahre alt ist, ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Frau nach $n$ Jahren noch leben wird, $\frac{l_{f+n}}{l_f}$, die Wahrscheinlichkeit aber, dass der Mann dann gestorben sein wird, wenn $l_m$ und $l_{m+n}$ in Bezug auf ihn die analoge Bedeutung haben wie $l_f$ und $l_{f+n}$ in Beziehung auf seine Frau, $1 - \frac{l_{m+n}}{l_m}$, folglich die Wahrscheinlichkeit, dass die Frau nach $n$ Jahren Wittwe sein wird,

$$\frac{l_{f+n}}{l_f}\left(1 - \frac{l_{m+n}}{l_m}\right).$$

Hat sie nun als Wittwe die jährliche Pension $p$ zu beziehen, so ist, wenn sie $f + n$ Jahre alt geworden, der wahrscheinliche und auf die Gegenwart discontirte Werth derselben, wenn wieder $\frac{1}{r} = \varrho$ gesetzt wird,

$$\left(\frac{l_{f+n}}{l_f} - \frac{l_{m+n}\, l_{f+n}}{l_m\, l_f}\right) p\, \varrho^n,$$

und diese Summe das der Casse erforderliche Capital, um die nach $n$ Jahren fällige Pensionsrate zahlen zu können. Setzt man in diesem Ausdruck successiv $n = 1, 2, 3, \ldots z$ und zieht die Summe, so kommt

$$\frac{p}{l_f}\left(l_{f+1}\,\varrho + l_{f+2}\,\varrho^2 + l_{f+3}\,\varrho^3 + \cdots + l_{f+z}\,\varrho^z\right)$$

$$- \frac{p}{l_m\, l_f}\left(l_{m+1}\, l_{f+1}\varrho + l_{m+2}\, l_{f+2}\,\varrho^2 + l_{m+3}\, l_{f+3}\,\varrho^3 + \cdots + l_{m+z}\, l_{f+z}\,\varrho^z\right).$$

In diesem Ausdruck ist der Minuend, wenn man $f + z = 99$ setzt, vermöge Formel (1), offenbar $p\, R_f$. Der Subtrahend aber ist, wenn in demselben (da nach Brune das höchste den Män-

nern erreichbare Alter 94 Jahre beträgt) $z = 94 - m$ gesetzt wird, der gegenwärtige Werth einer Rente $p$, welche das Ehepaar, so lange als Mann und Frau noch mit einander ehelich verbunden leben, zu beziehen hätten, eine Verbindungsrente. Bezeichnet man den Werth derselben durch $p\,V_{m,f}$, so ist der gegenwärtige Werth der künftigen Wittwenpension der Frau

$$p\,(R_f - V_{m,f}) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3)$$

Ihre künftige Wittwenpension kann demnach als eine gleich grosse Leibrente derselben auf Lebenszeit betrachtet werden, die jedoch während der Jahre, welche sie mit ihrem Manne noch verbunden lebt, in Wegfall kommt. Die Zahlenwerthe von $V_{m,f}$ giebt für den Zinsfuss $r = 1{,}035$ Hattendorff a. a. O. S. 240 ff. Sind $m$ und $f$ bis auf Zehntel des Jahres gegeben, so bedarf es zur Ermittelung von $V_{m,f}$ einer dreifachen Interpolation.

Wird nun für jede der jetzt noch verheiratheten Frauen nach der vorstehenden Formel der Werth ihrer künftigen Wittwenpension berechnet, so ist die Summe das Capital, dessen die Casse bedarf, um die Pensionen aller von den jetzigen Ehepaaren zu erwartenden Wittwen bestreiten zu können, das sich aber durch die Zahlung derselben zuletzt gänzlich aufzehrt.

Da die Zahl der Ehepaare jederzeit grösser sein wird, als die der vorhandenen Wittwen*), so scheint insofern der berechnete Capitalbedarf für die zu erwartenden Wittwen grösseren Anspruch auf Bestätigung durch die nachfolgende Erfahrung zu haben, als der für die bereits vorhandenen Wittwen berechnete. Aber, wie schon Gauss bemerkt hat, kann der Berechnung des jetzigen Werthes der Pension der künftigen Wittwe eines jetzt noch verheiratheten Mannes nicht ganz die Zuverlässigkeit beigelegt werden, wie der der Pension einer jetzt schon vorhandenen Wittwe. Denn bei einem Ehepaar kann sowohl die Frau ihren Mann, als auch der Mann seine Frau überleben, und für das Eine wie für das Andere lässt sich der Grad der Wahrscheinlichkeit, dass es geschehen wird, aus dem Alter der Ehegatten ableiten. Nun hat zwar, wenn der Mann seine Frau überlebt, also Wittwer wird, die Casse keine Ausgabe zu bestreiten; im Gegentheil kommen ihr dann die jährlichen Beiträge des Mannes zur künftigen Wittwenpension seiner Frau,

*) Näheres hierüber folgt in § 16.

die er bis zu ihrem Tode gezahlt hat, ohne jegliche Gegenleistung zu Gute. Da aber Wittwer sich häufig wieder verheirathen, und überdies dann meistens ihre zweiten Frauen weit jünger sind, als ihre ersten bei ihrem Ableben waren, so steht der Casse ausser der Fürsorge für die Wittwenpension der jetzigen Frau auch noch die unter den angegebenen Umständen leicht länger dauernde, daher ein grösseres Capital fordernde Pensionirung einer zweiten Frau in Aussicht und erwächst ihr daraus eine eventuelle Mehrbelastung, die sich jedoch jeder Vorausbestimmung durch Rechnung gänzlich entzieht.

## § 4.

Der nach der Formel (3) berechnete Capitalbedarf der Casse für die künftigen Wittwenpensionen der Frauen vermindert sich durch die jährlichen Beiträge ihrer Ehemänner. Sei $b$ der Beitrag, den ein $m$ Jahre alter Mann, so lange als er mit seiner Frau ehelich verbunden lebt, alljährlich zu entrichten hat, so ist dies offenbar eine Verbindungsrente, deren gegenwärtiger Werth

$$b\, V_{m,f} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Ist aber, wie bei unserer Anstalt, der Mann verpflichtet, für den Fall, dass er seine Frau überlebt, seine Beiträge, auch wenn er sich nicht wieder verheirathet, bis an sein Lebensende fortzuzahlen, so ist die Wahrscheinlichkeit, dass er nach $n$ Jahren noch leben, seine Frau aber gestorben sein wird,

$$\frac{l_{m+n}}{l_m}\left(1 - \frac{l_{f+n}}{l_f}\right),$$

daher der auf die Gegenwart discontirte Werth seines nach $n$ Jahren als Wittwer zu zahlenden Beitrags

$$\left(\frac{l_{m+n}}{l_m} - \frac{l_{m+n}\, l_{f+n}}{l_m\, l_f}\right) b\, \varrho^n.$$

Setzt man nun successiv $n = 1, 2, 3, \ldots z$, wo $z = 94 - m$, und zieht die Summe, so kommt

$$b\,(R_m - V_{m,f}),$$

wo $R_m$ der gegenwärtige Werth der Leibrente 1 eines $m$ Jahre alten Mannes, und ist dadurch der gegenwärtige Werth der eventuell nach dem Tode seiner Frau zu zahlenden Beiträge bestimmt. Da nun der Werth der bei Lebzeiten seiner Frau zu

zahlenden Beiträge $b\,V_{m,f}$ war, so ist der jetzige Werth aller von ihm überhaupt zu zahlenden Beiträge

$$b\,R_m. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4^*)$$

Durch Abzug desselben von dem nach Formel (3) bestimmten gegenwärtigen Werthe der künftigen Wittwenpension seiner Frau reducirt sich der Capitalbedarf der Casse für dieselbe auf

$$p\,(R_f - V_{m,f}) - b\,R_m. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3^*)$$

Die Summe der hiernach für alle vorhandenen Ehefrauen berechneten Werthe giebt den Capitalbedarf der Casse für die Gesammtheit der von den jetzigen Ehepaaren zu erwartenden Wittwen.

Da bei uns auch jedes noch nicht verheirathete Mitglied verpflichtet ist, auch wenn es unverheirathet bleibt, den Beitrag zu leisten, so ist der jetzige Werth aller seiner Beiträge nach Formel (4*) zu bestimmen.

## § 5.

Der Capitalbedarf der Casse für die Pensionen der von den vorhandenen Ehepaaren zu erwartenden Waisen ist bei den früheren Revisionen am Ende der Jahre 1861 und 1871 nach den Ergebnissen der Untersuchung des Standes der Göttinger Professoren-Wittwencasse, die Gauss im Jahre 1845 ausgeführt hatte, bestimmt worden. Gauss hatte gefunden, dass in Göttingen die Summe der bis dahin den Wittwen wirklich ausgezahlten und auf den Zeitpunkt des Beitritts ihrer Männer zur Wittwencasse discontirten Pensionen sich zu der Summe der bis dahin den Waisen wirklich ausgezahlten und auf denselben Zeitpunkt (den des Beitritts ihrer Väter) discontirten Pensionen sich verhielt wie 6 : 1. Er nahm daher für Göttingen als Regel an, dass daselbst nach den bis dahin gemachten Erfahrungen auch für die Pensionen der künftig zu erwartenden Waisen ein Sechstel des berechneten Werthes der Pensionen der zu erwartenden Wittwen anzusetzen sei. Diese Regel, die überdies, wie Gauss selbst bemerkt, schon früher Kritter aufgestellt, aber nach seinem Urtheil nicht zulänglich begründet hatte, wurde auch bei uns adoptirt. Das nach derselben für die Waisen erforderliche Sechstel des Werthes der Wittwenpensionen betrug in den Jahren 1861 und 1871 bezw. 11966 und 18455 Thlr., und hätten von dem letzteren Capital die Pensio-

nen von $133\frac{1}{3}$ Thlr. für 18, durchschnittlich $11\frac{1}{2}$ Jahre alte Waisen bis zu ihrer Mündigkeit bestritten werden können.

Aber diese Annahme, dass zur Deckung der Waisenpensionen ein Sechstel des jetzigen Werthes der künftigen Wittwenpensionen der vorhandenen Ehefrauen erforderlich sei, hat die bei unserer Wittwen- und Waisencasse gemachte, nunmehr 30-jährige Erfahrung nicht entfernt gerechtfertigt. Denn es ist während dieser Zeit ein einzigesmal (innerhalb des ersten Jahrzehnts) vorgekommen, dass drei Töchter eines Professors zu Waisen wurden und als solche einige Jahre lang Pensionen zu je 100 Thlrn. bezogen, deren auf das Todesjahr ihres Vaters discontirter Werth noch nicht 1600 Thlr. betrug. Nun kann zwar unsere Anstalt in Zukunft hinsichtlich der Zahl der Waisen weit ungünstigere Erfahrungen als bisher machen. Indess hat sich doch auch in Göttingen das angegebene Verhältniss seit 1845 erheblich geändert. Gauss selbst fand dasselbe im J. 1851, wo ihm eine grössere Anzahl von Fällen zur Vergleichung und Berechnung vorlag, gleich 7 : 1, was uns aber erst nach Veröffentlichung des 4. Bandes seiner Werke im J. 1873 bekannt wurde. Nach einer Mittheilung seines Nachfolgers, des Herrn Professor Dr. Schering, hat sich aber seit 1851, wie die Revisionen der Göttinger Wittwencasse in den Jahren 1860, 1865, 1870, 1875 und 1880 erwiesen haben, daselbst das Verhältniss zwischen den Werthen der Wittwen- und der Waisenpensionen ununterbrochen gesteigert, so dass es am Ende des Jahres 1880 gleich 971 : 100, also fast 10 : 1 war. Dieses Verhältniss ergab sich aus der Vergleichung der Werthe der seit Gründung der Göttinger Casse an 71 Wittwen und 10 Waisen wirklich ausgezahlten Pensionen.

Dass nun bei uns aus den Erfahrungen des so kurzen Zeitraums von 30 Jahren, innerhalb dessen von 63 verstorbenen Mitgliedern 45 Wittwen, aber nur 3 Waisen hinterlassen wurden, nach der Gauss'schen Methode sich keine Regel auch nur für die nächste Zukunft würde ableiten lassen, liegt auf der Hand. Da uns aber ganz unbekannt war, wie viele unmündige Kinder die 84 Ehepaare und 32 Wittwen des Jahres 1881 hatten, und wie viele also überhaupt Waisen werden könnten, so haben wir uns auf folgende Art zu helfen gesucht.

## § 6.

Da nach der bei uns bis jetzt gemachten Erfahrung auf ein Jahrzehnt durchschnittlich eine Waise kam, so nahmen wir dagegen an, dass in dem bevorstehenden nächsten Jahrzehnt zehn Waisen zu erwarten seien; gewiss eine für die Casse sehr ungünstige Voraussetzung. Da nach dem Statut unserer Casse nur, wenn drei oder mehr Waisen von denselben Eltern vorhanden sind, sie zusammengenommen eine volle Wittwenpension von 400 Thalern zu beziehen haben, diese aber auf $\frac{2}{3}$ und $\frac{1}{3}$ einer solchen Pension sinkt, wenn, nachdem eine oder mehrere der älteren Waisen mündig geworden, bezw. nur noch zwei oder eine Minderjährige vorhanden sind, so kann die Pension, die auf eine einzelne Waise kommt, nie mehr, wohl aber weniger als $\frac{400}{3}$ Thaler betragen. Das folgende Täfelchen giebt nun die Werthe, den diese Pension zu der Zeit, zu welcher die Minderjährigen zu Waisen wurden, für alle Waisen von 0 bis 20 Jahren an und ist nach der obigen Formel (2) berechnet.

| Alter der Waise | Werth ihrer Pension | Alter der Waise | Werth ihrer Pension |
|---|---|---|---|
| 0 Jahre | 1217,3 Thlr. | 11 Jahre | 1067,2 Thlr. |
| 1 » | 1558,0 » | 12 » | 980,4 » |
| 2 » | 1561,6 » | 13 » | 888,9 » |
| 3 » | 1545,7 » | 14 » | 792,9 » |
| 4 » | 1516,0 » | 15 » | 686,3 » |
| 5 » | 1472,1 » | 16 » | 588,1 » |
| 6 » | 1419,8 » | 17 » | 479,8 » |
| 7 » | 1360,2 » | 18 » | 367,1 » |
| 8 » | 1294,9 » | 19 » | 249,9 » |
| 9 » | 1224,7 » | 20 » | 127,6 » |
| 10 » | 1148,8 » | | |

Die Summe dieser 21 Werthe beträgt 21547 Thlr.; es ist demnach der mittlere Werth einer Waisenpension

1026 Thlr.

Er fällt sehr nahe auf das Alter von $11\frac{1}{2}$ Jahren. Die in dem nächsten Jahrzehnt zu erwartenden 10 Waisen von diesem mittleren Alter können sich aber in sehr verschiedener Weise auf dasselbe vertheilen. Es wird genügen, folgende Fälle zu unterscheiden.

1) Wird nach 1, 2, 3, ... 10 Jahren je eine Minderjährige

zur Waise, so ist der auf die Zeit, wo sie Waise wurde, discontirte Werth der mittleren Pension derselben von 1026 Thlrn., wenn $r = 1{,}035$,

$$1026\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^3} + \cdots + \frac{1}{r^{10}}\right) = 1026 \cdot \frac{1 - \frac{1}{r^{10}}}{r - 1} = 8531 \text{ Thlr.}$$

2) Treten nach 1, 3, 5, 7, 9 Jahren je zwei Waisen zugleich ein, so ist der discontirte Werth ihrer mittleren Pensionen

$$2052\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r^3} + \frac{1}{r^5} + \cdots + \frac{1}{r^9}\right) = 2052 \cdot \frac{r\left(1 - \frac{1}{r^{10}}\right)}{r^2 - 1} = 8681 \text{ Thlr.}$$

3) Treten nach 1 und 4 Jahren je drei Waisen und nach 7 und 10 Jahren je zwei Waisen zugleich ein, so ist der discontirte Werth ihrer Pensionen

$$3078\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r^4}\right) + 2052\left(\frac{1}{r^7} + \frac{1}{r^{10}}\right) = 5656 + 3068 = 8724 \text{ Thlr.}$$

4) Treten nach 1 und 5 Jahren je 4 Waisen und nach 9 Jahren je zwei Waisen zugleich ein, so ist der discontirte Werth ihrer Pensionen

$$4104\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r^5}\right) + 2052 \cdot \frac{1}{r^9} = 7421 + 1506 = 8927 \text{ Thlr.}$$

Hiernach konnten nun

9000 Thlr.

als zureichend für die Pensionen der 10 im nächsten Jahrzehnt zu erwartenden Waisen angesehen werden. Diese Summe ist der 18. Theil des gegenwärtigen Werthes der künftigen Wittwenpensionen (à 400 Thlr.) der im Jahre 1881 noch verheiratheten Frauen. Und so haben wir für diesesmal an die Stelle des früheren Sechstels ein Achtzehntel des Werthes der künftigen Wittwenpensionen gesetzt.

## § 7.

Da die zur Zeit nicht verheiratheten Mitglieder (seien sie Ledige oder Wittwer) sich möglicher Weise noch verheirathen können, so hat die Casse die Verpflichtung, auch für die eventuell von ihnen hinterlassenen Wittwen und Waisen zu sorgen. Da es aber ganz unbestimmbar ist, ob alle oder nur

ein Theil derselben heirathen, und wann diess geschehen wird, so kann hier unter allen Umständen nur eine hypothetische Abschätzung versucht werden.

Gauss verfuhr hierbei folgendermaassen. Er betrachtete alle Nichtverheirathete als bereits verheirathet und setzte den Capitalbedarf der Casse für die Pensionen der von jedem nichtverheiratheten Mitglied künftig zu hinterlassenden Wittwen und Waisen gleich dem Capitalbedarf, welcher durchschnittlich auf die Pensionen der Wittwen und Waisen eines verheiratheten Mitglieds kommt. Es verhält sich hiernach der für die Gesammtheit der Hinterlassenen der Nichtverheiratheten erforderliche Capitalbedarf zu dem Capitalbedarf für die Gesammtheit der Hinterlassenen der Verheiratheten wie die Zahl der ersteren zu der Zahl der letzteren. Da bei uns im J. 1881 auf 84 verheirathete Mitglieder 14 nichtverheirathete (unter welchen 6 Wittwer) kamen, so war nach dieser Annahme zur Zeit der Capitalbedarf für die Wittwen und Waisen der Nichtverheiratheten ein Sechstel des Capitalbedarfs für die Wittwen und Waisen der Verheiratheten und betrug

25456 Thlr.

Es ist einleuchtend, dass, wenn die Casse für die Hinterlassenen der Nichtverheiratheten ein nach dieser Methode berechnetes Capital reservirt, sie auf den äussersten Fall, der vorkommen kann, gerüstet ist; wobei indess doch noch eingewendet werden könnte, dass, wenn Männer in späteren Jahren heirathen, sie gewöhnlich sich Frauen wählen, die bedeutend jünger sind als die Frauen durchschnittlich im Verhältniss zu dem Alter ihrer Männer zu sein pflegen. Wollte man dies berücksichtigen, so würde allerdings eine noch grössere Summe als die nach Gauss berechnete für die Hinterlassenen der Nichtverheiratheten gefordert werden müssen.

## § 8.

Indessen kann man bei dieser Abschätzung doch auch von folgendem Gesichtspunkte ausgehen. Der Annahme, dass alle Nichtverheirathete sich noch verehelichen werden, ja dass sie sogar als bereits verheirathet zu betrachten sind, steht die entgegengesetzte gleich berechtigte Möglichkeit gegenüber, dass

alle unverheirathet bleiben werden*). In diesem Falle ist aber der nach ihrem Alter berechnete gegenwärtige Werth ihrer Beiträge ein reiner Capitalgewinn für die Casse ohne jegliche Gegenleistung. Bei uns betrug im J. 1881 dieser Werth der Beiträge der 14 Nichtverheiratheten 2619 Thlr. Zieht man diesen eventuellen Gewinn von dem angegebenen eventuellen Bedarf ab, so bleibt nur noch ein Capitalbedarf der Casse von

22837 Thlrn.

In dem uns vorliegenden concreten Falle sind wir aber noch einen Schritt weiter gegangen. Von den drei ältesten nicht verheiratheten Mitgliedern im Alter von 70,2, 72,4 und 79,4 Jahren glaubten wir mit grosser Wahrscheinlichkeit annehmen zu dürfen, dass sie sich nicht noch verehelichen werden. Die 11 jüngeren, deren durchschnittliches Alter 53,6 Jahre war, betrachteten wir, wie Gauss, als verheirathet, und zwar mit um 8 Jahre jüngeren Frauen. Denn dies ist in runder Zahl der Altersunterschied zwischen den Ehemännern und ihren Frauen, der bei uns in dem letzten Jahrzehnt sich fast ganz gleich blieb**). Hieraus ergab sich als der nach dem Alter dieser Ehepaare berechnete gegenwärtige Werth der Pensionen ihrer eventuellen Wittwen und Waisen

23512 Thlr.

Da aber der gegenwärtige Werth der Beiträge dieser 11 Mitglieder

2451 Thlr.

betrug, so blieben als Capitalbedarf der Casse

21061 Thlr.

Weil jedoch in dem entgegengesetzten Falle, dass auch diese 11 jüngeren Mitglieder wie die 3 ältesten unverheirathet bleiben, der Werth der Beiträge aller 14 Nichtverheiratheten im Betrag von 2619 Thlr. der Casse als Reingewinn zufliessen würde, so

---

*) Bei uns waren von den 18 Nichtverheiratheten d. J. 1871 bis zu Ende d. J. 1881 durch den Tod ausgeschieden 3, ebensoviele durch Berufung an andere Universitäten; es blieben also nur 12 an der Casse betheiligt. Von diesen hatten sich inzwischen 3 verheirathet, 9 aber waren unverheirathet geblieben, und zu diesen noch hinzugekommen 4 zu Wittwern gewordene Mitglieder und 1 noch Lediger.

**) Er betrug genauer 8,3 Jahre im J. 1871 und 8,2 im J. 1881 und bleibt, auch wenn man das Jahr 1861 hinzunimmt, wo er 7,4 war, durchschnittlich 8 Jahre.

setzten wir nach Abzug dieser Summe von der vorstehenden schliesslich den Capitalbedarf der Casse für die eventuellen Hinterlassenen aller Nichtverheiratheten gleich

18442 Thlr.

Es ist uns jedoch erst später bemerklich geworden, dass vielmehr das arithmetische Mittel zwischen dem eventuellen Capitalbedarf und Capitalgewinn als der richtige Werth des für die Nichtverheiratheten in Ansatz zu bringenden Capitals zu betrachten ist, so dass, wenn der erstere durch $a$, der letztere durch $b$ bezeichnet wird,

$$\frac{a - b}{2}$$

das für die Nichtverheiratheten zu reservirende Capital ausdrückt. Es besagt dies dasselbe wie: dass die Voraussetzungen, unter denen einerseits ein Capitalbedarf, andrerseits ein Capitalgewinn sich ergiebt, beide nur im Grade $\frac{1}{2}$ (dem Mittel zwischen Wahrscheinlichem und Unwahrscheinlichem im engern Sinne) wahrscheinlich sind, also $\frac{1}{2}a$ den wahrscheinlichen Capitalbedarf und $\frac{1}{2}b$ den absoluten Werth des wahrscheinlichen Capitalgewinns ausdrückt. Hiernach reducirt sich im vorliegenden Falle das für die Nichtverheirathenden zu reservirende Capital auf

9221 Thlr.

Berechnet man genauer für jedes einzelne der 11 als bereits mit um 8 Jahre jüngeren Frauen verheirathet angenommenen Mitglieder den jetzigen Werth der Pensionen ihren Wittwen und Waisen, so erhält man dafür

22951 Thlr.

Der Werth ihrer Beiträge bleibt

2451 Thlr.,

und so ist der eventuelle Capitalbedarf der Casse für sie

20500 Thlr.

Andrerseits ist, wenn alle 14 Mitglieder unverheirathet bleiben, der Capitalgewinn der Casse, wie zuvor,

2619 Thlr.,

und somit das für die Nichtverheiratheten in Ansatz zu bringende Capital sogar nur

$$\frac{1}{2}(20500 - 2619) = 8940\frac{1}{2} \text{ Thlr.}$$

Im Allgemeinen möchte es jedoch, wie uns jetzt scheint, künftig räthlicher sein, keines der ältesten nicht verheiratheten Mit-

glieder von der Möglichkeit sich noch zu verehelichen, auszuschliessen; und zwar nicht bloss desshalb, weil, wenn wider Erwarten ein solcher Fall dennoch eintritt, die Casse mit einer oft eine lange Reihe von Jahren zu zahlenden Wittwenpension belastet wird, sondern auch, weil die sehr geringe Wahrscheinlichkeit, die eine Verheirathung in hohen Jahren an und für sich hat, compensirt wird durch die sehr grosse Wahrscheinlichkeit, welche die Heirath eines jüngeren Nichtverheiratheten unter Umständen (z. B. wenn er schon verlobt ist) haben kann.

Hätten wir im vorliegenden Falle für alle 14 Mitglieder die Möglichkeit der Verheirathung angenommen, so würde die genaue Berechnung geben: für ihre Wittwen und Waisen

26418 Thlr.,

und nach Abzug des Werthes ihrer Beiträge von 2619 Thlr.,

23799 Thlr.

als Capitalbedarf der Casse für dieselben. Da nun der eventuelle Capitalgewinn der Casse gleichfalls 2619 Thlr. beträgt, so würde das für die 14 Nichtverheiratheten zu reservirende Capital sein

$$\tfrac{1}{2}\,(23799 - 2619) = 10590 \text{ Thlr.}$$

## § 9.

Wie nothwendig es für eine Anstalt wie die unsrige ist, auch das Capital zu bestimmen, das die Casse besitzen muss, um davon die Pensionen der Hinterlassenen aller künftig eintretenden Mitglieder bestreiten zu können, geht einfach aus der Ueberlegung hervor, dass die für die Pensionen der bereits vorhandenen und von den jetzigen Mitgliedern zu erwartenden Wittwen und Waisen berechneten Capitalien, wenngleich sie mit Zins auf Zins genutzt werden, sich doch durch die Auszahlung dieser Pensionen zuletzt ganz aufzehren, daher, da inzwischen eine ganze Reihe neuer Mitglieder eingetreten ist, die Casse schon gegenwärtig ein Capital besitzen muss, das, mit Zins auf Zins genutzt, die Pensionen der Hinterlassenen aller dieser Nachfolger der jetzt lebenden Mitglieder deckt.

Gauss hat dieses Capital für Göttingen auf folgende Weise zu ermitteln gesucht. Er discontirte die Beiträge, welche seit Gründung der Göttinger Wittwencasse bis zum Jahre 1851 von

verstorbenen oder sonst ausgeschiedenen Mitgliedern an die Casse gezahlt worden waren, auf den Zeitpunkt ihres Beitritts und erhielt hieraus, nach Division der Summe dieser discontirten Beiträge durch die Zahl der eingetretenen und wieder ausgeschiedenen Mitglieder, den durchschnittlichen Werth der Beiträge eines Mitglieds zur Zeit seines Eintritts. Ebenso discontirte er, wie schon in § 5 bemerkt wurde, die Pensionen, die innerhalb desselben Zeitraums den Wittwen und Waisen wirklich ausgezahlt worden waren, auf den Zeitpunkt des Eintritts der Männer der ersteren und der Väter der letzteren, und erhielt durch Division dieser Summe mit der Zahl der Wittwen bezw. der Waisen den durchschnittlichen Werth einer Wittwen- und einer Waisenpension für den angegebenen Zeitpunkt. Durch Subtraction des so bestimmten durchschnittlichen Werthes der Beiträge eines Mitglieds von der Summe der auf dieselbe Weise bestimmten durchschnittlichen Werthe einer Wittwen- und einer Waisenpension erhielt er nun das Capital, das die Casse aus eignen Mitteln auf eine Pension (der Wittwen und Waisen zusammengenommen) durchschnittlich verwendet hatte. Sei dieses Capital $= c$, so muss, wenn jährlich ein Ehepaar eintritt, der Casse jährlich die Summe $c$ zur Bestreitung der künftigen Wittwen- und Waisenpensionen für dieses Paar zufliessen. Gauss nahm dabei stillschweigend an, dass die Summe $c$ auch für die Zukunft (wenigstens für die nächste) sich ziemlich gleich bleiben werde. Besitzt nun die Casse ein Capital, welches die Summe $c$ an jährlichen Zinsen abwirft, so ist durch dessen Zinsenertrag, wenn jährlich nicht mehr als ein Ehepaar eintritt, für alle Zeiten der Pensionsbedarf für die von allen diesen Ehepaaren zu erwartenden Wittwen und Waisen gedeckt. Bezeichnet $r = 1{,}035$ den Zinsfuss, so ist dieses Capital gleich

$$\frac{c}{r-1} = \frac{200}{7}\,c.$$

Wie viele Ehepaare aber im Durchschnitt jährlich eintreten, darüber lässt sich, wie Gauss selbst bemerkt, etwas Sicheres nicht feststellen. Er entschloss sich zuletzt, im Jahre 1851 dafür $2\frac{1}{2}$ anzunehmen. Aber sein Nachfolger, Herr Professor Dr. Schering, hat sich neuerdings genöthigt gefunden, diese Zahl auf $3\frac{1}{2}$ zu erhöhen. Vorausgesetzt, dass seit jener Zeit der Werth von $c$ sich in Göttingen nicht merklich geändert hat (was doch

wohl anzunehmen ist), würde daher jetzt das für die Hinterlassenen aller künftig der Casse beitretenden verheiratheten Mitglieder in Göttingen mit

$$3\tfrac{1}{2}\cdot\frac{c}{r-1} = 100\,c$$

anzusetzen sein.

## § 10.

Von diesen für Göttingen giltigen Bestimmungen konnten wir keinen unmittelbaren Gebrauch machen, aber auch nicht nach den bei unsrer Casse gemachten Erfahrungen mittels derselben Methode den Werth von $c$ bestimmen, da der Zeitraum von 30 Jahren zu kurz schien, und überdies nicht einmal die dazu erforderlichen Data in genügender Vollständigkeit vorhanden waren. Wir haben indess den Werth von $c$ aus unsern Erfahrungen, wie folgt, abzuleiten versucht.

In den letzten 20 Jahren, innerhalb welcher weit häufiger als früher auswärtige Gelehrte von bereits erlangtem Ruf unsrer Universität gewonnen und Theilhaber an der Wittwencasse wurden, ist das durchschnittliche Alter, in welchem die eintretenden Mitglieder zur Zeit ihres Eintritts standen, sich sehr gleich geblieben. Die 57 von 1862 bis 1871 Eingetretenen waren durchschnittlich 40,4 Jahre, die 31 von 1872 bis 1881 Eingetretenen durchschnittlich 39,8 Jahre alt. Es kann demnach das durchschnittliche Alter eines Mitglieds zur Zeit seines Eintritts in runder Zahl zu 40 Jahren angenommen werden. Diese Zahl hat überdies schon an sich eine gewisse innere Wahrscheinlichkeit. Denn selten wird jetzt bei uns ein Privatdocent unter 30 Jahren zum Professor mit Besoldung ernannt werden, und ebenso selten ein auswärtiger Professor von viel über 50 Jahren an unsre Universität berufen werden, so dass sich auch schon desshalb 40 Jahre als das mittlere Alter eines Eintretenden darstellen. Da nun auch, wie schon zuvor (§ 8) bemerkt wurde, der durchschnittliche Altersunterschied zwischen den verheiratheten Mitgliedern und ihren Frauen sich sehr gleich geblieben ist, die Frauen nämlich im Durchschnitt 8 Jahre jünger sind als ihre Männer, so ist anzunehmen, dass ein verheirathetes Mitglied zur Zeit seines Eintritts 40 Jahre, und seine Frau 32 Jahre alt sein wird. Für ein solches Ehepaar ist aber der nach Formel (3)

berechnete Werth der künftigen Wittwenpension der Frau von 400 Thlrn.

1833,16 Thlr.,

der 18te Theil derselben, als Werth der Waisenpension,

101,84 Thlr.,

der Werth der Wittwen- und Waisenpension zusammen genommen also

1935,00 Thlr.

Hiervon kommt aber in Abzug der nach Formel (4*) berechnete jetzige Werth der jährlichen Beiträge des Mannes von 20 Thlr., der, um das dem Beitrag gleiche Eintrittsgeld vermehrt,

325,68 Thlr.

beträgt. Es ist demnach der Capitalbedarf der Casse zur Deckung der Wittwen- und Waisenpension dieses Ehepaars

$$c = 1609{,}32 \text{ Thlr.}$$

Träte nun jährlich nur ein solches Ehepaar ein, so würde die Casse, wenn sie im Besitz eines Capitals von

$$\frac{200}{7}c = 45981 \text{ Thlr.}$$

wäre, von den Zinsen desselben (zu $3\frac{1}{2}$ Procent) die Pensionen der Hinterlassenen aller künftig eintretenden verheiratheten Mitglieder bestreiten können.

Um aber wenigstens annähernd die Zahl der im Durchschnitt jährlich Eintretenden zu bestimmen, ergab sich, dass von 1852 bis 1881 zwar 119 Mitglieder eingetreten, von diesen aber 14 durch Annahme auswärtiger Stellungen wieder ausgeschieden waren. Es verblieben daher als Theilhaber an dem Beneficium der Casse nur 105, und man wird demnach sagen können, dass in 30 Jahren nur soviel Mitglieder für die Dauer eingetreten sind, woraus für die durchschnittliche Zahl der jährlich Eintretenden sich ergiebt

$3\frac{1}{2}$,

wie neuerdings in Göttingen, und hiernach ein Capital von

$$3{,}5 \cdot 45981 = 160934 \text{ Thlr.},$$

das sich zu $3\frac{1}{2}$ Procent verzinst, bei uns zureicht, um die Pensionen der Hinterlassenen aller künftig der Casse beitretenden verheiratheten Mitglieder zu decken.

Die Unsicherheit der Methode giebt sich jedoch dadurch zu erkennen, dass eine Vergrösserung oder Verminderung der angenommenen Zahl der jährlich Eintretenden um nur 0,1 das

berechnete Capital um 4598 Thlr. bezw. vergrössern oder vermindern würde.

§ 11.

Schon desshalb haben wir es versucht, dieses Capital noch nach einer andern Methode zu bestimmen. Es kam aber dazu noch der Umstand, dass bei uns die Zahl der an der Casse betheiligten Mitglieder nicht, wie anderwärts, eine geschlossene, constante ist, sondern dieselbe sich seit der Gründung der Anstalt höchst bedeutend vergrössert hat. Denn diese Zahl war im J. 1851 nur 63, aber 1861 bereits auf 72, 1871 auf 95, endlich 1881 auf 98 gestiegen. Noch rapider ist die Zahl der verheiratheten Mitglieder gewachsen. Denn sie betrug in den Jahren 1851 und 1861 nur 52, dagegen 77 im J. 1871 und 84 im J. 1881. Es kam daher zunächst in Frage: um wieviel muss das Capital der Casse vergrössert werden, wenn die Zahl der verheiratheten Mitglieder für immer um eines vermehrt wird?

Es wurde hierbei der Fall ins Auge gefasst, dass eine neue ständige Professur errichtet werde, die nach dem Tode des für dieselbe berufenen Inhabers aufs Neue besetzt wird, und das Nämliche in Bezug auf diesen ersten und alle späteren Nachfolger gilt. Da eine solche Professur selten später als ein Jahr nach dem Tode des bisherigen Inhabers, aber auch selten früher als ein halbes Jahr nach diesem Zeitpunkt wieder besetzt zu werden pflegt, so sind diese zwei Fälle zu unterscheiden.

Sei allgemein $\mu$ das durchschnittliche Alter eines eintretenden Mitglieds, $\varphi$ das seiner Frau, so ist zuerst das für die Pensionen der künftigen Wittwe und Waisen dieses Ehepaars erforderliche Capital $c$ zu berechnen. Folgt diesem Ehepaar ein zweites von demselben Alter ein Jahr nach dem Tode des Mannes im ersten Paar nach, so muss zur Zeit seines Eintritts für seine künftigen Hinterlassenen wiederum ein Capital $c$ in der Casse vorhanden sein. Es wird dasein, wenn die Casse schon ein Jahr vorher, also zur Zeit des Todes des vorigen Inhabers der Stelle, ein Capital $\frac{c}{r}$ besitzt, da dieses durch den Zinsenzuschlag nach einem Jahre auf $c$ angewachsen ist. Der gegenwärtige Werth des Capitals $\frac{c}{r}$, d. i. derjenige, den es zur Zeit

des Eintritts des Mannes im ersten Ehepaar hat, ist aber offenbar der gegenwärtige Werth der Lebensversicherung dieses Mannes auf die (mit seinem Tode auszuzahlende) Summe $\frac{c}{r}$. Bezeichnet daher $L_\mu$ den gegenwärtigen Werth der Lebensversicherung eines $\mu$ Jahre alten Mannes auf die Summe 1, so ist der gegenwärtige Werth des Capitals $\frac{c}{r}$

$$\frac{L_\mu}{r}c$$

und dies das Capital, das für das zweite eintretende Paar zur Zeit des Eintritts des ersten in der Casse vorhanden sein muss.

Folgt dem zweiten Ehepaar wiederum ein Jahr nach dem Tode des Mannes ein drittes Ehepaar von dem nämlichen Alter nach, so muss aus demselben Grunde für seine künftigen Hinterlassenen zur Zeit des Eintritts des zweiten ein Capital $\frac{L_\mu}{r}c$, folglich schon ein Jahr vorher, also zur Zeit des Todes des Mannes im ersten Paar, das Capital $\frac{1}{r}\frac{L_\mu}{r}c$ vorhanden sein. Der Werth desselben zur Zeit des Eintritts des ersten Ehepaars ist aber $L_\mu\frac{1}{r}\frac{L_\mu}{r}c$, d. i.

$$\left(\frac{L_\mu}{r}\right)^2 c.$$

Auf dieselbe Weise ergiebt sich, dass, wenn dem dritten Ehepaar wieder ein Jahr nach dem Tode des Mannes ein viertes von dem nämlichen Alter succedirt, für seine künftigen Hinterlassenen zur Zeit des Eintritts des ersten Paares ein Capital

$$\left(\frac{L_\mu}{r}\right)^3 c$$

vorhanden sein muss u. s. f. Succedirt nun in dieser Weise dem ersteren eine unendliche Reihe von Ehepaaren im durchschnittlichen Alter von $\mu$ und $\varphi$ Jahren, so bedarf die Casse für die Hinterlassenen des ersten Ehepaars und aller seiner künftigen Nachfolger des Capitals

$$\left(1+\frac{L_\mu}{r}+\left(\frac{L_\mu}{r}\right)^2+\left(\frac{L_\mu}{r}\right)^3+\cdots \text{ in inf.}\right)c,$$

d. i.

$$\frac{rc}{r-L_\mu}=c'. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

Succediren die Ehepaare einander ein halbes Jahr nach dem Tode der Männer, so hat man nur $r$ mit $\frac{1}{2}(r+1)$ zu vertau-

schen, und es ist dann das für die Hinterlassenen Aller erforderliche Capital

$$\frac{(r+1)\,c}{r+1-2\,L_\mu} = c'' \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5^*)$$

Die Werthe von $L_\mu$ können entweder nach der bekannten Formel $L_\mu = \frac{1}{r}\,[1-(r-1)\,R_\mu] = 1 - \left(\frac{r-1}{r}\right)(1+R_\mu)$ aus der Tafel der Leibrenten abgeleitet, oder direct der von Hattendorf berechneten Tafel (S. 231 ff.) entnommen werden.

Für $\mu = 40$ und $\varphi = 32$ ist (§ 10) $c = 1609{,}32$, ferner $L_\mu = 0{,}44933$. Hieraus folgt

$$c' = 2844{,}00 \text{ Thlr. und } c'' = 2882{,}07 \text{ Thlr.}$$

Im Mittel ist also der Capitalbedarf der Casse für diese unendliche Reihe von Ehepaaren

2863 Thlr.,

wovon auf alle dem ersten nachfolgende Paare

1254 Thlr.

kommen. Um 2863 Thlr. muss demnach das Capital der Casse verstärkt werden, wenn die Zahl der verheiratheten Mitglieder für immer um eines vermehrt wird.

## § 12.

Mit Benutzung der Formeln (5) und (5*) kann nun auch nach folgender zweiter Methode das für die Hinterbliebenen aller künftig der Casse beitretenden Mitglieder erforderliche Capital bestimmt werden, wobei jedoch vorausgesetzt wird, dass die gegenwärtige Zahl der Mitglieder für alle Zukunft sich gleich bleibt.

Sei $m$ das Alter eines der jetzt lebenden Mitglieder, so muss, wenn ihm ein Jahr nach seinem Tode eine unendliche Reihe von Ehepaaren im durchschnittlichen Alter von $\mu$ und $\varphi$ Jahren nachfolgt, die gleichfalls ein Jahr nach dem Tode der Männer einander succediren, für die Hinterlassenen derselben zur Zeit des Todes des $m$-jährigen Mitglieds nach Formel (5) das Capital

$$\frac{1}{r}\,c' = \frac{c}{r - L_\mu}$$

in der Casse vorhanden sein. Der gegenwärtige Werth des-

selben ist aber der der Lebensversicherung dieses Mannes auf die Summe $\frac{1}{r}c'$. Bezeichnet daher $L_m$ den jetzigen Werth seiner Lebensversicherung auf die Summe 1, so ist

$$\frac{L_m}{r}c' \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

das Capital, das die Pensionen der Hinterlassenen aller Nachfolger dieses jetzt lebenden Mitglieds deckt.

Succediren ihm die nachfolgenden Ehepaare ein halbes Jahr nach seinem Tode und ebenso diese einander ein halbes Jahr nach dem Tode der Vorgänger, so ist wieder nur $r$ mit $\frac{1}{2}(r+1)$ zu vertauschen, daher dann das gesuchte Capital nach Formel (5*)

$$\frac{2\,L_m}{r+1}c'' \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6^*)$$

Berechnet man für jedes der jetzt lebenden Mitglieder nach seinem Alter die Zahlenwerthe der Formeln (6) und (6*), so geben die Summen die Grenzen, zwischen denen das Capital liegt, das zur Deckung der Pensionen der Wittwen und Waisen aller künftig eintretenden Mitglieder in der Casse vorhanden sein muss.

## § 13.

Bei der Revision unsrer Casse haben wir jedoch folgendes abgekürzte Verfahren für zulänglich erachtet. Von den am Ende des J. 1881 lebenden Mitgliedern waren 8 über 70 bis 84 Jahre alt, und mögen dieselben als Siebziger bezeichnet werden. Ferner waren 26 Mitglieder Sechziger, 31 Funfziger, 25 Vierziger und 8 Dreissiger. Nun war das durchschnittliche Alter

| | | |
|---|---|---|
| der | 8 Siebziger | 76,6 Jahre, |
| » | 26 Sechziger | 65,1 » |
| » | 31 Funfziger | 55,4 » |
| » | 25 Vierziger | 44,6 » |
| » | 8 Dreissiger | 36,0 » |

Durch Anwendung der Formel (6), in welcher (nach § 11) $c' =$ 2844 Thlr. ist, erhält man folgendes Täfelchen, in welchem $k$ die Zahl der jeder der 5 Altersclassen angehörigen Mitglieder bezeichnet.

| $k$ | $m$ | $L_m$ | $k\frac{L_m}{r}c'$ |
|---|---|---|---|
| 8 | 76,6 | 0,82394 | 18112 Thlr. |
| 26 | 65,1 | 0,71814 | 51310 » |
| 31 | 55,4 | 0,60926 | 51898 » |
| 25 | 44,6 | 0,49336 | 33892 » |
| 8 | 36,0 | 0,41360 | 9092 » |

Hieraus folgt

$$\sum k\frac{L_m}{r}c' = 164304 \text{ Thlr.}$$

als der Capitalbedarf der Casse, wenn die Ehepaare einander ein Jahr nach dem Tode der Männer succediren. Geschieht dies schon ein halbes Jahr nach dem Tode der Männer, so drückt

$$\sum k\frac{2L_m}{r+l}c''$$

nach Formel (6*) diesen Capitalbedarf aus, wo (nach § 11) $c'' = 2882$ Thlr. ist. Es ist aber

$$\sum k\frac{2L_m}{r+1}c'' = \frac{2r}{r+1}\;\frac{c''}{c'}\;\sum k\frac{L_\mu}{r}c',$$

$$\text{d. i. } \frac{2070}{2035}\cdot\frac{2882}{2844}\cdot 164304 = 169364 \text{ Thlr.}$$

Es fällt also der Capitalbedarf der Casse für die Pensionen der Hinterlassenen aller künftig eintretenden Mitglieder zwischen diese beiden Grenzwerthe und kann demnach im Mittel zu

166834 Thlr.

angenommen werden. Dieses Capital ist um 5900 Thlr. grösser als das nach der ersten Methode in § 10 unter der Annahme, dass im Durchschnitt jährlich $3\frac{1}{2}$ Mitglieder eintreten, gefundene. Nimmt man aber für diese nicht sicher bestimmbare Zahl $3\frac{5}{8}$, also nur $\frac{1}{8}$ mehr an, so giebt jene erste Methode

166681 Thlr.,

also fast genau denselben Werth wie die zweite.

Diese Berechnung setzt jedoch voraus, dass alle Nachfolger der jetzigen Mitglieder verheirathet sein werden, was doch nicht zu erwarten ist. Nun fand sich (§ 10), dass von den 105 seit 1851 eingetretenen Mitgliedern, die für die Dauer Theilhaber an der Casse blieben und theils noch leben, theils verstorben sind, 10 nicht sich verehelichten, also nur $\frac{95}{105} = \frac{19}{21}$ der Eingetretenen verheirathet waren. Nimmt man nun an, dass dieses

Verhältniss auch künftig ohngefähr fortbestehen wird, so ist das gefundene Mittel von 166834 Thlr. um $\frac{2}{21}$, d. i. um 15889 Thlr. zu vermindern, und reducirt sich dadurch der Capitalbedarf für die Hinterlassenen aller künftig eintretenden Mitglieder auf 150941 Thlr. oder in runder Zahl

151000 Thlr.

Bei jeder Vergrösserung der Zahl der an der Casse Betheiligten um ein ständiges Mitglied wird aber nach § 11 wegen der Hinterlassenen desselben das Capital der Casse um 2863 Thlr. verstärkt werden müssen.

§ 14.

In der vorstehenden Berechnung (sowie auch im Revisionsbericht) ist der durchschnittliche Altersunterschied der Ehegatten für die eintretenden Mitglieder gleich dem der Ehepaare überhaupt gesetzt, daher zu 8 Jahren angenommen worden. Nachträgliche Untersuchungen haben mir jedoch ergeben, dass diese Zahl zu hoch und dafür richtiger 7 zu setzen ist, welche Altersdifferenz aus der Vergleichung von 71 seit dem Jahre 1861 eingetretenen Ehepaaren resultirt. Dass sonach der durchschnittliche Altersunterschied der eingetretenen Ehepaare um ein Jahr kleiner ist als der der Ehepaare überhaupt, rührt daher, dass an dem letzteren die zweiten und die erstmaligen, aber späten Heirathen von Mitgliedern mit viel jüngeren Frauen einen sehr wesentlichen Antheil haben. So war z. B. im Jahre 1881 der durchschnittliche Altersunterschied bei 12 Paaren, in welchen die Männer in vorgerückten Jahren theils zum ersten-, theils zum zweitenmal sich verheirathet hatten, 21 Jahre, dagegen bei den übrigen 72 Ehepaaren nur 6 Jahre.

Ist nun die Frau eines eintretenden 40jährigen Mitgliedes nicht 32, sondern 33 Jahre alt, so ändert sich die Rechnung wie folgt.

Der jetzige Werth der künftigen Wittwenpension der Frau beträgt dann 1783,12 Thlr., daher der der Waisenpension 99,06 Thlr.; der Werth der jährlichen Beiträge des Mannes mit Einschluss des Eintrittsgeldes bleibt 325,68 Thlr. Folglich ist der Capitalbedarf der Casse für die Wittwe und Waisen dieses Ehepaars

$$c = 1556{,}50 \text{ Thlr.}$$

Durch Anwendung der zweiten Methode (§ 11 und 13) folgt hieraus nach den Formeln (5) und (5*)

$$c' = 2750{,}63 \text{ Thlr. und } c'' = 2787{,}40 \text{ Thlr.},$$

indess für das Ehepaar von 40 und 32 Jahren

$$c' = 2840{,}00 \text{ Thlr. und } c'' = 2882{,}07 \text{ Thlr.}$$

war. Da nun für diese letzteren Werthe nach § 13

$$\sum k \frac{L_m}{r} c' = 164304 \text{ Thlr.}$$

und

$$\sum k \frac{2 L_m}{r+1} c'' = 169364 \text{ Thlr. war,}$$

so treten jetzt an die Stelle dieser Capitalien

$$\frac{2750{,}6}{2840{,}0} \cdot 164304 = 158874 \text{ Thlr.}$$

und

$$\frac{2787{,}4}{2882{,}1} \cdot 169364 = 163804 \text{ Thlr.}$$

Es ist daher der Capitalbedarf der Casse für die Wittwen und Waisen aller künftig eintretenden Mitglieder, sofern sie mit um 7 Jahre jüngeren Frauen verheirathet sind, im Mittel mit

161339 Thlr.

anzusetzen. Nehmen wir endlich auch hier an, dass $\frac{2}{21}$ der eintretenden Mitglieder unverheirathet bleiben werden, so vermindert sich diese Summe um 15366 Thlr. und reducirt sich der Capitalbedarf der Casse auf

145973 oder abgerundet 146000 Thlr.,

und beträgt also 5000 Thlr. weniger, als wenn das durchschnittliche Alter eines eintretenden Paares zu 40 und 32 Jahren angenommen wird.

Endlich sei noch bemerkt, dass, wenn die Zahl der an der Casse participirenden Ehepaare für immer um eins vergrössert und das Alter der eintretenden Paare zu 40 und 33 angenommen wird, nach den obigen Werthen von $c'$ und $c''$ das Capital der Casse im Mittel nur um

2769 Thlr.

verstärkt zu werden braucht, also um 94 Thlr. weniger, als bei der Annahme des Alters der eintretenden Paare von 40 und 32 Jahren.

§ 15.

Unter allen Umständen bleibt jedoch die Berechnung des Capitalbedarfs für die Hinterlassenen aller künftig der Casse beitretenden Mitglieder eine blosse Abschätzung. Denn es lässt sich nicht annehmen, dass die Data, die nach der ersten oder nach der zweiten Methode in Rechnung gezogen werden (das durchschnittliche Alter, die anzunehmende Zahl der jährlich eintretenden Ehepaare, die Zahl und das Alter der Mitglieder, denen sie nachfolgen), für die ganze Folgezeit dieselben Werthe behalten werden. Es wird daher vielleicht am Angemessensten sein, bei der nächsten Revision die Bestimmung des Capitals, das für alle Zeiten die Pensionen der Wittwen und Waisen zu decken verspricht, ganz aufzugeben und sich mit der näher liegenden Zukunft zu begnügen, nämlich nur den Capitalbedarf zu berechnen, der für die Pensionen der Wittwen und Waisen der ersten Nachfolger sämmtlicher jetziger Mitglieder, also für die Hinterlassenen der ersten Generation von Nachfolgern erforderlich ist. Die Beurtheilung der Zahlungsfähigkeit der Casse erstreckt sich dann zunächst zwar nur auf den Zeitraum von einigen Decennien, nach deren Ablauf die gegenwärtige Generation ausgestorben sein wird; aber sie verliert dadurch nichts an genügender Sicherheit. Denn ergiebt es sich, dass die Mittel der Casse zwar die Anforderungen aller gegenwärtig an ihr Betheiligten vollständig decken, aber für die Hinterlassenen der nächstfolgenden ersten Generation nicht ausreichen, so ist dadurch angezeigt, dass der Fortbestand der Anstalt bedroht, mithin schon auf Abhilfe Bedacht zu nehmen ist. Resultirt dagegen aus der Revision, dass die Casse jedenfalls im Stande sein wird, auch die für die nächste Generation erforderlichen Pensionen zu zahlen, so wird die nach zehn Jahren wieder vorzunehmende Revision zeigen, ob dieses günstige Resultat sich in gleichem oder geringerem Maasse wiederholt, oder im Gegentheil ein Deficit in Aussicht stellt. Innerhalb des Zeitraums von zehn Jahren wird aber kaum der dritte Theil der jetzigen Mitglieder ihren nächsten Nachfolgern Platz gemacht haben.

Bei dieser Beschränkung der Aufgabe besteht übrigens der ganze Unterschied der Berechnungsweise nur darin, dass nicht mehr eine unendliche Reihe von Ehepaaren im durchschnitt-

lichen Alter der bisher Eingetretenen vorausgesetzt wird, die den jetzigen Mitgliedern successiv nachfolgen, sondern für jedes dieser Mitglieder ein einziges solches Ehepaar. Ist nun der für die Wittwen- und Waisenpensionen desselben erforderliche Capitalbedarf $= c$, so ist, wenn dieses Ehepaar einem jetzt $m$ Jahre alten Mitglied ein Jahr nach seinem Tode nachfolgt, der gegenwärtige Werth von $c$

$$\frac{L_m}{r} c;$$

wenn es aber demselben schon ein halbes Jahr nach dessen Tode nachfolgt,

$$\frac{2 L_m}{r+1} c,$$

so dass nach diesen beiden Voraussetzungen

$$\sum \frac{L_m}{r} c \quad \text{und} \quad \sum \frac{2 L_m}{r+1} c$$

den gegenwärtigen Werth des für die Wittwen- und Waisenpensionen der ganzen nachfolgenden ersten Generation nöthigen Capitals angeben.

Nach dem vorigen § ist für ein Ehepaar, in welchem der Mann 40, die Frau 33 Jahre alt, $c = 1556,5$ Thlr. Hiernach ist für die fünf Altersclassen des Jahres 1881 folgendes Täfelchen berechnet, das dem in § 13 gegebenen correspondirt.

| $k$ | $m$ | $L_m$ | $k \frac{L_m}{r} c$ |
|---|---|---|---|
| 8 | 76,6 | 0,82394 | 9913 Thlr. |
| 26 | 65,1 | 0,71814 | 28079 „ |
| 31 | 55,4 | 0,60926 | 28403 » |
| 25 | 44,6 | 0,49336 | 18549 » |
| 8 | 36,0 | 0,41360 | 4976 » |

Hieraus folgt

$$\sum k \frac{L_m}{r} c = 89920 \text{ Thlr.}$$

und

$$\sum k \frac{2 L_m}{r+1} c = \frac{2070}{2035} \sum k \frac{L_m}{r} c = 91468 \text{ Thlr.}$$

Das Mittel aus beiden Werthen ist demnach

90694 Thlr.

Bleiben von den 98 nachfolgenden Mitgliedern $\frac{2}{21}$ unverheirathet, so vermindert sich diese Summe um 8638 Thlr. und redu-

cirt sich der Capitalbedarf für die ganze nachfolgende erste Generation auf

82057 Thlr.

Nun ergab bei uns die diesjährige Revision, dass das Capitalvermögen der Casse alle Anforderungen der an ihr gegenwärtig Betheiligten um eine Summe überstieg, die, mit Berücksichtigung des in § 8 verbesserten Werthes des für die Nichtverheiratheten zu reservirenden Capitals,

135848 Thlr.

beträgt. Der Capitalbedarf der Casse für die nachfolgende erste Generation ist also dadurch mit einem Ueberschuss von

53791 Thlr.,

der bereits der zweiten Generation zugute kommt, weit mehr als hinreichend gedeckt, und die Casse, wenn nicht neue unerwartete Forderungen an sie herantreten und sie nicht von Capitalverlusten betroffen wird, jedenfalls auf mehrere Decennien hinaus für zahlungsfähig zu erklären.

Lässt man dagegen die im vorigen § gefundene Abschätzung des Capitalbedarfs für alle künftig nachfolgende Generationen im Betrag von

145973 Thlr.

gelten, so stellt sich allerdings ein Deficit von

10125 Thlrn.

heraus, zu dessen Beseitigung aber schon jetzt Veranstaltung zu treffen, nach den vorstehenden Erörterungen nicht die mindeste Veranlassung vorliegt, so dass vielmehr unbedenklich das Ergebniss der nächsten Revision abgewartet werden kann, und dies um so mehr, als — obgleich seit 1873 die Wittwenpensionen von 300 auf 400 Thlr. erhöht worden sind — sich seitdem das Capitalvermögen der Casse doch alljährlich um 5000 bis 6000 Thlr. vergrössert hat.

## § 16.

Bei Wittwencassen, die nur einem sehr kleinen Theile nach durch die jährlichen Beiträge ihrer Mitglieder, vielmehr hauptsächlich durch Capitalzinsen und Renten aus anderen Cassen fortzubestehen vermögen, ist es von grosser Wichtigkeit, wenigstens annähernd zu bestimmen, auf wieviele in einem Jahre

auszuzahlende Wittwenpensionen (ganz abgesehen von den Waisen) die Casse sich gefasst machen muss. Bei uns, wo im J. 1881 der gegenwärtige Werth der jährlichen Beiträge der 84 verheiratheten Mitglieder noch nicht dem 9ten Theil des gegenwärtigen Werthes der künftigen Wittwenpensionen ihrer Frauen gleich kam, ist die Beantwortung der Frage, auf wieviele gleichzeitig lebende Wittwen im Maximum die Casse zu rechnen hat, ebenso wichtig als schwierig, besonders desshalb, weil die Zahl der Mitglieder keine geschlossene ist, sondern sie sich bisher fortwährend vergrössert hat. Aber auch wenn man annimmt, dass diese Zahl künftig sich ziemlich gleich bleiben und nicht viel über 100 steigen wird, würde es doch sehr gewagt sein, auf eine so mässige Zahl die Erfahrungen überzutragen, die Wittwencassen gemacht haben, an denen viele Hunderte, ja Tausende betheiligt sind. Nach einer Mittheilung des Herrn Professor Dr. Heym zählte die preussische allgemeine Wittwenverpflegungsanstalt im J. 1856 ohngefähr 23000 Ehepaare und 8000 Wittwen. Es kam also durchschnittlich auf drei Ehepaare eine Wittwe, und dieses Verhältniss zeigen, wie Prof. Heym hinzufügt, auch andere Wittwencassen im Beharrungszustande. Dagegen erklärte sich Gauss sehr entschieden sogar gegen das früher nach einem Gutachten Kritter's für Göttingen angenommene Verhältniss, wonach auf zwei Ehen eine Wittwe gerechnet wurde. Er findet vielmehr, dass die einzigen wirklichen Erfahrungen, auf die sich hier fussen lasse, die von Price im J. 1773 mitgetheilten seien, wonach für die Gesammtheit der Pfarrer und Professoren in Schottland auf 667 stehende Ehen nach einem 17jährigen Durchschnitt 380 Wittwen kamen. Gauss setzt daher das Verhältniss zwischen den Zahlen der stehenden Ehen und der Wittwen gleich 7 : 4, und rechnet auf die 42 verheiratheten Göttinger Professoren des Jahrs 1845 nach 45 bis 50 Jahren (wo dann der Beharrungszustand eingetreten sein werde) 24 Wittwen, meint jedoch, dass man schon nach 25 Jahren, wenn auch nur vorübergehend, auf diese Zahl gefasst sein müsse, und hält überhaupt Schwankungen von 7 Pensionen auf- und abwärts für möglich. — Unsere Casse würde hiernach, wenn die Zahl von 84 verheiratheten Mitgliedern sich künftig nicht weiter vermehren, sondern constant bleiben sollte, auf 48 Wittwen, und selbst mit Zugrundelegung des Verhältnisses von 2 : 1 auf 42, und, wenn

man das Mittel zwischen beiden Verhältnissen nimmt, auf 45 gleichzeitig lebende Wittwen rechnen müssen.

§ 17.

Sehr einfach lässt sich dagegen nach der Wahrscheinlichkeitsrechnung vorausbestimmen, wieviele von den jetzt vorhandenen Wittwen nach einer mässigen Zahl von Jahren noch leben, und wieviele von den jetzigen Ehefrauen dann Wittwen geworden sein werden, welche Zahl von Wittwen dann also überhaupt wahrscheinlich vorhanden sein wird.

Denn, was das Erstere betrifft, so ist $\frac{l_{f+n}}{l_f}$ die Wahrscheinlichkeit, dass eine $f$ Jahre alte Frau nach $n$ Jahren noch leben wird. Ihre Existenz zu diesem Zeitpunkt ist also nicht als Einheit in Ansatz zu bringen (was voraussetzen würde, dass ihr Leben nach $n$ Jahren gewiss wäre), sondern nur mit diesem Wahrscheinlichkeitsgrade. Setzt man nun successiv für $f$ das Alter jeder der jetzt vorhandenen Wittwen, so giebt die Summe

$$\sum \frac{l_{f+n}}{l_f} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

die Zahl der Wittwen an, die nach $n$ Jahren wahrscheinlich noch am Leben sein werden.

Zweitens ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine $f$ Jahre alte und jetzt noch mit einem $m$ Jahre alten Manne verheirathete Frau nach $n$ Jahren Wittwe sein wird,

$$\frac{l_{f+n}}{l_f}\left(1 - \frac{l_{m+n}}{l_m}\right),$$

und ist für diesen Zeitpunkt ihre Existenz als Wittwe gleichfalls nur mit diesem Wahrscheinlichkeitsgrad in Ansatz zu bringen. Setzt man nun für $f$ und $m$ die Werthe, die sie in jedem der jetzt vorhandenen Ehepaare haben, so giebt die Summe

$$\sum \frac{l_{f+n}}{l_f}\left(1 - \frac{l_{m+n}}{l_m}\right) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

die Zahl der von den jetzigen Ehepaaren nach $n$ Jahren zu erwartenden Wittwen. Die Zahl $n$ darf aber nicht so gross gewählt werden, dass nicht ausserdem von den innerhalb dieses Zeitraums eintretenden Ehepaaren schon Wittwen zu erwarten wären. Da bei uns (nach § 14) das durchschnittliche Alter eines eintretenden Mitglieds 40 Jahre, das seiner Frau

33 Jahre ist, so ist, wenn wir $n = 10$ setzen, die Wahrscheinlichkeit, dass die Frau eines gegenwärtig eintretenden Mitglieds nach 10 Jahren Wittwe sein wird,

$$\frac{7102}{8014} \cdot \frac{1098}{7943} = 0,1225,$$

also sehr klein, und noch viel kleiner für die in den folgenden Jahren Eintretenden. Es ist daher nicht leicht zu erwarten, dass innerhalb der nächsten 10 Jahre von den in diesem Zeitraume eintretenden Ehepaaren eine Frau Wittwe werden wird, und kann demnach $n = 10$ gesetzt werden.

Wir haben nun zuerst für $n = 10$ die Formel (7) auf die jetzt vorhandenen 32 Wittwen angewandt und

$$\sum \frac{l_{f+n}}{l_f} = 17,43$$

gefunden. So viele werden also nach 10 Jahren wahrscheinlich noch am Leben sein. Ebenso gab die Anwendung der Formel (8) auf die jetzt vorhandenen 84 Ehepaare

$$\sum \frac{l_{f+n}}{l_f} \left(1 - \frac{l_{m+n}}{l_m}\right) = 21,89.$$

So viel Frauen werden also nach 10 Jahren wahrscheinlich Wittwen geworden sein. Und somit ist die Zahl der nach 10 Jahren wahrscheinlich vorhandenen Wittwen überhaupt

$$17,43 + 21,89 = 39,32.$$

Das Jahr der nächsten Revision wird entscheiden, in wieweit diese Vorausberechnung durch die Thatsachen Bestätigung erhält.

Doch wir konnten auch schon aus den bisher bei unsrer Anstalt gemachten Erfahrungen erproben, in wieweit diese die Vorausbestimmungen der Wahrscheinlichkeitsrechnung bestätigt haben.

Die Formel (7), auf die 24 Wittwen des Jahres 1871 angewandt, ergab, dass von ihnen nach 10 Jahren noch leben würden

13,75.

Es lebten aber 1881 in der That noch 16, also 2,25 mehr. Dagegen gab die Formel (8), dass von den 77 Ehefrauen des Jahres 1871 nach 10 Jahren Wittwen sein sollten,

18,19.

Es waren aber nur 16 Wittwen geworden, also 3,19 weniger. Hiernach prognosticirte die Wahrscheinlichkeitsrechnung für 1881 überhaupt

$$13{,}75 + 18{,}19 = 31{,}94$$

Wittwen, und waren wirklich vorhanden 32. Denn dass eine von den Wittwen des J. 1871 sich inzwischen wieder verheirathet hatte, änderte hieran nichts. Ebensowenig, dass der Abgang dieser Wittwe durch eine solche ersetzt wurde, deren Mann erst zwischen 1871 und 1881 eingetreten, aber auch gestorben, daher dieses Ehepaar nicht unter den 77 des ersteren Jahres inbegriffen war.

Eine zweite Prognose bezog sich auf die Wittwen und Ehefrauen des J. 1861. Von den 22 Wittwen dieses Jahres sollten nach Formel (7) am Ende des J. 1871 noch am Leben sein

$$11{,}48.$$

Es lebten in der That noch 12, also nur 0,52 mehr. Dagegen war nach Formel (8) von den 1861 vorhandenen 52 Ehefrauen zu erwarten, dass

$$12{,}69$$

im J. 1871 Wittwen sein würden. Es waren aber wirklich 15 Wittwen geworden, also 2,31 mehr. Die Vorausberechnung gab also überhaupt

$$11{,}48 + 12{,}69 = 24{,}17,$$

die Wirklichkeit dagegen

$$12 + 15 = 27 \text{ Wittwen},$$

also 2,83 mehr. Hieran hatte jedoch die Choleraepidemie des J. 1866 einen wesentlichen Antheil. Denn dieser unterlagen zwei verheirathete Mitglieder, durch welche Epidemie überdies zwei andere ihre Frauen verloren und zu Wittwern wurden.

Jedenfalls wird man, wenn auch künftig bei jeder Revision diese Vorausberechnung der Wittwenzahl nach 10 Jahren ausgeführt wird, die Grösse der Schwankungen kennen lernen, denen unsere Anstalt wegen der nicht hinlänglich grossen Zahl der an ihr betheiligten Personen unvermeidlich ausgesetzt ist. Und überdies ist es auch bei jeder Revision der Casse von praktischem Interesse, zu wissen, ob nach Ablauf von 10 Jahren eine weitere Vergrösserung der Zahl der Wittwen in Aussicht steht.

## § 18.

Die Ab- und Zunahme der wirklichen Zahl der Wittwen innerhalb der letzten 20 Jahre legt folgende Tabelle dar.

| Jahr | Zahl der Wittwen | Jahr | Zahl der Wittwen |
|---|---|---|---|
| 1861 | 22 | 1871 | 27 |
| 1862 | 19 | 1872 | 22 |
| 1863 | 19 | 1873 | 22 |
| 1864 | 19 | 1874 | 24 |
| 1865 | 18 | 1875 | 25 |
| 1866 | 21 | 1876 | 27 |
| 1867 | 22 | 1877 | 30 |
| 1868 | 21 | 1878 | 31 |
| 1869 | 24 | 1879 | 31 |
| 1870 | 24 | 1880 | 31 |
| | | 1881 | 32 |

Es geht hieraus hervor, dass im zweiten Jahrzehnt die Zahl der Wittwen in jedem einzelnen Jahr grösser war als in dem entsprechenden Jahr des vorhergehenden Jahrzehnts, die Unterschiede aber von + 3 bis + 10 variiren, und dass von 1873 an die Zahl der Wittwen ohne Rückgang gestiegen ist.

Wir fügen noch folgende zweite Tabelle hinzu, welche für dieselben Jahre die Zahlen der an der Casse theilhabenden Mitglieder angiebt.

| Jahr | Zahl der Mitglieder | Jahr | Zahl der Mitglieder |
|---|---|---|---|
| 1861 | 72 | 1871 | 95 |
| 1862 | 77 | 1872 | 100 |
| 1863 | 77 | 1873 | 98 |
| 1864 | 77 | 1874 | 96 |
| 1865 | 86 | 1875 | 98 |
| 1866 | 83 | 1876 | 98 |
| 1867 | 85 | 1877 | 98 |
| 1868 | 87 | 1878 | 100 |
| 1869 | 89 | 1879 | 99 |
| 1870 | 94 | 1880 | 100 |
| | | 1881 | 98 |

Auch hier giebt die Vergleichung der Zahlen der Mitglieder in den einzelnen Jahren des zweiten Jahrzehnts mit denen der entsprechenden Jahre des ersten dasselbe Resultat wie bei den Wittwen; die Unterschiede variiren aber von + 6 bis + 23. Besonders beachtenswerth ist jedoch, dass in dem letzten Jahrzehnt die Zahl der Mitglieder sich einem Beharrungszustande nähert. daher wohl erwartet werden darf, dass dieselbe künftig nicht viel über 100 steigen wird. Bei den Wittwen da-

gegen ist ein solcher Beharrungszustand erst nach mehreren Jahrzehnten zu erwarten. Denn er kann nicht eher eintreten, als bis die Zahl der verheiratheten Mitglieder nahe constant geworden ist, und diese mit Hinterlassung von Wittwen verstorben sind. Erst dann wird sich auch, wenigstens annähernd, bestimmen lassen, in welchem Verhältniss bei uns durchschnittlich die Zahl der Ehen zu der Zahl der Wittwen steht.

Nicht ohne Interesse ist es endlich noch, zu bemerken, wie in den letzten 20 Jahren, in welchen der Lehrkörper unsrer Universität einen so starken Zuwachs erhielt, sich die Frequenz der den verschiedenen Altersclassen angehörigen Theilhaber an der Wittwencasse verändert hat. Von den 72 Theilhabern des Jahres 1861 waren 6 über 70 Jahr alt, 19 Sechziger, 17 Funfziger, 16 Vierziger und 14 Dreissiger. Im Jahre 1871 gehörten von den 95 Mitgliedern diesen fünf Altersclassen der Reihe nach 10, 11, 30, 28, 16 an; im Jahre 1881 endlich von den 98 an der Casse Participirenden, wie schon zuvor bemerkt, 8, 26, 31, 25, 8. In Procenten ausgedrückt, giebt dies folgende Zusammenstellung.

| | 1861 | 1871 | 1881 | Mittel |
|---|---|---|---|---|
| Siebziger | 8,3 % | 10,5 % | 8,2 % | 9,0 % |
| Sechziger | 26,4 » | 11,6 » | 26,6 » | 21,5 » |
| Funfziger | 23,6 » | 31,7 » | 31,6 » | 29,0 » |
| Vierziger | 22,2 » | 29,5 » | 25,5 » | 25,7 » |
| Dreissiger | 19,4 » | 16,8 » | 8,2 » | 14,8 » |

Am meisten springt hier in die Augen die ununterbrochene Abnahme der Dreissiger. Sie erklärt sich aber aus der innerhalb dieses Zeitraums verhältnissmässig seltener gewordenen Ernennung einheimischer Docenten zu besoldeten Professoren und der häufigeren Berufung namhafter auswärtiger Gelehrten an unsre Universität.

Dr. **Rud. Leuckart**, *Ueber die Lebensgeschichte der sog. Anguillula stercoralis und deren Beziehungen zu der sog. Ang. intestinalis.* *)

In den ersten Tagen des November 1882 erhielt ich von dem ersten Assistenarzte an der medicinischen Abtheilung des Juliushospitals, Herrn Dr. Seifert, eine Sendung, enthaltend die Probe eines Stuhlganges von einem Individuum, das nach einem fast zwanzigjährigen, in französischen und holländischen Kriegsdiensten verlebten Aufenthalte in Mexico und Atschin vor etwa anderthalb Jahren nach seiner Heimat zurückgekehrt war und wegen einer rheumatischen Affection der Extremitäten in das Würzburger Krankenhaus aufgenommen wurde. In Mexico und später auch in Atschin will Patient mehrfach an Wechselfieber und Dysenterie gelitten, nach seinem Austritte aus dem holländischen Dienste aber keinerlei Unregelmässigkeiten des Stuhlganges mehr bemerkt haben. Trotzdem aber enthielt der Koth desselben, wie Herr Dr. Seifert mir schrieb, constant eine grosse Menge kleiner, dem blossen Auge unsichtbarer Würmchen, so zahlreich, dass jedes Tröpfchen deren 4—6 aufwies, und die Gesammtmenge in jedem Stuhlgange immerhin auf eine Million und darüber geschätzt werden konnte. Einer späteren Mittheilung zufolge war es besonders der mehr flüssige Stuhl, in dem unsere Würmer häufig vorkamen, während der compacte weniger damit besetzt war. Blut war niemals dem Stuhle beigemischt. »Die Parasiten zeigten constant die gleiche Grösse, einen runden Kopf, schmales spitzes Schwanzende, Oesophagusanschwellung, doppelt contourirten Darmkanal und eine Andeutung von Geschlechtsorganen.« Nach Ansicht des Herrn Dr. Stöhr seien die Würmchen die Embryonen von Dochmius duodenalis.

---

*) Seinem factischen Inhalte nach vorgetragen in der Sitzung am 18. Dec. 1882; zum Druck übergeben am 12. März 1883.

Bei näherer Untersuchung der vollkommen frisch und lebend bei mir angekommenen Würmchen ergab sich nun in der That eine grosse Ähnlichkeit mit den Jugendformen des Dochmius. Wie diese, so hatten auch unsere Würmchen durchaus die Charaktere einer Rhabditis. Aber im Einzelnen fanden sich doch mancherlei Unterschiede, so dass eine Identificirung der beiden Formen unmöglich war. Nicht bloss, dass unsere Würmchen zum Theil grösser waren (sie besassen 0,45 — 0,58 — 0,6 Mm. in Länge und 0,016 — 0,02 Mm. in Dicke, während die Embryonen von Dochmius sich bereits metamorphosiren, wenn sie 0,055 Mm. lang sind), auch die Beschaffenheit des Oesophagus und der Genitalanlage charakterisirte sie als eine andere Species. Während die drei Abschnitte des ersteren, der nicht weniger als 0,096 Mm. maass, schärfer gegen einander abgesetzt waren, erschien die Genitalanlage nicht unbeträchtlich grösser (0,046 Mm.) und durch den Besitz von zwei oder drei und noch mehr Kernen ausgezeichnet. Der After lag in einer Entfernung von 0,06 Mm. vor dem dünn auslaufenden pfriemenförmigen Schwanzende.

Aber nicht bloss die Grösse und Organisation, auch das Auftreten im frisch gelassenen Kothe und das massenhafte Vorkommen verboten eine Zusammenstellung mit den rhabditisförmigen Embryonen des Dochmius, die bekanntlich nicht als solche ihren Wirth verlassen, sondern meist erst $1\frac{1}{2}$—2 Tage nach der Auswanderung ihre Eihaut durchbrechen. Dagegen aber erinnerten die Würmer durch das, was sie von Dochmius unterschied, so auffallend an die von Perroncito in seinen Osservazioni elminthologiche relative alla malattia sviluppatasti endemica negli operai del Gottardo (Roma 1880) und in seiner Abhandlung über l'anhemia dei contadini, fornaciai e minatori (Torino 1881) neuerlich genauer beschriebenen Embryonen der sog. Anguillula stercoralis (Pseudorhabditis stercoralis Perronc.), dass ich kein Bedenken trug, dieselben als solche in Anspruch zu nehmen und meinem Correspondenten auch in diesem Sinne zu berichten.

Unter dem Namen Anguillula stercoralis hat Bavay bekanntlich in den Comptes rendus[1]) einen neuen menschlichen Eingeweidewurm beschrieben, der zuerst von Normand in Toulon bei den krank von der Cochinchinesischen Expedition nach

1) Comptes rendus 1876, T. 83, p. 694.

Frankreich zurückkehrenden Soldaten aufgefunden war und als die Ursache der in Cochinchina endemischen und unter den daselbst kriegführenden Truppen stark grassirenden Diarrhoe in Anspruch genommen wurde [1]. Im ausgebildeten Zustand soll der Wurm eine grosse Übereinstimmung mit Dujardin's Rhabditis terricola besitzen, einem in humusreicher Erde verbreiteten frei lebenden Rundwurme von höchstens 1 Mm. Länge. Die Vulva nimmt ungefähr die Mitte des Leibes ein. Sie führt in einen zweihörnigen Uterus, dessen Inhalt aus etwa 20—30 Eiern besteht, die meist mit entwickeltem Embryo den mütterlichen Körper verlassen, den erstern mitunter aber auch schon vorher freigeben. Die Männchen sind an ihrer geringern Grösse und dem eingekrümmten kurzen und stumpfen Schwanzende leicht zu erkennen. Zwei kleine gekrümmte Hornstäbchen, die sich nach dem freien Ende zu verjüngen und einer kurzen und breiten Stützlamelle aufliegen, bilden den Begattungsapparat.

Man findet die Würmchen auf verschiedenen Entwicklungsstufen äusserst zahlreich von der Cardia bis zum Rectum, aber nicht bloss im Darme, sondern auch in den Ausführungsgängen der Bauchspeicheldrüse und der Leber bis in die Gallenblase hinein. In dem Stuhlgange bleiben dieselben einige Zeit hindurch unter günstigen Umständen lebendig und entwicklungsfähig, so dass man die Jugendformen nach Verlauf von etwa fünf Tagen auch ausserhalb des Wirthes in geschlechtsreife Thiere sich umwandeln sieht.

So ungefähr lauten die Angaben, die Normand und Bavay über die Anguillula (oder Rhabditis) stercoralis gemacht haben. Dem Helminthologen mussten dieselben kaum minder interessant erscheinen, wie dem Pathologen, denn mit der bis dahin unbekannten Aetiologie einer anscheinend sehr gefährlichen endemischen Krankheit lehrten sie uns zum ersten Male einen (menschlichen) Eingeweidewurm kennen, der nach der vorliegenden Darstellung nicht nur alle Entwicklungsstadien in seinem Wirthe verlebt, sondern auch ausserhalb desselben, im Freien, zur Geschlechtsreife heranwächst. In Etwas wurde freilich das Ungewöhnliche dieser Erscheinung dadurch gemildert, dass der betreffende Wurm den Rhabditiden zugehörte, einer Nematodengruppe, deren Repräsentanten für gewöhnlich

1) Ibid. 1876, T. 82, p. 316 u. T. 83, p. 386.

nicht als Parasiten leben, wohl aber im Freien überall da in Menge anzutreffen sind, wo eiweisshaltige Substanzen in Zersetzung übergehen.

Ich muss übrigens schon hier bemerken, dass Bavay in einem bald nach Publication seiner ersten Mittheilung veröffentlichten Nachtrage [1]) hervorhebt, dass neben der Ang. stercoralis in dem Darmkanale der Kranken noch eine zweite Nematodenform vorkomme, die sowohl durch ihre Grösse (2,20 Mm.), wie durch schlanke Gestalt und Organisation sehr merklich von der erstern verschieden sei. In einem Falle wurde dieselbe freilich vermisst, sonst aber immer, wenngleich meist nur in geringerer Menge, aufgefunden und zwar vorzugsweise im obern Theile des Dünndarms, niemals im Dickdarm. Alle Exemplare, die Bavay (und Normand, der auch diese Würmer zuerst aufgefunden hatte) beobachtete, waren weiblichen Geschlechtes, mit einer hinter der Körpermitte gelegenen Vulva und einem langen, einfach cylindrischen Oesophagus. Die Eier waren meist in nur beschränkter Anzahl (5—9) vorhanden und wurden bereits vor Ausscheidung eines Embryo nach aussen abgelegt. Obwohl die Form generisch kaum mit der Ang. stercoralis zusammenzustellen war, glaubte Bavay dennoch sie (provisorisch) gleichfalls als eine Anguillula (A. intestinalis) bezeichnen zu sollen.

Wir werden bei einer späteren Gelegenheit auf diese Anguillula intestinalis und die Beziehungen, in denen dieselbe zu der Rhabditis stercoralis steht, zurückkommen. Einstweilen genügt es, auf die Coëxistenz der beiden Formen hingewiesen zu haben.

Der eine dieser Parasiten, die Rhabditis stercoralis, also war es, dessen Jugendform ich in dem mir übersendeten Stuhlgange wieder erkannt zu haben glaubte.

Natürlich, dass ich mit Rücksicht auf die oben angezogenen Beobachtungen Bavay's alsbald den Versuch machte, die Würmchen zur Geschlechtsentwicklung zu bringen. Ich übertrug zu diesem Zwecke kleine Portionen des wurmhaltigen Kothes in Uhrschälchen, die mit einem zweiten kleinern Schälchen gedeckt und dann in der Brutmaschine einer Temperatur von 26°—28° R. ausgesetzt wurden. Um das Austrocknen des Kothes zu verhindern, wurde jedes Versuchsschälchen in ein kleines wieder-

---

1) L. c. 1877, T. 84, p. 266.

um verdecktes Glasbecken gebracht, dessen Boden mit einer Wasserschicht übergossen war.

Die Hoffnung, durch eine derartige Behandlung die jugendlichen Würmer zu geschlechtsreifen Thieren zu entwickeln, wurde dadurch bestärkt, dass Perroncito nach manchem vergeblichen Versuche schliesslich durch seine Experimente gleichfalls zu einem positiven Resultate gekommen war [1]. Auch die ungewöhnliche Grösse und Bildung der Genitalanlage schien — nach Analogie der bei den rhabditisförmigen Embryonen von Ascaris nigrovenosa (Rhabdonema nigrovenosum Lt.) vorkommenden Verhältnisse — auf den raschen Eintritt einer Geschlechtsentwicklung hinzuweisen [2].

Meine Erwartungen sollten nicht getäuscht werden. Schon 30 Stunden nach Üebertragung in die Brutmaschine war der bei Weitem grösste Theil der Jugendformen zu völlig entwickelten männlichen und weiblichen Rhabditiden geworden. Die Mehrzahl hatte bereits den Begattungsact vollzogen, und bei manchen Weibchen war der Uterus schon mit dicht gedrängten und zum Theil gefurchten Eiern angefüllt.

Die Annahme einer Täuschung durch fremde Einwanderer wurde durch die Schnelligkeit und Sicherheit des Erfolges ausgeschlossen. Ich brauchte meine Versuchsschälchen nur in der oben beschriebenen Weise zu behandeln — und der freundlichen Beihülfe des Herrn Dr. Seifert, den ich bereits wenige Tage nach Übersendung des ersten Stuhlganges von dem Gelingen meiner Zuchtversuche in Kenntniss setzen konnte [3], hatte ich auch später noch mehrfach ein reiches Material zu verdanken — um noch vor Ablauf des zweiten Tages die Geschlechtsthiere in Menge darin vorzufinden, vorausgesetzt natürlich, dass der für die Versuche verwendete Koth mit lebenden Jugendformen besetzt war. Wo diese fehlten, wie in späterer Zeit, in der die Würmchen durch die inzwischen eingetretene grössere Kälte

1) L'anhemia etc. p. 57—62.

2) Leuckart, Parasiten des Menschen, Bd. II, S. 140.

3) Mit Anwendung der Brutmaschine ist es auch Herrn Dr. Seifert nachträglich gelungen, die Geschlechtsthiere zur Entwickelung zu bringen. Zum Zwecke der Züchtung vermischte Seifert den Koth mit Erde, was leicht, wenn die Erde vorher nicht durch hohe Temperatur gedörrt ist, durch die Möglichkeit fremder Einschleppung zu Täuschungen Veranlassung giebt.

auf dem Wege nach Leipzig regelmässig zu Grunde gingen — unsere Parasiten sind gegen niedrige Temperaturen überhaupt sehr empfindlich und sterben schon ab, bevor das Thermometer auf den Nullpunct sinkt —, da blieben auch die Geschlechtsthiere aus. Nur in einer einzigen Versuchsreihe ergaben meine Experimente auch unter scheinbar günstigen Verhältnissen ein negatives Resultat. Dieselbe wurde mit einem Kothe angestellt, der schon bei seiner Ankunft in Leipzig mit hefepilzartigen Sporen durchsetzt war, die in der Brutmaschine dann rasch zu einem dichten Pilzgeflechte auswuchsen und die Anfangs noch ganz normal sich entwickelnden Würmer zum Absterben brachten.

Um übrigens die Ergebnisse meiner Culturversuche in jeder Beziehung sicher zu stellen, habe ich mich keineswegs auf die Untersuchung der gezüchteten Geschlechtsthiere beschränkt, sondern auch deren Entwickelungsweise studirt, und Schritt für Schritt die Veränderungen verfolgt, welche die Jugendformen in den ausgebildeten Zustand überführen. Wenn ich es trotzdem unterlasse, hier specieller auf diese Vorgänge einzugehen, so geschieht das vornehmlich mit Rücksicht auf den Umstand, dass dieselben in allen wesentlichen Puncten mit dem übereinstimmen, was bei den verwandten Formen beobachtet und beschrieben ist.

Ich erwähne deshalb nur so viel, dass der Übergang in die geschlechtsreife Form, wie das übrigens schon von Bavay hervorgehoben ist, durch eine Häutung [1]) vermittelt wird. Die Männchen messen um diese Zeit etwa 0,58 Mm. — sie sind ge-

1) Perroncito stellt auffallender Weise die schon früher von mir vielfach beobachtete und beschriebene Häutung der Nematodenlarven in Abrede. Wohl kennt er (auch bei unserer Rhabd. stercoralis) die Thatsache, dass die jugendlichen Nematoden zu bestimmten Zeiten in einer hellen Scheide stecken, aber er erklärt diese, trotzdem sie sich auf das Vollständigste den Formverhältnissen und Bewegungen des Körpers anschmiegt, für eine der Trichinenkapsel zu vergleichende Cyste, welche, wie diese, durch Erhärtung eines von dem Wurme gelieferten Secretes entstehe und gleich ihr auch verkalken könne (!). Gegen die Bezeichnung Cyste an sich ist natürlich Nichts einzuwenden. Sie wird gelegentlich auch von Schneider für die abgestossene und futteralartig dem Körper aufliegende Cuticula gebraucht. Aber Letzterer erkennt dabei ausdrücklich an (Monographie der Nematoden S. 303), dass diese »Cyste« nichts Anderes sei, als die frühere Larvenhaut.

gen früher nur wenig gewachsen —, während die Weibchen inzwischen eine Länge von 0,75 Mm. und darüber erreicht haben. Man sieht die abgestossene Haut noch eine Zeit lang wie eine helle Scheide dem Geschlechtsthiere aufsitzen, erkennt aber unter derselben bereits deutlich die männlichen so gut, wie die weiblichen Organe mit ihrer charakteristischen Gestaltung und Ausmündung. Die beiden Uteri sind Anfangs freilich so wenig entwickelt, dass die Spannweite des weiblichen Apparates kaum mehr als 0,23 Mm. beträgt, wobei allerdings zu berücksichtigen ist, dass die Ovarialenden nach der Vulva zu umgeschlagen sind. Die hornigen Begattungsapparate der Männchen haben zunächst nur eine geringe Festigkeit und ein blasses Aussehen. Was die specifische Form des männlichen Hinterleibsendes betrifft, so macht sich diese erst nach dem Abstreifen der Larvenhaut bemerkbar; so lange letztere noch persistirt, ist kaum ein Unterschied zwischen der männlichen und weiblichen Bildung nachzuweisen. Die Häutung selbst geschieht 15—18 Stunden nach der Uebertragung in den Brutapparat. (In der Zimmertemperatur (+ 15° R.), die Nachts allerdings auf 7—8° R. fiel, brauchten die Würmchen 8 Tage, bevor sie zur Häutung sich anschickten.)

Nachdem die alte Haut abgestreift ist, nehmen die Geschlechtsthiere, Männchen wie Weibchen, unter gleichzeitiger Fortentwickelung der Genitalien und Ausbildung der Geschlechtsstoffe weiter an Körpergrösse zu. Die Männchen wachsen durchschnittlich bis zu 0,7 Mm. (Dicke = 0,04 Mm.), die Weibchen bis 1,2 Mm. (Dicke = 0,075 Mm.), doch trifft man nicht selten auch Exemplare von beträchtlicherer Grösse, Männchen von 1 Mm. und Weibchen sogar von 1,4 Mm. Die für beide Geschlechter so charakteristische Verschiedenheit der Körpergrösse spricht sich natürlich auch in dem Verhalten des Darmkanales aus, besonders des Chylusdarmes, der bei den Weibchen fast um die Hälfte länger ist, als bei den Männchen, obwohl die Zahl der ihn auskleidenden ziemlich flachen Zellen, die, wie gewöhnlich bei den Rhabditiden, alternirend in zwei Längsreihen einander gegenüber stehen, bei beiden die gleiche ist, und genau dieselbe, welche schon bei den Jugendformen angetroffen wird (jederseits 16—18). In den ausgewachsenen Thieren sind die Contouren der Zellen freilich nicht selten verwischt, so dass deren Territorien oftmals nur an den hellen Kernen sich erkennen lassen. Der Oesophagus wächst bei der Metamorphose ver-

hältnissmässig viel weniger, als der Chylusdarm, so dass er auch bei den Weibchen kaum länger wird, als 0,16 Mm. Bei den Männchen bleibt er meist um ein Geringes hinter dieser Grösse zurück.

Die Bildung dieses Oesophagus ist im Wesentlichen die gleiche, wie bei der Larve, nur dass die charakteristischen Formen desselben weit bestimmter hervortreten, als das früher der Fall war. Der orale Theil ist von den drei Abschnitten, deren Existenz schon oben erwähnt wurde, der grösseste. Er nimmt etwas mehr als die Hälfte des gesammten Apparates in Anspruch (0,9 Mm.) und erscheint als eine nach vorn zu wenig verjüngte dicke Walze, die sich hinten abrundet und dann in das kaum halb so dicke cylindrische Mittelstück fortsetzt. Mit letzterem verbindet sich das wiederum verdickte kugelförmige Endstück, dessen Durchmesser etwa 0,03 Mm. beträgt. Im Innern enthält dasselbe den für Rhabditis so charakteristischen Zahnapparat, drei conische Spitzen, die schon bei den Larven vorhanden sind und hier sogar noch deutlicher hervortreten.

Das Kopfende unserer Würmer ist abgerundet und ohne lippenförmige Vorsprünge, obwohl Bavay und auch Perroncito solche bei den Jugendformen (allerdings nur undeutlich) gesehen haben wollen. Wohl aber erkennt man im Umkreis der Mundöffnung vier (nicht drei) kleine Cuticularverdickungen, die bei hoher Tubusstellung durch ihren Glanz auffallen und als Gefühlspapillen in Anspruch zu nehmen sein dürften. Perroncito beschreibt an deren Stelle (bei den Geschlechtsthieren) zwei Chitinzähne, auf die er in einiger Entfernung nach hinten (der Abbildung auf p. 61 zufolge am Vorderende des Oesophagus) noch zwei andere gleiche Gebilde folgen lässt. Ich muss die Existenz dieser vier Zähne in Abrede stellen, und kann auch sonst mit der Darstellung, welche der italienische Forscher von der Mundbildung seiner Pseudorhabditis giebt, mich nicht einverstanden erklären.

Nach Allem, was ich über die allerdings nicht ganz leicht zu analysirenden Verhältnisse erkannt zu haben glaube, führt die rundliche Mundöffnung unserer Thiere zunächst in ein Vestibulum, das bei unbedeutender Länge eine ziemlich ansehnliche Breite besitzt, so dass es das vordere Oesophagealende umfasst, und dieses in Form eines flach gerundeten Zapfens in dasselbe hinein vorspringt. Die das Vestibulum seitlich über-

dachenden Ränder des Kopfendes besitzen eine verhältnissmässig beträchtliche Dicke, so dass sie durch ihr Aussehen im optischen Querschnitte leicht die Annahme zweier vorderen Zähne mögen veranlasst haben. Die von Perroncito als hintere Zähne gedeuteten Gebilde beziehen sich auf drei hufeisenförmige Chitinleisten, die einzeln den drei Muskelbalken des Oesophagealrohres am vorderen Ende aufsitzen und mit einem kleinen Zahnvorsprunge in das Vestibulum hineinragen. Die Zahl will allerdings mit Perroncito's Angaben nicht recht passen, allein die Stellung der Vorsprünge bringt es mit sich, dass in bestimmter Lage immer nur zwei derselben in Sicht kommen. Und diese zwei sind offenbar von Perroncito für die einzigen gehalten worden.

Bei den Jugendformen hat das Vestibulum eine geringere Entwickelung. Es erscheint als ein einfacher cylindrischer Hohlraum, der zwischen Mund und Oesophagus sich einschiebt. Die Zahnbewaffnung fehlt einstweilen noch vollständig. Ebenso lassen sich die Tastpapillen nicht nachweisen, obwohl die Bildung und Form des Kopfendes sonst schon die spätere ist.

Noch auffallender übrigens, als die Veränderungen des Kopfendes, sind die Umgestaltungen, welche das männliche Hinterleibsende bei dem Übertritte in den geschlechtsreifen Zustand erleidet. Während dasselbe bei den Weibchen die frühere schlanke Kegelform im Wesentlichen beibehält und höchstens insofern etwas verändert, als es an Länge zunimmt (0,1 Mm.) und in eine fadenartig dünne Spitze sich auszieht, die gleich dem vorhergehenden schlankern Schwanztheile eine leichte Spiraldrehung erkennen lässt, verwandelt sich das Hinterleibsende der männlichen Thiere in einen hakenförmig eingekrümmten kurzen Zapfen (0,07 Mm.), der sich nach der dünnen Spitze zu rasch verjüngt und seine conische Form um so stärker hervortreten lässt, als die dem übrigen Leibe aufsitzende Basis durch die Geschlechtsorgane und den mit Sperma gefüllten unteren Abschnitt der Genitalröhre zu einer beträchtlichen Dicke aufgetrieben ist. Die beiden Spicula, welche nicht selten aus der Cloaköffnung hervorsehen, sind bogenförmige schlanke Stäbe von 0,038 Mm., während das Zwischenstück nur 0,02 Mm. misst. Vor der Cloaköffnung erkennt man an der meist gleichfalls eingekrümmten Bauchfläche zwei oder drei Paare kleiner Papillen. Postanale Papillen dagegen liessen sich nicht nachweisen.

Den Begattungsact habe ich nicht zu Gesicht bekommen.

Nach Bavay ist derselbe von nur kurzer Dauer. Das Männchen umfasst dabei mit seinem eingekrümmten Hinterleibsende den Körper des Weibchens auf der Höhe der Vulva.

Nachdem die Begattung stattgefunden hat, beginnt der Übertritt der Eier in den Uterus. Dieselben besitzen eine etwas ellipsoidische Form (Länge = 0,07, Breite = 0,045 Mm.) und enthalten unter einer zarten Schalenhaut einen fast körnerlosen blassen Dotter. Der Übertritt geschieht so reichlich, dass der Uterus mit seinen beiden Schenkeln schon nach kurzer Zeit mehr als die Hälfte des ganzen Körpers durchwächst und den daneben hinziehenden Darm vollständig zusammendrückt. In der Regel werden die Eier, besonders, wie es scheint, Anfangs, so lange dieselben noch in grösserer Anzahl den Eierstock verlassen, auf einem späten Stadium der Dotterklüftung abgelegt. In andern Fällen aber wird die ganze Embryonalentwickelung im Uterus durchlaufen. Nicht selten trifft man auch Weibchen, deren Embryonen frei im Uterus sich bewegen, und sogar solche, deren Junge nach Durchbohrung der Uteruswand und Zerstörung der Eingeweide im mütterlichen Körper bereits um ein Beträchtliches herangewachsen sind, wie das nicht selten auch bei andern Rhabditiden der Fall ist. In der Zimmertemperatur bedürfen die Eier bis zur Entwickelung der Embryonen eines Zeitraums von etwa 20—24 Stunden, während die Zuchtgläser der Brutmaschine bereits nach 40 Stunden, von der Übertragung an gerechnet, eine reiche Descendenz neben den Geschlechtsthieren aufweisen.

Beim Ausschlüpfen besitzen die Embryonen dieser zweiten Generation eine nur geringe Grösse (0,22 Mm.) und ein blasses Aussehen, so dass die Organisation sich schwer analysiren lässt. Doch das ändert sich, sobald die Würmchen heranwachsen. Schon bei einer Grösse von 0,25 Mm. ergeben sich dieselben als Geschöpfe, die nicht bloss in Körperbildung, sondern auch im innern Bau mit den Jugendformen der ersten Generation die grösseste Ähnlichkeit haben. Nur dass sie sich durch die schlanke Form ihres Leibes (Dicke = 0,012 Mm.) und die unbedeutende Grösse ihrer Genitalanlage von ihnen unterscheiden. Das pfriemenförmige Schwanzende misst 0,07 Mm., und der dreigetheilte Oesophagus 0,09—0,1 Mm. Im Innern des kugeligen Endstückes erkennt man drei klappende Zähne, die an

Grösse freilich um Einiges hinter den entsprechenden Gebilden der früheren Embryonen zurückstehen.

Auf dem hier kurz geschilderten Entwickelungstadium verharren die Nachkömmlinge der freien Generation, bis sie zu einer Länge von 0,5 bis 0,6 (gewöhnliche Grösse 0,55) Mm. herangewachsen sind. Dann aber geht mit ihnen eine eigenthümliche Umwandlung vor sich. Sie unterliegen einer Häutung, verlieren ihre Rhabditis-Charaktere und werden zu Würmern, die man ihrer Organisation nach vielleicht am ehesten gewissen jugendlichen Strongyliden oder Filarien vergleichen könnte.

Unter der abgestossenen zarten und durchsichtigen Cuticula lässt sich die Metamorphose unserer Würmchen Schritt für Schritt verfolgen. Sie betrifft vornehmlich die Endstücke des Leibes, den Kopftheil mit dem Oesophagus und das Schwanzende. Das letztere verkürzt sich nach der Lösung der Cuticula; es verliert die für die früheren Zustände so charakteristische Pfriemenform und verwandelt sich in einen schlanken und kurzen (0,04 Mm.) Fortsatz, der sich nach hinten um höchstens die Hälfte seines Durchmessers verjüngt und dann abgestumpft endigt. Die Seitenränder sieht man in Form zweier kleiner Spitzchen hervorragen. Ähnliche sog. Schwanzpapillen beobachtet man bekanntlich auch bei den Jugendzuständen anderer Nematoden z. B. Cucullanus, nur dass zwischen den Spitzchen hier noch das eigentliche Schwanzende einen unpaaren dritten Vorsprung bildet.

Weit auffallender sind die Veränderungen des Oesophagus, welcher nicht bloss die klappenden Zähne verliert, sondern auch seine frühere Gliederung, und zu einem langen Cylinder (0,24 Mm.) wird, der die ganze vordere Hälfte des Wurmes durchwächst und erst weit hinten, fast genau in der Mitte des Leibes, in den Chylusmagen übergeht. Bei näherer Untersuchung lassen sich aber auch noch an diesem Oesophagus trotz seines auf den ersten Blick ganz gleichförmigen Aussehens die früheren drei Abschnitte unterscheiden, nur dass dieselben beträchtlich gestreckt sind und ohne scharfe Grenzen in einander übergehen. Am deutlichsten ist die vordere Abgrenzung des Mittelstückes, welches etwa 0,06 Mm. hinter der Kopfspitze beginnt und sich

durch seine geringere Dicke gegen den mehr walzenförmigen Mundtheil des Oesophagus merklich absetzt. Nach hinten nimmt dasselbe freilich an Stärke zu, so dass der Übergang in das allmählig anschwellende kurze und flaschenförmige Endstück kaum mit Sicherheit zu bestimmen ist. Die Beobachtung von Übergangsstadien lässt übrigens keinen Zweifel, dass dieses Endstück nur wenig in die Länge wächst, an der Streckung des Oesophagus also nur einen geringen Antheil hat. Von den Zähnen und den dieselben bewegenden Muskelzügen ist keine Spur mehr nachweisbar. Wohl aber bemerkt man in der hintern Verdickung zwei oder drei ziemlich grosse helle Flecke, die vermuthlich auf Kernbildungen hinweisen. Die Untersuchung des histologischen Baues wird übrigens dadurch erschwert, dass während der Metamorphose der Würmer im Umkreis des Oesophagus, besonders des Mittelstückes, und auch des Chylusdarmes zahlreiche stark lichtbrechende Körner sich ansammeln und die Contouren der Eingeweide mehr oder weniger verdecken. Die Zellen des Chylusdarmes, der durch das Auswachsen des Oesophagus um ein Merkliches verkürzt wird, sind nicht mehr so deutlich gegen einander abgegrenzt, wie das früher der Fall war, und gleichfalls mit groben Körnern durchsetzt, welche die Kerne oft unsichtbar machen.

Im Gegensatze zu den Eingeweiden besitzen die Körperdecken eine äusserst helle und durchsichtige Beschaffenheit, so dass die Seitenlinien scharf hervortreten. Die ausserordentliche Kleinheit der Geschlechtsanlage ist schon früher hervorgehoben.

Über die Bildung des Kopfendes bin ich nicht völlig in's Klare gekommen, da das Aussehen desselben in den verschiedenen Contractionszuständen wechselt. Gegen früher ist aber auch hier insofern eine Veränderung eingetreten, als im Umkreis der Mundöffnung eine Anzahl von lippenartigen Vorsprüngen — ich glaube mehrfach deren vier gezählt zu haben — vorhanden ist.

Um zu der hier geschilderten Wurmform sich zu entwickeln, bedürfen die Embryonen der zweiten Generation eines Zeitraums von etwa 30—36 Stunden. Am vierten und fünften Züchtungstage sieht man die filarienartigen Larven in immer grösserer Menge auftreten, und nach acht Tagen bilden sie überhaupt die einzigen Bewohner der Zuchtapparate. Die geschlechtsreifen Rhabditen sind zu Grunde gegangen, und die rhabditis-

förmigen Jugendzustände haben sämmtlich ihre Metamorphose durchlaufen. Wo beiderlei Formen neben einander vorkommen, lassen sich dieselben übrigens jederzeit, selbst dann, wenn sie von gleicher Grösse sind, gar leicht unterscheiden. Nicht bloss, dass die Würmchen der zweiten Generation eine schlankere Körperform besitzen und in oben beschriebener Weise durch die Beschaffenheit ihres Schwanzendes und Oesophagus sich charakterisiren, weit rascher noch und eben so sicher lassen sie daran sich erkennen, dass sie mit rapider Geschwindigkeit sich bewegen und ihren Körper stärker krümmen und schlängeln, als die mehr starren und behäbigen Rhabditiden.

Eine weitere Veränderung geht mit diesen Larven nicht vor sich. Selbst eine Grössenzunahme ist nicht zu constatiren, auch dann nicht, wenn es gelingt, die Thiere einige Tage hindurch am Leben zu erhalten. Noch am zehnten und zwölften Zuchttage zeigten dieselben in meinen Schälchen ganz die frühern Verhältnisse. Wohl trifft man hier und da auf Exemplare, die eine etwas beträchtlichere Grösse besitzen — ich maass einzelne von 0,6 Mm. —, aber es sind das vermuthlich immer nur solche, welche einer etwas grösseren Jugendform ihren Ursprung verdanken.

Nach Verlauf einer Woche nahm übrigens die Zahl der Larven in meinen Zuchtschälchen immer mehr ab. Die Würmchen erlagen dem Nahrungsmangel, wie daraus hervorging, dass die perivisceralen Körner allmählig erblassten und einschmolzen. Offenbar, dass unsere Larven für eine längere Dauer des freien Lebens eben so wenig eingerichtet sind, wie die gleichfalls aus rhabditisförmigen Jugendzuständen hervorgegangenen Larven von Dochmius und andern Strongyliden[1]. Gleich diesen werden sie ihre Entwicklung erst dann weiter fortzusetzen im Stande sein, wenn sie das freie Leben mit einem parasitischen vertauscht haben: die filarienartigen Larven der Rhabditis stercoralis müssen mit andern Worten in einen geeigneten Träger überwandern, um zur vollen Ausbildung und Geschlechtsreife zurückzukehren.

Den hier dargelegten Beobachtungen zufolge zeigt die Lebensgeschichte der sog. Anguillula stercoralis das Bild eines

---

1) Vgl. Leuckart, Parasiten des Menschen, Bd. II, S. 131 ff.

Schmarotzerwurmes, dessen Embryonen im Freien zu geschlechtsreifen Rhabditiden heranwachsen und erst in deren Nachkommen wieder zu Entozoen werden, eines Thieres also, dessen cyclische Entwicklung eine Wechselfolge freier und parasitischer Generationen aufweist.

So auffallend diese Erscheinung ist, so steht dieselbe doch nicht isolirt, da es mir schon vor zwanzig Jahren gelungen ist, den gleichen Entwicklungsgang bei einem Froschnematoden, der sog. Ascaris nigrovenosa (Rhabdonema nigrovenosum Lt.), nachzuweisen[1]. Ich habe diese Wechselfolge verschiedener Generationen als Heterogonie bezeichnet, mit einem Namen, den Ercolari lieber mit Dimorphobiose vertauscht wissen möchte[2].

Nach Analogie der sog. Ascaris nigrovenosa haben wir die geschlechtsreifen Zustände unserer filarienartigen Larven bei dem ursprünglichen Wirthe, dem Menschen also, zu suchen. Der Bau der Larven aber ist der Art, dass sie unmöglich wieder zu einer Rhabditisform sich entwickeln können. Es muss ein anderer Wurm sein, der aus ihnen hervorgeht, eine Art, die sich durch Körperform und Bildung des Oesophagus an dieselben anschliesst. Und da liegt es nun nahe, diesen geschlechtsreifen Zustand in der sog. Anguillula intestinalis zu vermuthen, die schon von Bavay mit seiner Ang. stercoralis zusammen im Menschen aufgefunden wurde und Charaktere aufweist, welche einer Zusammenstellung mit unsern Larven in jeder Beziehung günstig sind. Es geht das nicht bloss aus den Angaben hervor, die Bavay selbst über seine Ang. intestinalis macht, sondern noch bestimmter aus der Beschreibung und Abbildung, welche Grassi und C. Parona später von diesem Parasiten veröffentlicht haben[3].

Die Würmer, welche die beiden letztgenannten Forscher ihren Beobachtungen zu Grunde legten, stammten aber nicht

---

1) A. a. O. S. 139 ff.

2) Sulla dimorphobiosi, Bologna 1873 (Mem. Accad. delle sc. dell' Instituto di Bologna Ser. III. T. IV). In dieser und einer späteren demselben Gegenstande gewidmeten Abhandlung versucht Ercolani den (misslungenen) Nachweis, dass die Nematoden im weitesten Umfange durch Dimorphobiose sich entwickelten.

3) Sovra l'Anguillula intestinale (dell' uomo) e sovra embrioni probabilimente d'anguillula intestinale, Archivo per le scienze mediche, Vol. III. S. 10. Pl. V.

aus Cochinchina oder Sumatra, sondern aus der Lombardei, wo dieselben in gewissen Gegenden dem Anscheine nach kaum weniger verbreitet sind, als der Dochmius duodenalis, mit dem sie nicht selten auch gemeinschaftlich im Darmkanale auftreten. Die geschlechtsreife Form (2,25 Mm. lang, 0,03 Mm. breit) beobachteten Grassi und Parona allerdings nur in einem einzigen Falle, in einer Leiche, die neben vielleicht tausend Exemplaren auch Eier und Embryonen in ausserordentlicher Menge aufwies. Die Grösse der elliptischen Eier wird auf 0,06 und resp. 0,04 Mm., die der neugebornen Embryonen auf 0,21 bis 0,24 Mm. (Dicke = 0,025 Mm.) angegeben. Aber schon nach Verlauf von 24 Stunden massen die im Kothe heranwachsenden Embryonen 0,45 Mm. und einige Tage später sogar 0,60 Mm.

In 19 andern Fällen konnte die Anwesenheit der Anguillula nur durch den Nachweis der Embryonen geführt werden, die mehr oder minder massenhaft im Kothe der Kranken vorhanden waren. Aber die Bildung dieser Embryonen liess an der Identität mit den Abkömmlingen der Anguillula intestinalis keinerlei Zweifel aufkommen. Es waren immer die gleichen Formen, rhabditisartige Junge, in Körperbau, Beschaffenheit des Oesophagus und Grösse der Genitalanlage mit den von mir zuerst untersuchten Embryonen so übereinstimmend, dass ich allmählich immer bestimmter zu der Überzeugung kam, es seien auch die Würmer des Würzburger Patienten als Abkömmlinge nicht der Rhabditis stercoralis, sondern der Anguillula intestinalis in Anspruch zu nehmen.

Von besonderem Gewichte war in dieser Beziehung der Umstand, dass die italienischen Forscher in ihren Zuchtgefässen nach 10—12 Tagen an Stelle der früheren Rhabditisformen Würmchen antrafen, welche ebensowohl durch die Länge und die einfache Gliederung des Oesophagus, wie durch die »Unsichtbarkeit« der Genitalanlage mit den von mir gezüchteten filarienartigen Larven übereinstimmen[1]. Der abge-

[1]) Schon Bavay hat übrigens diese Larven gesehen und auf seine Anguillula intestinalis bezogen. »Dans les selles de trois diarhéiques que nous avions conservées pour suivre le developpement de l'Anguillula stercoralis — so lesen wir a. a. O. — nous avons trouvé qu'au bout de quelques jours, qu'elles contenaient certaines larves différentes des premières. Elles étaient, en effet, plus allongées, avec un oesophage cylindrique descendant jusque vers le milieu du corps et une queue, qui, au lieu de se

stumpften Form des Schwanzendes geschieht freilich keine Erwähnung. Ebenso wenig kennen die Verfasser die im Freien sich entwickelnden Geschlechtsthiere, deren Brut ich zu den filarienartigen Larven sich entwickeln sah; dieselben sind vielmehr der Ansicht, dass die betreffenden Larven direct aus den rhabditisförmigen Jugendzuständen der Anguillula intestinalis hervorgingen. Auf beides aber glaube ich um so weniger Gewicht legen zu dürfen, als einer der Beobachter, wie wir sehen werden, bei einer späteren Gelegenheit selbst die Möglichkeit einer heterogonen Abstammung für unsere Thiere zugiebt.

Schon vor Veröffentlichung der oben angezogenen Beobachtungen hat uns Grassi übrigens damit bekannt gemacht, dass die Anguillula intestinalis oder doch eine damit ausserordentlich nahe verwandte Art in der Lombardei auch bei verschiedenen Säugethieren, beim Kaninchen, Schwein und Wiesel, von ihm aufgefunden sei und namentlich bei ersterm durchaus nicht selten vorkomme[1]).

In keinem einzigen Falle wurde übrigens, weder bei den Thieren, noch bei dem Menschen, eine männliche Anguillula beobachtet. So viele deren zur Untersuchung kamen, alle waren sie weiblichen Geschlechtes, wie das auch schon von Bavay hervorgehoben wurde. Für uns hat dieser Umstand eine um so grössere Bedeutung, als auch die sog. Ascaris nigrovenosa, die wir als erstes und ältestes Beispiel einer heterogonen Entwicklung oben angezogen haben, einer eignen männlichen Form entbehrt. Allerdings haben wir durch Schneider[2]) inzwischen erfahren, dass der weiblichen Reife dieses Wurmes ein Zustand vorhergeht, in dem die Geschlechtsröhren desselben Samenkörperchen erzeugen, dass die Asc. nigrovenosa also ein Zwitter ist. Aber die Samenkörperchen sind, wenn später die weibliche Reife eintritt, und die Eier in einer grösseren Menge sich anhäufen, leicht zu übersehen — und so mag es sich denn auch bei unserer Anguillula intestinalis verhalten. Jedenfalls aber

terminer en pointe fine, était, au contraire, comme tronquée à l'extrémité. Bien que l'éducation de ces larves n'ait pu être amenée assez loin pour établir d'une façon irréfutable leur identite avec l'anguillula intestinale, nous n'avions guère de doute à cet égard.«

1) L'anguillula intestinalis, Gazetta medica Italiano-Lombardia 1878 No. 48.

2) Monographie der Nematoden S. 316.

giebt diese scheinbare Eingeschlechtlichkeit und die darin sich aussprechende weitere Analogie der Anguillula intestinalis mit Ascaris nigrovenosa unserer Annahme, dass auch erstere ein heterogoner Parasit sei, eine neue Stütze.

Wenn es nun aber die Anguillula intestinalis ist, und nicht, wie wir in Uebereinstimmung mit Bavay bei Beginn unserer Untersuchungen annahmen, die Rhabditis stercoralis, an welche der Entwicklungscyclus unserer Würmer anknüpft, wie verhält es sich dann mit der Angabe, dass die letztere nicht bloss im Freien geschlechtsreif auftrete, sondern auch, wie Normand und Bavay behaupten, im Darme zur Entwicklung komme und als Schmarotzer neben der Anguillula intestinalis gefunden werde?

Zur Prüfung dieser Frage sei es mir zunächst erlaubt, auf die Mittheilungen zurückzugreifen, welche Perroncito in den oben angezogenen zwei Abhandlungen niedergelegt hat. Dieselben betreffen ebensowohl die Anguillula intestinalis, die Verf. übrigens nicht als eine Anguillula anerkennt, sondern dem Genus Strongylus zurechnen möchte — Grassi hat für dieselbe den neuen Genusnamen Strongyloides vorgeschlagen[1] —, wie die Rhabditis (Pseudorhabditis) stercoralis, die beide von unserem Forscher neben Dochmius duodenalis bei den an der sog. Tunnelkrankheit leidenden Arbeitern der Gotthard-Eisenbahn aufgefunden wurden.

Das Auftreten dieser Würmer war so constant und in der Regel so massenhaft, dass Perroncito kein Bedenken trägt, dieselben — in erster Reihe allerdings den (blutsaugenden) Dochmius — mit der genannten Krankheit in aetiologische Beziehung zu bringen, während Grassi und Parona über die pathogene Bedeutung der Anguillula im Gegensatze zu Normand-Bavay sehr rückhaltend sich aussprechen und eher geneigt sind, die cachectischen Erscheinungen und die Darmaffectionen ihrer Kranken — und keiner der von ihnen untersuchten Anguillulaträger war völlig gesund — auf anderweitige schädliche Einflüsse (schlechte Ernährung, Sumpfklima u. s. w.) zurückzuführen.

Ob Perroncito übrigens die uns hier interessirenden zwei Würmer im geschlechtsreifen Zustande jemals im Darme

---

1) Sovra l'anguillula intestinale, Rendicond. Instit. Lombardo 1879 Vol. XII, Fasc. 5.

beobachtet hat, muss ich dahingestellt sein lassen. Soviel ich sehe, wird solches nirgends ausdrücklich hervorgehoben. Die ausgebildete Rhabditis stercoralis wird allerdings (l'anemia p. 63) mit Berücksichtigung beider Geschlechter eingehend beschrieben und auch mehrfach (Fig. 34 u. 36) abgebildet, aber selbst bei dieser Gelegenheit vermissen wir einen bestimmten Hinweis auf das Herkommen aus dem Darme. Immer und immer wieder recurrirt Verf. auf seine Culturversuche, die ihm ja, wie das schon oben von uns hervorgehoben ist, nach mancherlei vergeblichen Versuchen schliesslich die Zucht geschlechtsreifer Rhabditiden gelingen liessen.

In Betreff der geschlechtsreifen Anguillula intestinalis (Strongylus papillosus Perronc.) sind die Angaben so spärlich, dass man wohl annehmen darf, der Verfasser habe dieselbe nur aus den Beschreibungen von Normand-Bavay und Grassi kennen gelernt.

Trotzdem aber unterscheidet Perroncito nicht bloss diese zwei Formen als Repräsentanten verschiedener Arten, sondern ebenso auch deren Jugendzustände. Sie sind beide — die auf Dochmius bezüglichen Angaben lassen wir als bedeutungslos für unsere Zwecke bei Seite — rhabditisförmig und einander ausserordentlich ähnlich. Nur insofern besteht in formeller Hinsicht ein Unterschied, als die Embryonen der Anguillula intestinalis schlanker sind und eine Genitalanlage von nur äusserst geringer Grösse besitzen.

Sehr viel auffallender aber, als diese Differenzen, sind nach unserem Verfasser die Unterschiede, welche beide Jugendformen in ihrer Entwickelung zeigen.

Die Embryonen der Anguillula intestinalis unterliegen, wenn sie eine Länge von 0,48—0,50 Mm. erreicht haben, einer einfachen Metamorphose, in Folge deren sie unter der inzwischen abgestreiften Cuticularhülle — im encystirten Zustande, wie Perroncito will — die uns bekannte filarienartige Larvenform mit dem langen Oesophagealrohre und dem abgestumpften Schwanzende annehmen, während die Embryonen der Rhabditis stercoralis in der oben beschriebenen Weise zu geschlechtsreifen Rhabditiden heranwachsen und eine Nachkommenschaft erzeugen, welche nach Ansicht unseres Verfassers eben so direct, wie die Brut der Anguillula intestinalis, im menschlichen Darme ihre Entwicklung bis zur Geschlechtsreife fortsetzt.

Dass sich die Rhabditis stercoralis auch ohne Auswanderung und freie Zwischengeneration im menschlichen Darme vermehrt, unterliegt für Perroncito (l. c. p. 55) nicht dem geringsten Zweifel. Er erschliesst dasselbe aus dem Umstande, dass in einem von ihm controllirten Falle die Zahl der mit dem Kothe entleerten Embryonen im Laufe dreier Wochen um ein Beträchtliches und in stetiger Progression (bis zu 7 und 8 Exemplaren in jeder Probe) zunahm.

Diese letztere Behauptung verliert übrigens jede Beweiskraft, wenn wir aus den Detail-Angaben unseres Verfassers ersehen, dass derselbe überhaupt nur drei Mal in längeren Zwischenräumen (am 14. und 20. December und am 7. Januar) seine Zählungen angestellt hat, und dann weiter berücksichtigen, dass die Mengenverhältnisse der entleerten Würmchen, wie das von Seifert beobachtet wurde, zu verschiedenen Zeiten ausserordentlich wechseln.

Was Perroncito sonst über die Schicksale seiner Würmer mittheilt, lässt sich mit den oben dargelegten Resultaten meiner Untersuchungen unschwer in Einklang bringen. Nur muss man dabei von der Annahme einer specifischen Verschiedenheit der beiderlei Formen absehen, dieselben vielmehr, wie das die positiven Ergebnisse meiner Zuchtversuche ausser Zweifel stellen, unter sich in einen genetischen Zusammenhang bringen. Was Perroncito als die Embryonen der Anguillula intestinalis in Anspruch nahm, ist keine eigne Art, sondern die geschlechtlich erzeugte Nachkommenschaft der frei lebenden Rhabditis stercoralis, die ihrerseits, wie wir wissen, von der parasitischen Anguillula intestinalis abstammt.

Dass Perroncito den genetischen Zusammenhang der beiden Formen übersehen hat, ist um so auffallender, als er selbst in Fig. 36. C als »Larva matura« von Rhabditis stercoralis genau dieselbe Form abbildet, die er in Fig. 32 unter der abgestossenen Cuticula der jugendlichen Anguillula intestinalis zur Darstellung gebracht hat[1].

Aber nicht bloss bei Perroncito, auch bei Bavay vermissen wir einen bestimmten und unzweifelhaften Hinweis darauf, dass er die Rhabditis stercoralis geschlechtsreif im Darmkanale seiner Leichen aufgefunden habe. Dass es möglich ist, die Darstellung

1) L'anhemia p. 63 u. 48.

Bavay's — Normand's Mémoire sur la diarrhée dite de Cochinchine, Paris 1877 (besonders abgedruckt aus den Archives de médecine navale 1877, p. 35) habe ich leider nicht einsehen können — in diesem Sinne zu deuten, unterliegt keinem Zweifel und wird auch dadurch bewiesen, dass die Annahme von dem Vorkommen geschlechtlich entwickelter Rhabditiden in den Eingeweiden des Menschen auf Grund der Normand-Bavay'schen Beobachtungen eine allgemeine Verbreitung gefunden hat; allein es wird dieses Vorkommen, wie ich wiederholen muss, nirgends ausdrücklich bemerkt. Durch die der Darstellung vorausgeschickte Beschreibung der Geschlechtsthiere ist dasselbe keineswegs ausser Zweifel gestellt, denn diese kann ja ebenso gut nach Exemplaren entworfen sein, welche Normand-Bavay dem Kothe entnommen hatten, in dem ja, wie sie bereits wussten, die Würmchen zur Geschlechtsreife sich entwickeln. Dass aber da, wo von dem massenhaften Auftreten der Parasiten in dem Darme und den anhängenden Drüsengängen die Rede ist, zunächst und vorzugsweise, wenn nicht gar ausschliesslich, die Jugendformen gemeint sind, geht aus der Angabe hervor, dass diese letztern (vers de l'âge moyen) weitaus am häufigsten vorkämen und dem Arzt vor allen andern bekannt sein müssten.

Andererseits kann übrigens nicht bezweifelt werden, dass Normand-Bavay die mit dem Kothe entleerten Jugendformen für die directen Abkömmlinge derselben Rhabditiden hielten, welche sie im Freien gezüchtet hatten. Dass es Nematoden giebt, die in ihrem Entwickelungsprozesse eine Wechselfolge freier und parasitischer heteromorpher Generationen aufweisen, war den französischen Forschern unbekannt; die Anguillula intestinalis, die wir als die Producentin der nach aussen entleerten rhabditisförmigen Embryonen kennen gelernt haben, war denselben ihrer Unscheinbarkeit wegen nur bei wenigen Obductionen aufgestossen — was lag unter solchen Umständen näher, als die Supposition, dass die geschlechtliche Entwickelung der Rhabditis, welche so leicht und sicher im abgelegten Kothe vor sich ging, auch im Darme stattfinde, und die daselbst lebenden Geschlechtsthiere es seien, welche die massenhaft nach aussen auswandernden Embryonen erzeugten.

Ich weiss sehr wohl, dass ich mit dem Versuche, durch Zurückweisung der Annahme von dem Vorkommen der geschlechtsreifen Rhabditis stercoralis im Darmkanale die Beobachtungen

und Angaben von Perroncito sowohl, wie von Normand-Bavay mit den Resultaten meiner Untersuchungen in Einklang zu bringen, im günstigsten Falle nur einen Indicienbeweis zu führen im Stande bin. Die definitive Entscheidung der Frage bleibt demnach einer weiteren Beobachtung vorbehalten. Bis zum Beweise des Gegentheils aber halte ich es für äusserst zweifelhaft, dass die geschlechtsreife Rhabditis stercoralis das Mutterthier der mit dem Kothe abgehenden Embryonen ist.

Zur weitern Stütze dieser Behauptung beziehe ich mich auf die Thatsache, dass weder Grassi noch Parona bei ihren Untersuchungen jemals eine geschlechtsreife Rhabditis in den mit Anguillula intestinalis besetzten Därmen aufgefunden haben. Und doch enthielt der Koth in ihren Fällen kaum weniger rhabditisförmige Embryonen, als da, wo diese als Abkömmlinge der Rhabditis stercoralis in Anspruch genommen werden.

Leider ist mir die Gelegenheit versagt gewesen, die Schicksale der von mir gezogenen filarienartigen Larven auf experimentellem Wege zu verfolgen und auf diese Weise ein weiteres Material zur Entscheidung der schwebenden Frage zu gewinnen. Wohl habe ich — in Ermangelung eines besseren Versuchsobjectes — zwei Mal eine (leider nur geringe) Anzahl solcher Larven an ein junges und helminthenfreies Kaninchen verfüttert, allein das Resultat war nur wenig befriedigend. Die von einem meiner Schüler, Herrn Stud. Loos, auf meine Bitte vorgenommene Untersuchung lieferte in dem einen Falle ein durchaus negatives, in dem andern ein nur zweifelhaftes Resultat, zweifelhaft insofern, als, wie ich durch Ansicht der betreffenden Präparate selbst mich überzeugte, im Dünndarm des Versuchsthieres drei Wochen nach der Fütterung ausser einer Anzahl Eier mit durchfurchtem, zum Theil auch weiter entwickeltem Dotter zwei dazu gehörige rhabditisförmige freie Embryonen gefunden wurden, welche, von der geringeren Grösse (Länge = 0,26 Mm., Breite = 0,017 Mm.) abgesehen, mit den rhabditisförmigen Embryonen des menschlichen Kothes durchaus übereinstimmten. Das Mutterthier wurde leider nicht aufgefunden, doch ist nach der Beschaffenheit der gefütterten Larven kein Zweifel, dass dasselbe, falls es wirklich von den letzteren abstammte, die Charaktere einer Anguillula intestinalis und nicht die einer Rhabditis stercoralis gehabt hat.

Wenn ich nun aber die Coexistenz der geschlechtsreifen Rhab-

ditis stercoralis und der Anguillula intestinalis in Zweifel zog, so hatte ich dabei zunächst nur die natürlichen und normalen Verhältnisse der Träger im Auge. Es gilt meine Behauptung mit andern Worten nur für den lebenden Menschen oder das lebende Thier. Wenn die Würmer nach dem Tode ihrer Träger eine längere Zeit im Innern des Körpers verweilen, wie etwa da, wo die Section erst nach Verlauf mehrerer Tage vorgenommen wird, dann kann möglicher Weise auch schon im Darm die Geschlechtsentwicklung der jugendlichen Rhabditiden eintreten. Ich sage »möglicher Weise«, denn einstweilen ist es noch unbekannt, welche Factoren zusammenwirken müssen, um unsere Würmchen zur geschlechtlichen Reife zu bringen. Versuche, welche ich zur Lösung dieser Frage mit Ascaris nigrovenosa anstellte, haben bis jetzt noch kein bestimmtes Resultat ergeben, indessen behalte ich mir vor, dieselben (unter günstigeren Bedingungen als zur Winterszeit) fortzusetzen.

Sollten Normand-Bavay und andere Forscher, wie namentlich Laveran, im menschlichen Darme wirklich geschlechtsreife Rhabditiden gefunden haben, was ich einstweilen noch immer bezweifle, dann würde daraus noch keineswegs ohne Weiteres geschlossen werden dürfen, dass diese schon bei Lebzeiten des Trägers vorhanden gewesen wären und die Mutterthiere der auswandernden jugendlichen Rhabditiden seien. Diese letzteren stammen vielmehr, wie ich das auf Grund meiner Experimentaluntersuchungen und im Einklang mit den Beobachtungen Grassi's als erwiesen annehme, von der sog. Anguillula intestinalis ab. Die Rhabditis stercoralis selbst ist aus der Zahl der selbständigen Parasiten zu streichen; sie repräsentirt gleich der Rhabditis Ascaridis nigrovenosae trotz ihrer Geschlechtsreife eine im Freien sich entwickelnde Zwischengeneration, die in den Entwicklungscyclus der Anguillula intestinalis sich einschiebt.

Indem ich mit dem vorstehenden Satze das Hauptresultat der voranstehenden Erörterungen nochmals recapitulire, weiss ich mich in völliger Übereinstimmung mit Grassi, der in seiner jüngsten Publication über unsere Würmer[1]) die Möglichkeit zugiebt, dass die von Perroncito (und früher schon, wie wir wis-

1) Anchilostomi e Anguillula, Gazette degli ospitali 1882, S. 41.

sen, von Normand-Bavay) gezüchteten geschlechtsreifen Rhabditiden wirklich von den nach aussen gebrachten Embryonen der Anguillula intestinalis abstammten, und unter der nach meinen Beobachtungen unzweifelhaft richtigen Voraussetzung, dass bei diesen Culturversuchen kein Irrthum untergelaufen sei, hinzufügt: »sarei portato a supporre che l'anguillula intestinale e dimorphobiotica, come l'ascaris nigrovenosa, e che l'anguillula stercorale rappresenta la forma libera dell' anguillula intestinale«.

Was die systematische Stellung und Benennug der Anguillula intestinalis betrifft, so halte ich es bis auf Weiteres für zweckmässig, dieselbe mit der sog. Ascaris nigrovenosa zusammen dem von mir neu aufgestellten und vornehmlich durch seine heterogone Entwicklungsweise charakterisirten Genus Rhabdonema einzuverleiben und unter Berücksichtigung des von Grassi vorgeschlagenen Genusnamen als Rhabdonema strongyloides zu bezeichnen.

Auf die aus den Voranstehenden resultirenden Schutzmaassregeln gegen die Anguillula intestinalis gehe ich hier nicht weiter ein. Es liegt auf der Hand, dass sich dieselben vorzugsweise gegen den mit Embryonen durchsetzten Koth zu richten haben. Die nach aussen gebrachten Würmchen müssen durch ein geeignetes Verfahren abgetödtet und auf diese Weise gehindert werden, die Brut zu erzeugen, welche das Infectionsmaterial abgiebt.

Dass das Vorkommen der Anguillula auf die wärmeren Gegenden (und Localitäten) beschränkt [1]) ist, erklärt sich aus dem Einflusse, den die Temperaturverhältnisse auf die Existenz und die Entwickelung der Jugendformen ausüben.

---

1) Wie weit übrigens die Anguillula verbreitet ist, lässt sich einstweilen noch nicht mit Bestimmtheit sagen. Den Mittheilungen zufolge, welche Pagenstecher (Trichinen, 2. Aufl. S. 100) über den Fund eines »wie es scheint bisher unbeschriebenen« Rundwurmes beim Schwein gemacht hat, dürfte dieselbe auch in Deutschland nicht vollständig fehlen.

Druck von Breitkopf & Härtel in Leipzig.


3 2044 092 879 923
Digitized by Google